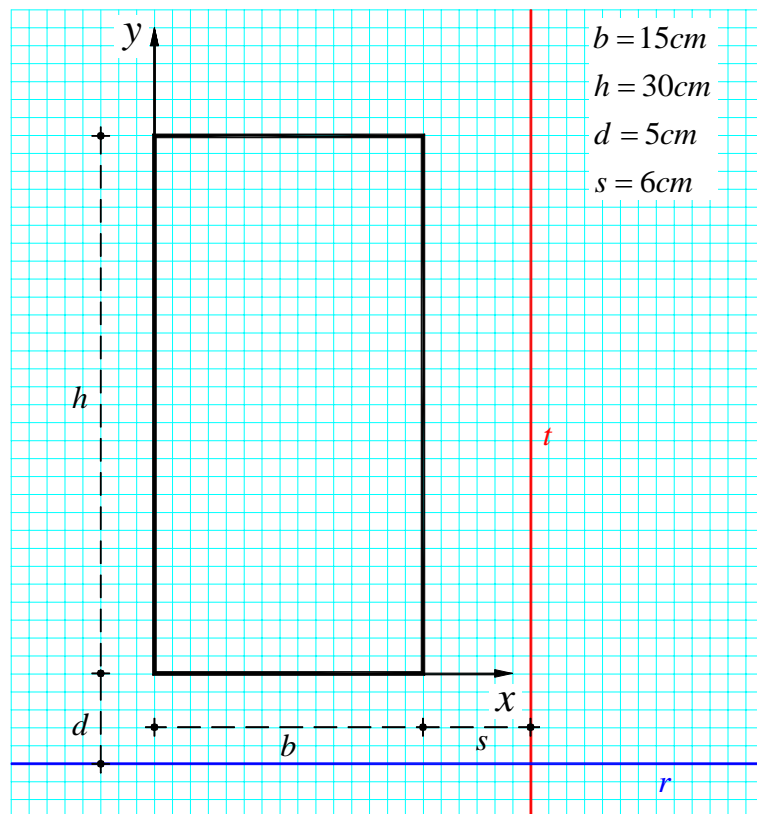


**ESERCIZIO n.1**

Data la sezione rettangolare riportata in Figura, determinare:

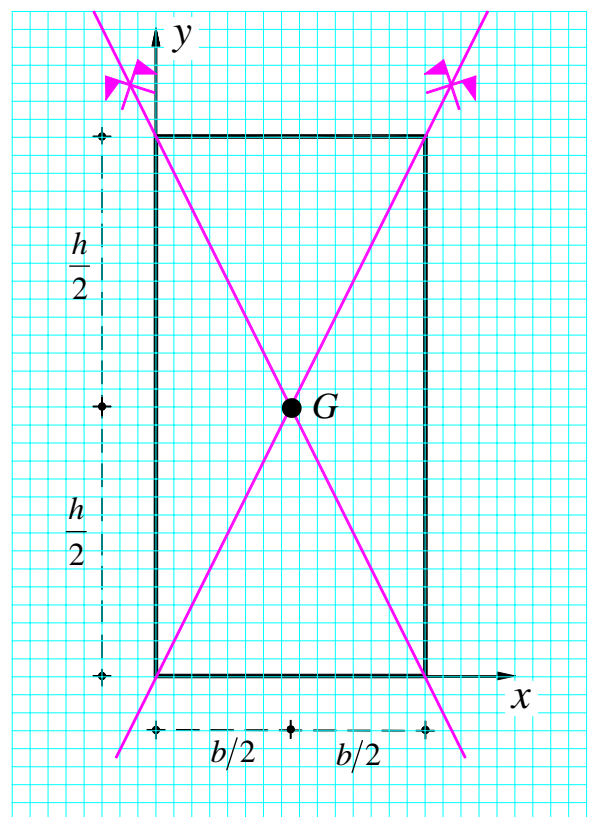
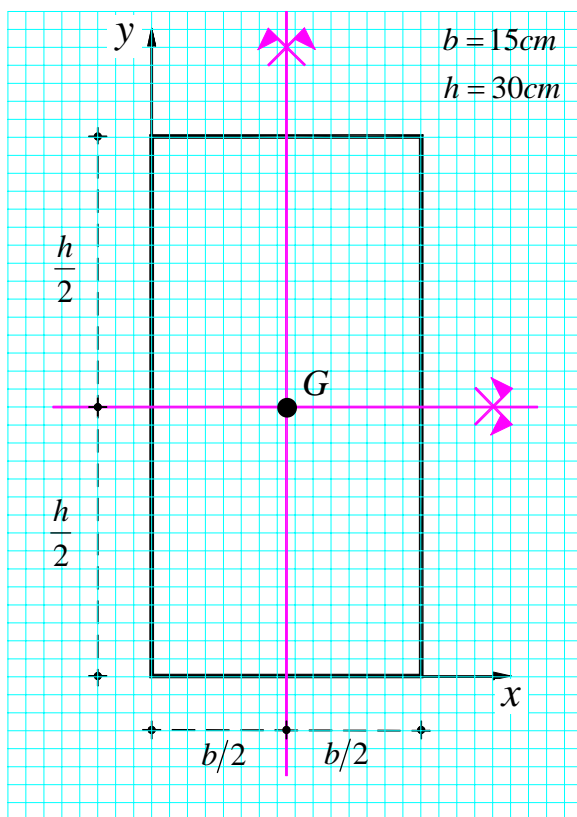
- gli assi principali centrali di inerzia;
- l'ellisse principale centrale di inerzia;
- il nocciolo centrale di inerzia;
- i momenti di inerzia  $I_r$  e  $I_t$  rispetto alle rette  $r$  e  $t$  indicate in Figura.



## 1. Determinazione del baricentro della sezione

Il baricentro di una sezione rettangolare può essere immediatamente individuato come punto di intersezione di due assi di simmetria della sezione. Assunto il sistema di riferimento  $(x, y)$  indicato in Figura, risulta quindi:

$$x_G = \frac{b}{2} = \frac{15}{2} = 7.5 \text{ cm}, \quad y_G = \frac{h}{2} = \frac{30}{2} = 15 \text{ cm}.$$



Più in generale, se non si sfrutta la simmetria, le coordinate del baricentro possono essere calcolate attraverso le formule:

$$x_G = \frac{S_y}{A}, \quad y_G = \frac{S_x}{A};$$

nelle quali  $A$  è l'area della sezione, mentre  $S_x$  e  $S_y$  sono i momenti statici della sezione rispetto agli assi  $x$  e  $y$  del sistema di riferimento indicato in Figura. Si ha dunque:

Area  $A$ :

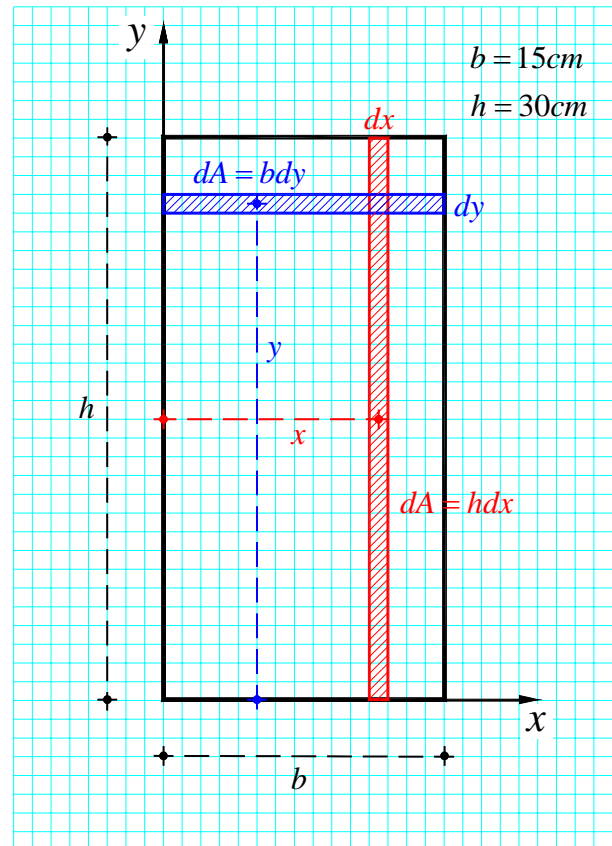
$$A = b \cdot h = 15 \cdot 30 = 450 \text{ cm}^2$$

Momento statico  $S_x$  rispetto all'asse  $x$ :

$$\begin{aligned} S_x &= \int_A y dA = \int_0^h y (b dy) = b \int_0^h y dy = b \left[ \frac{y^2}{2} \right]_0^h = \\ &= \frac{bh^2}{2} = \frac{15 \cdot 30^2}{2} = 6750 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Momento statico  $S_y$  rispetto all'asse  $y$ :

$$\begin{aligned} S_y &= \int_A x dA = \int_0^b x (h dx) = h \int_0^b x dx = h \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^b = \\ &= \frac{hb^2}{2} = \frac{30 \cdot 15^2}{2} = 3375 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$



Si può infine determinare la posizione del baricentro della sezione nel riferimento  $(x, y)$  considerato applicando le formule prima riportate ed esplicitate numericamente per il caso in esame; risulta:

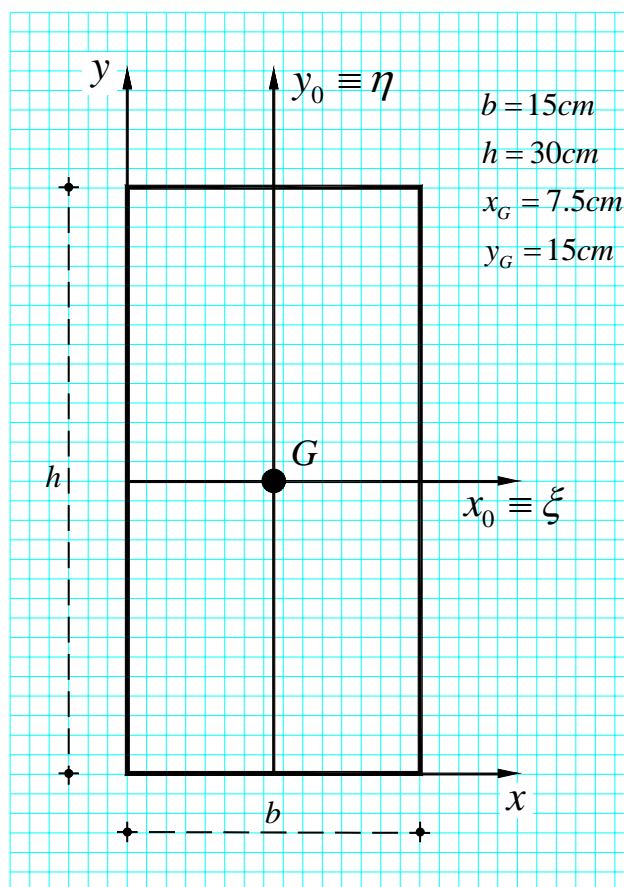
$$x_G = \frac{S_y}{A} = \frac{3375}{450} = 7.5 \text{ cm}, \quad y_G = \frac{S_x}{A} = \frac{6750}{450} = 15 \text{ cm}.$$

## 2. Determinazione degli assi principali centrali di inerzia

Nota la posizione del baricentro della sezione in esame nel riferimento  $(x, y)$ , gli assi baricentrici  $x_0$  e  $y_0$  indicati in Figura sono anche assi principali centrali di inerzia per la sezione in esame.

Rispetto a tali assi infatti il momento di inerzia centrifugo risulta essere nullo, cioè  $I_{x_0 y_0} = 0$ .

Si ricorda a tal proposito che se una sezione possiede due assi di simmetria retta questi coincidono con gli assi principali centrali di inerzia. Di seguito gli assi principali centrali di inerzia saranno indicati con le lettere greche  $\xi$  ed  $\eta$ , come specificato in Figura.



### 3. Determinazione dell'ellisse centrale di inerzia

L'ellisse centrale di inerzia, riferita agli assi principali centrali di inerzia  $\xi$  e  $\eta$ , ha equazione:

$$\frac{\xi^2}{\rho_\eta^2} + \frac{\eta^2}{\rho_\xi^2} = 1$$

nella quale  $\rho_\xi$  e  $\rho_\eta$  sono i semiassi dell'ellisse che coincidono, com'è noto, con i raggi giroatori di inerzia della sezione espressi da:

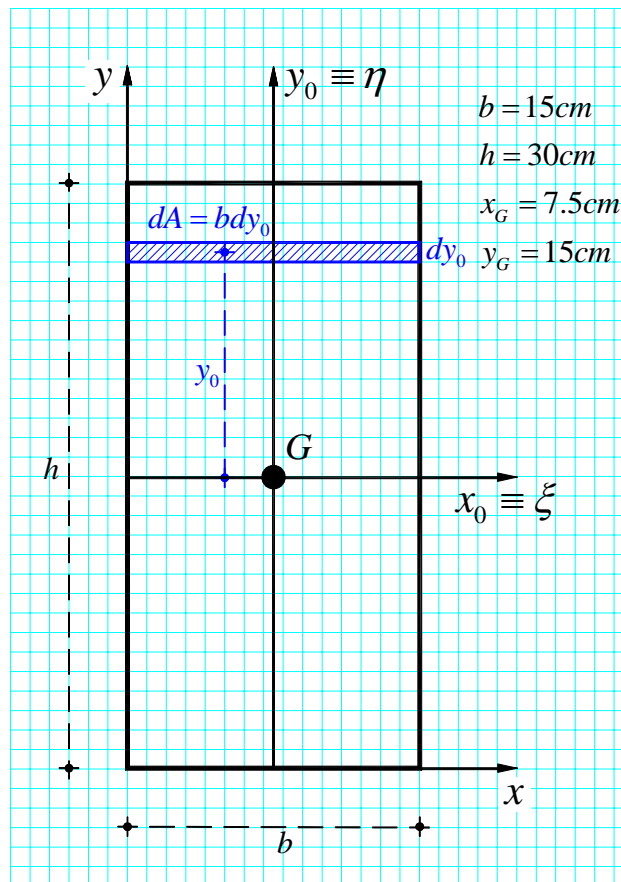
$$\rho_\xi = \sqrt{\frac{I_\xi}{A}}, \quad \rho_\eta = \sqrt{\frac{I_\eta}{A}}.$$

Nelle relazioni precedenti:  $A$  è l'area totale della sezione in esame;  $I_\xi$  e  $I_\eta$  sono i momenti principali centrali di inerzia della sezione che, nel caso in esame, coincidono con i momenti del secondo ordine  $I_{x_0}$  e  $I_{y_0}$  rispetto agli assi  $x_0$  e  $y_0$ .

### 3.1 Calcolo del momento principale centrale di inerzia della sezione rispetto all'asse $\xi$

Il momento di inerzia della sezione rispetto all'asse  $\xi \equiv x_0$  si calcola, per definizione, attraverso il seguente integrale:

$$I_{\xi} \equiv I_{x_0} = \int_A y_0^2 dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y_0^2 (b dy_0) = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y_0^2 dy_0 = b \left[ \frac{y_0^3}{3} \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{b}{3} \left[ \frac{h^3}{8} + \frac{h^3}{8} \right] = \frac{bh^3}{12} = \frac{15 \cdot 30^3}{12} = 33750 \text{ cm}^4.$$



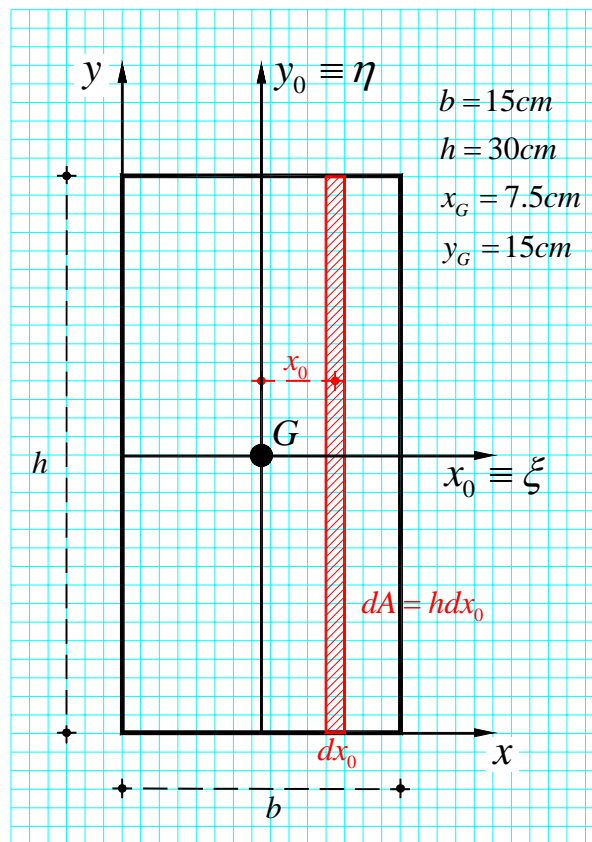
Si vuole qui sottolineare il risultato notevole per cui il momento di inerzia di una sezione rettangolare rispetto all'asse baricentrico  $x_0$  (parallelo alla base  $b$ ) è pari a  $I_{x_0} = \frac{bh^3}{12}$ .

Tale relazione verrà di seguito assunta come nota per sezioni rettangolari e pertanto per valutare  $I_{x_0}$  non si ricorrerà più al calcolo dell'integrale sopra riportato.

### 3.2 Calcolo del momento principale centrale di inerzia della sezione rispetto all'asse $\eta$

Il momento di inerzia della sezione rispetto all'asse  $\eta \equiv y_0$  si calcola, per definizione, attraverso il seguente integrale:

$$I_\eta \equiv I_{y_0} = \int_A x_0^2 dA = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} x_0^2 (h dx_0) = h \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} x_0^2 dx = h \left[ \frac{x_0^3}{3} \right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = \frac{h}{3} \left[ \frac{b^3}{8} + \frac{b^3}{8} \right] = \frac{hb^3}{12} = \frac{30 \cdot 15^3}{12} = 8437.5 \text{ cm}^4.$$



Si vuole qui sottolineare il risultato notevole per cui il momento di inerzia di una sezione

rettangolare rispetto all'asse baricentrico  $y_0$  (parallelo all'altezza  $h$ ) è pari a  $I_{y_0} = \frac{hb^3}{12}$ .

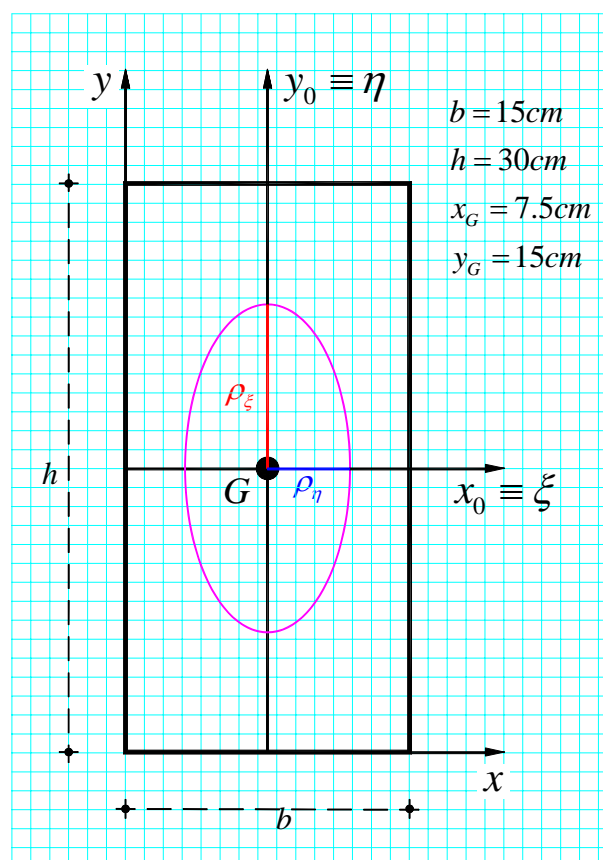
Tale relazione verrà di seguito assunta come nota per sezioni rettangolari e pertanto per valutare  $I_{y_0}$  non si ricorrerà più al calcolo dell'integrale sopra riportato.

### 3.3 Ellisse centrale di inerzia

Noti  $I_\xi$  e  $I_\eta$ , si possono in definitiva calcolare i raggi giratori di inerzia, si ha:

$$\rho_\xi = \sqrt{\frac{I_\xi}{A}} = \sqrt{\frac{33750}{450}} = 8.66 \text{ cm}, \quad \rho_\eta = \sqrt{\frac{I_\eta}{A}} = \sqrt{\frac{8437.5}{450}} = 4.33 \text{ cm}.$$

Questi ultimi definiscono l'equazione dell'ellisse centrale di inerzia nel riferimento principale  $(\xi, \eta)$  permettendone così la sua individuazione (effettuabile per punti ad esempio) così come indicato in Figura.

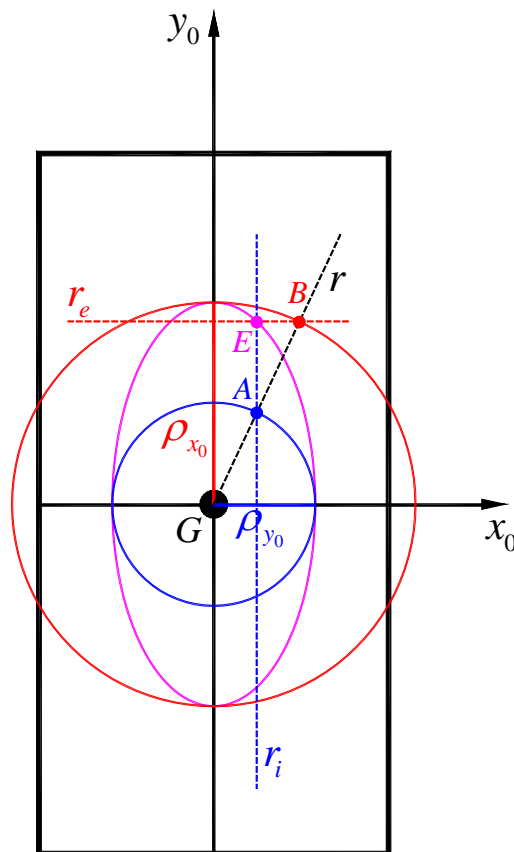




L'individuazione dell'ellisse, noti i semiassi  $\rho_\xi \equiv \rho_{x_0}$  e  $\rho_\eta \equiv \rho_{y_0}$ , può condursi anche sfruttando una semplice costruzione grafica di seguito illustrata e riportata schematicamente nella Figura seguente.

**Costruzione grafica di un'ellisse noti che siano i suoi semiassi**

1. Tracciare i semiassi e le circonferenze di centro  $G$  aventi per raggi i semiassi stessi;
2. Tracciata per  $G$  la generica semiretta  $r$ , condurre dalla sua intersezione  $A$  con la circonferenza interna la retta  $r_i$  parallela al semiasse maggiore, e dall'intersezione  $B$  con la circonferenza esterna la retta  $r_e$  parallela al semiasse minore;
3. Il punto  $E$  intersezione di  $r_i$  e  $r_e$  è punto dell'ellisse;
4. Ripetere la costruzione per un numero di punti sufficiente alla costruzione dell'ellisse.



#### 4. Determinazione del nocciolo centrale di inerzia

Il nocciolo centrale di inerzia di una figura piana è il luogo dei centri relativi delle rette del piano che non tagliano la figura o, nella polarità d'inerzia di centro il baricentro  $G$  della figura (polarità esistente tra le rette del piano e i simmetrici rispetto a  $G$  dei loro centri relativi), il nocciolo centrale di inerzia è il luogo degli antipoli delle rette del piano che non tagliano la figura. Il nocciolo è qui di seguito individuato attraverso la costruzione del suo contorno e ciò, in particolare, attraverso la determinazione della posizione dei vertici dello stesso, determinati come antipoli delle rette tangenti alla frontiera (o contorno) della figura resa convessa. Il contorno del nocciolo centrale di inerzia della sezione rettangolare in esame è quindi una figura a 4 vertici ciascuno dei quali rappresenta l'antipolo di una delle tangenti al contorno della sezione stessa.

##### 4.1 Metodo analitico

Le coordinate dei vertici  $R_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) del nocciolo centrale di inerzia possono essere calcolate nel riferimento ortogonale  $(x_0, y_0)$  prima considerato previa determinazione, nello stesso riferimento, delle equazioni delle rette  $r_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) tangenti al contorno della figura. Nota infatti l'equazione di una retta nel riferimento  $(x_0, y_0)$ , nella forma  $a x + b y + 1 = 0$ , dove  $x$  e  $y$  sono da intendersi valutate nel riferimento  $(x_0, y_0)$  e il pedice  $0$  è omesso per comodità, il suo antipolo, nello stesso riferimento, ha coordinate  $P \equiv (x_p, y_p)$  fornite da:

$$x_p = (a I_{y_0} + b I_{x_0 y_0}) / A; \quad y_p = (a I_{x_0 y_0} + b I_{x_0}) / A$$

nelle quali compaiono, oltre ai coefficienti  $a$  e  $b$  dell'equazione della retta considerata, l'area  $A$  della sezione e i momenti del secondo ordine della stessa sezione rispetto al riferimento  $(x_0, y_0)$  valutati in precedenza.

In particolare: per rette di equazione  $y = -1/b$ , cioè parallele all'asse  $x_0$ , ponendo per semplicità  $q = -1/b$ , dalle precedenti risulta:

$$x_p = -\frac{I_{x_0 y_0}}{qA}; \quad y_p = -\frac{I_{x_0}}{qA}$$

per rette di equazione  $x = -1/a$ , quindi parallele all'asse  $y_0$ , ponendo  $q^* = -1/a$  si ha invece:

$$x_p = -\frac{I_{y_0}}{q^* A}; \quad y_p = -\frac{I_{x_0 y_0}}{q^* A}$$

Con riferimento alla Figura, le rette tangenti al contorno della sezione hanno nel riferimento  $(x_0, y_0)$ , le seguenti equazioni:

retta  $r_1$  (parallela all'asse  $x_0$ ):  $y = h/2 = 30/2 = 15$ ;

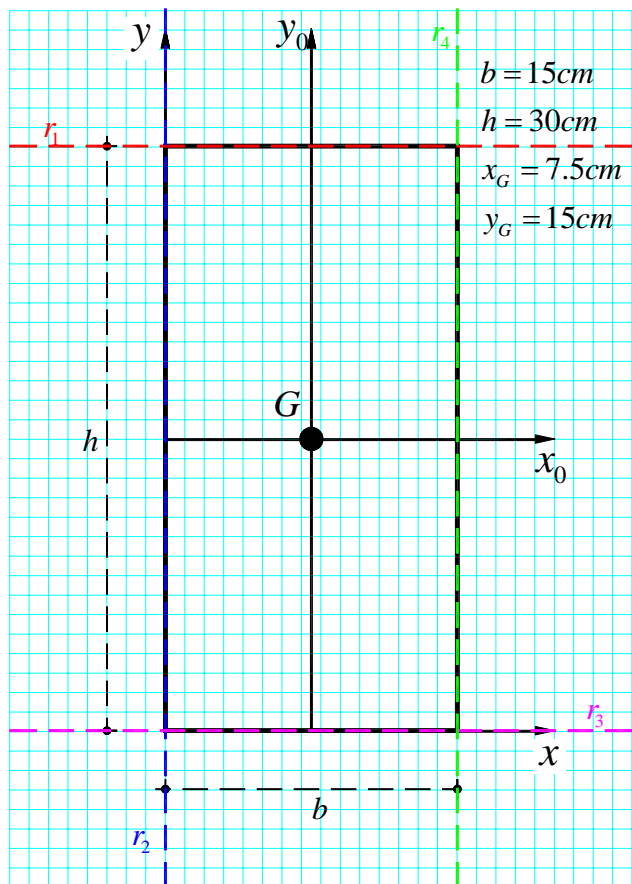
retta  $r_2$  (parallela all'asse  $y_0$ ):  $x = -b/2 = -15/2 = -7.5$ ;

retta  $r_3$  (parallela all'asse  $x_0$ ):  $y = -h/2 = -30/2 = -15$ ;

retta  $r_4$  (parallela all'asse  $y_0$ ):  $x = b/2 = 15/2 = 7.5$ ;

Riepilogando, nel riferimento  $(x_0, y_0)$ , le rette tangenti alla figura hanno equazioni:

$$\begin{cases} r_1: y = 15 \\ r_2: x = -7.5 \\ r_3: y = -15 \\ r_4: x = 7.5 \end{cases}$$



Applicando le formule prima richiamate, ricordando che nel caso in esame  $I_{x_0} \equiv I_{\xi}$  ed  $I_{y_0} \equiv I_{\eta}$ , si possono quindi calcolare le coordinate dei vertici  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ , e  $R_4$ , antipoli rispettivamente delle rette  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3$ , e  $r_4$ . Si calcola:

coordinate punto  $R_1$  (antipolo della retta  $r_1$  di equazione  $y = 15$ , parallela all'asse  $x_0$ ):

$$x_{R_1} = -\frac{I_{x_0 y_0}}{qA} = 0 \text{ cm}; \quad y_{R_1} = -\frac{I_{x_0}}{qA} = -\frac{h}{6} = -\frac{30}{6} = -5 \text{ cm};$$

coordinate punto  $R_2$  (antipolo della retta  $r_2$  di equazione  $x = -7.5$ , parallela all'asse  $y_0$ ):

$$x_{R_2} = -\frac{I_{y_0}}{q^*A} = \frac{b}{6} = \frac{15}{6} = 2.5 \text{ cm}; \quad y_{R_2} = -\frac{I_{x_0 y_0}}{q^*A} = 0 \text{ cm};$$

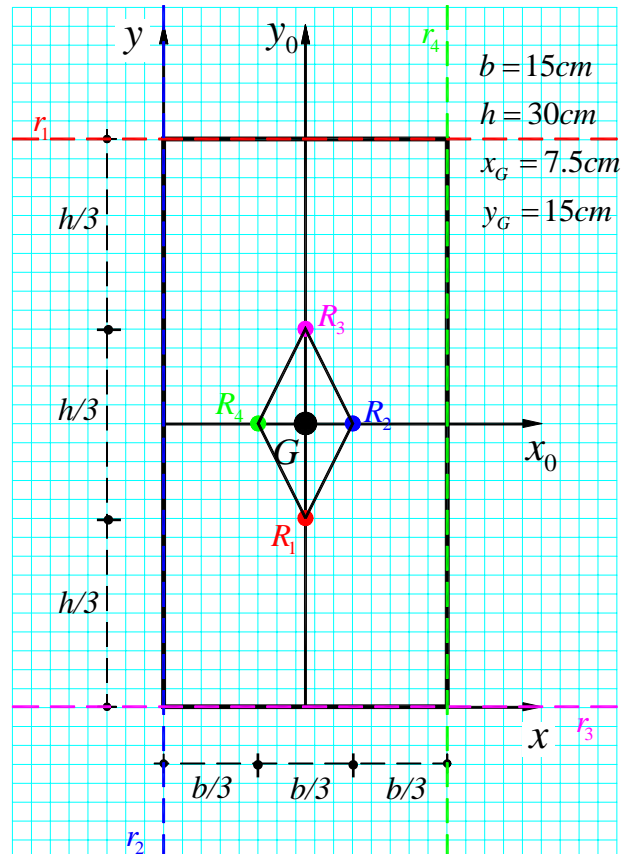
coordinate punto  $R_3$  (antipolo della retta  $r_3$  di equazione  $y = -15$ , parallela all'asse  $x_0$ ):

$$x_{R_3} = -\frac{I_{x_0 y_0}}{qA} = 0 \text{ cm}; \quad y_{R_3} = -\frac{I_{x_0}}{qA} = \frac{h}{6} = \frac{30}{6} = 5 \text{ cm};$$

coordinate punto  $R_4$  (antipolo della retta  $r_4$  di equazione  $x = 7.5$ , parallela all'asse  $y_0$ ):

$$x_{R_2} = -\frac{I_{y_0}}{q^*A} = -\frac{b}{6} = -\frac{15}{6} = -2.5 \text{ cm}; \quad y_{R_2} = -\frac{I_{x_0 y_0}}{q^*A} = 0 \text{ cm}.$$

Unendo i punti  $R_i$  così individuati si ottiene il contorno, e quindi il nocciolo centrale di inerzia della sezione, come illustrato in Figura. Si ricorda che i lati del nocciolo sono le antipolari dei vertici della sezione. Si osserva inoltre che, data la simmetria della sezione, ai fini della individuazione del contorno del nocciolo, è sufficiente determinare le coordinate di due vertici, antipolari di due rette tangenti alla Figura e ortogonali tra loro, ad esempio  $R_1$  ed  $R_2$  o alternativamente  $R_3$  ed  $R_4$ . Nel caso in esame infine, il nocciolo è un rombo di diagonali pari a  $h/3$  e  $b/3$  (regola del terzo medio).



## 4.2 Metodo grafico

In alternativa alla procedura analitica prima esposta, di seguito si propone un metodo grafico per l'individuazione dei vertici del nocciolo centrale d'inerzia. Il metodo è riportato in sintesi, per passi operativi sequenziali e relativamente alla determinazione di un solo vertice del nocciolo della sezione in esame, essendo la costruzione grafica facilmente ripetibile per i restanti vertici. La costruzione è quella che consente, data una figura piana della quale si sia determinata l'ellisse centrale d'inerzia, di individuare l'antipolo  $R$  di una qualsiasi retta  $r$  del piano. Essa si basa su una relazione notevole della polarità d'inerzia di centro  $G$ , nota come relazione di coniugio, espressa da:

$$\rho_{r_0}^2 = \overline{GR} \cdot \overline{GR'}$$

nella quale:

$r_0$  è la retta parallela ad  $r$  e passante per il baricentro  $G$  della figura;

$\rho_{r_0}$  è il raggio giratore d'inerzia rispetto a  $r_0$ , definito dal semidiametro dell'ellisse appartenente alla direzione  $r^*$  coniugata ad  $r$ ;

$R$  è l'antipolo della retta  $r$ ;

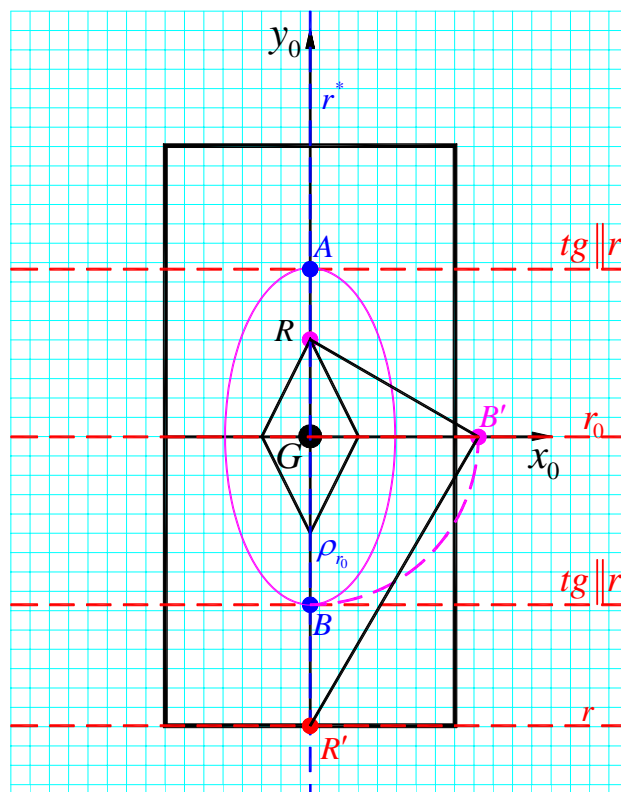
$R'$  è il coniugato di  $R$ ;

$\overline{GR}$  e  $\overline{GR'}$  individuano i segmenti rispetto ai quali  $\rho_{r_0}$  è medio proporzionale, come stabilito dalla relazione di coniugio.

Si rimanda ai libri di testo consigliati per i fondamenti teorici sui quali si basa la costruzione proposta.

Con riferimento alla Figura, i passi operativi della costruzione proposta sono:

- #1 Nota l'ellisse centrale di inerzia e fissata la tangente  $r$ , della quale si vuole individuare l'antipolo  $R$ , si tracciano le tangenti all'ellisse parallele a  $r$ , individuando così i punti di tangenza  $A$  e  $B$ ;
- #2 La retta passante per i punti di tangenza  $A$  e  $B$  è la direzione  $r^*$  coniugata ad  $r$ , la sua intersezione con  $r$  è il punto  $R'$ , coniugato di  $R$ ; il raggio giratore  $\rho_{r_0}$  coincide con il semidiametro  $\overline{GB}$  (o  $\overline{GA}$ );
- #3 Si ruota  $\overline{GB}$  di  $90^\circ$  si da disporlo sull'ortogonale per  $G$  alla direzione coniugata  $r^*$ , sia  $\overline{GB'}$  il segmento così ottenuto;
- #4 Si unisce  $R'$  con  $B'$  e si conduce per  $B'$  l'ortogonale a  $\overline{R'B'}$  sino ad intersecare la direzione coniugata  $r^*$  in  $R$ , antipolo della retta  $r$  considerata e vertice del nocciolo centrale di inerzia della sezione.



Ripetendo la costruzione per le altre 3 tangenti alla Figura si individua in modo completo il nocciolo centrale di inerzia della sezione.

### 5. Calcolo dei momenti di inerzia rispetto alle rette "r" e "t"

Si calcolano infine i momenti di inerzia rispetto alle rette  $r$  e  $t$  mostrate in Figura. Tali momenti possono essere calcolati utilizzando il teorema del trasporto; nel seguito  $I_{x_0}$  e  $I_{y_0}$  indicano i momenti di inerzia della sezione rispetto agli assi baricentrici  $x_0$  e  $y_0$ , rispettivamente paralleli alle rette  $r$  e  $t$ .

Momento di inerzia della sezione rispetto alla retta  $r$

$$I_r = I_{x_0} + A \left( \frac{h}{2} + d \right)^2 = 33750 + 450 \cdot (15 + 5)^2 = 213750 \text{ cm}^4$$

Momento di inerzia della sezione rispetto alla retta  $t$

$$I_t = I_{y_0} + A \left( \frac{b}{2} + s \right)^2 = 8437.5 + 450 \cdot (7.5 + 6)^2 = 90450 \text{ cm}^4$$

