Richiami di algebra delle matrici a valori reali*

- *Vettore*

$$v_n = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

- *Vettore trasposto*

$$v_n' = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \qquad v_n = (v_1, v_2, \ldots, v_n)'$$

**A. Pollice - Statistica Multivariata*

- *Vettore nullo*

$$o'_n = (0, 0, \ldots, 0)$$

- *Vettore unitario*

$$u'_n = (1, 1, \ldots, 1)$$

- *Matrice*

$$A_{mn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left[a_{ij}\right]$$

- *Matrice quadrata*

$$m = n$$

- *Matrice diagonale*

$$D_n = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$$

- *Matrice scalare*

$$S_n = \begin{pmatrix} k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k \end{pmatrix}$$

- *Matrice identità*

$$I_n = S_n \text{ con } k = 1$$

- *Matrice nulla*

$$O_{mn} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

- *Matrice unitaria*

$$U_{mn} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

- *Matrice triangolare inferiore*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- *Matrice triangolare superiore*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Operazioni con vettori e matrici

- *Trasposizione*

$$\underset{m\times n}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow \underset{n\times m}{A'} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots a_{nm} & \end{pmatrix}$$

  – Se $A = A'$ allora A è detta *simmetrica*

- *Addizione*

$$[a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]$$

  - Per tale operazione valgono le proprietà *commutativa* ed *associativa* ed esiste l'*elemento neutro* dato dalla matrice nulla O_{mn}

- *Prodotto* di $x \in \Re^n$
  -
$$x'x = \left(x_1^2 + \cdots + x_n^2\right)$$
  -
$$xx' = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & \ldots & x_1x_n \\ x_2x_1 & x_2^2 & \ldots & x_2x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \ldots & x_n^2 \end{pmatrix}$$

- *Proprietà del prodotto tra matrici*
  - *Associativa* $(AB) \cdot C = A \cdot (BC)$
  - *Distributiva* $A(B + C) = AB + AC$
  - $(AB)' = B'A'$
  - $U_{nm} = u_n \cdot u'_m$

- *Operazioni elementari* sulle linee (righe e colonne) di una matrice
  - *Scambio* di linee parallele
  - *Moltiplicazione* di una linea per uno scalare
  - *Somma* di linee parallele elemento per elemento

Vettori e matrici particolari

- *Vettori particolari*
  - *Ortogonali*

$$v_1'v_2 = v_2'v_1 = 0$$

  - *Ortonormali* vettori ortogonali per i quali vale

$$v_1'v_1 = v_2'v_2 = 1$$

  - *Linearmente indipendenti*

$$k_1v_1 + k_2v_2 + \cdots + k_nv_n = o \Leftrightarrow k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$$

- *Matrici particolari*
  - *Ortogonali*

$$A'A = D_1 \text{ ed } AA' = D_2$$

  - *Ortonormali*

$$A'A = I \text{ ed } AA' = I$$

  - *Idempotenti*

$$A^m = A \quad \forall m$$

  - *Zeropotenti*

$$A^m = O \quad \forall m$$

Determinanti di matrici quadrate

- Somma algebrica dei *prodotti associati* alla matrice quadrata $n-$dimensionale $A = [a_{rs}]$

- A_{rs} si dice *complemento algebrico* dell'elemento a_{rs} ed è il determinante della matrice ottenuta eliminando da A la riga r-esima e la colonna s-esima moltiplicato per $(-1)^{r+s}$

- *Teoremi di Laplace*
  - $|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ri} A_{ri}$
  - $\sum_{k=1}^{n} a_{rk} A_{sk} = 0, \quad \forall r \neq s$
- *Proprietà dei determinanti*
  - $|A| = |A'|$
  - $|kA| = k^n \, |A|$
  - $|AB| = |BA| = |A| \, |B|$

- *Proprietà dei determinanti*
  - Il determinante di una matrice triangolare è il prodotto degli elementi della diagonale
  - Se sono nulli gli elementi di una linea di una matrice il determinante è nullo
  - Scambiando due linee della matrice il determinante cambia segno
  - Moltiplicando gli elementi di una linea per una costante k anche il determinante risulta moltiplicato per k
  - Un determinante è nullo se la matrice ha due linee proporzionali

Caratteristiche e proprietà delle matrici quadrate

- Indicati con A_{rs} i complementi algebrici degli elementi della matrice A, l' *aggiunta* di A è la matrice data da:

$$agg\, A = [A_{rs}]'$$

- *Proprietà dell'aggiunta*
  - $A \cdot agg\, A = |A|\, I$
  - $|agg\, A| = |A|^{n-1}$

- *Inversa di una matrice*

$$A^{-1} \ni' A^{-1}A = I = AA^{-1}$$

- *Proprietà dell'inversa*
  - $A^{-1} = \frac{1}{|A|} agg\, A = \frac{1}{|A|} [A_{rs}]'$
  - $\exists A^{-1} \Leftrightarrow |A| \neq 0$
  - $\left|A^{-1}\right| = |A|^{-1}$
  - A è ortonormale $\Leftrightarrow A' = A^{-1}$

- La *traccia* di una matrice quadrata è la somma degli elementi della diagonale

- *Proprietà della traccia*

  - $tr\,(A \pm B) = tr(A) \pm tr(B)$

  - $tr(kA) = k\,tr(A) \quad k \in \Re$

  - $tr(A'A) > 0 \quad se\ A \neq O$

  - $tr\,(ABC) = tr\,(CAB)$

- Il *rango* di una matrice è l'ordine massimo dei minori non nulli

- *Proprietà del rango*

  – il rango del prodotto di matrici non supera il minore dei ranghi dei fattori

  $$r\,(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$$

  – operazioni elementari sulle linee di A non ne modificano il rango

- *Altre proprietà delle matrici quadrate*
  - $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$
  - $(A')^{-1} = \left(A^{-1}\right)'$
  - $(ABC)' = C'B'A'$
  - $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$

- *Altre proprietà delle matrici quadrate*
  - A ortonormale $|A| = \pm 1$
  - A ortonormale $A^{'} = A^{-1}$ è ortonormale
  - A ortonormale e B ortonormale, AB è ortonormale
  - A idempotente $1 - A$ idempotente
  - A idempotente $|A| = 0 \vee 1$
  - A idempotente e C ortonormale, $C'AC$ idempotente

Matrici a blocchi

- Le *matrici a blocchi* sono matrici aventi per elementi altre matrici

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

- *Addizione* A e B sono dello stesso tipo con blocchi dello stesso tipo

$$A+B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} \end{pmatrix}$$

- *Prodotto* A_{mn} e B_{nq} e la partizione delle righe di B è conforme a quella delle colonne di A

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix}$$

- *Inversa*

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}(-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} + A_{22})^{-1} \\ -A_{22}^{-1}A_{21}(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1} & (-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} + A_{22})^{-1} \end{pmatrix}$$

- *Determinanti*

$$|A| = |A_{11}| \cdot \left| A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12} \right| = |A_{22}| \cdot \left| A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21} \right|$$

  – *Matrice triangolare a blocchi* (caso particolare)

$$\begin{vmatrix} A_{11} & O \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{vmatrix} = |A_{11}| \cdot |A_{22}|$$

Autovalori e autovettori

Sia A una matrice quadrata di ordine n, λ e v sono rispettivamente detti *autovalore* e *autovettore* di A se vale

$$Av = \lambda v \Rightarrow (A - \lambda I)\, v = o$$

- $(A - \lambda I)\, v = o$ è un sistema lineare omogeneo con incognite gli elementi del vettore v ed ammette soluzioni non nulle se ne ammette l'*equazione caratteristica* $|A - \lambda I| = 0$

- *Polinomio caratteristico*

$$P_A(\lambda) = |A - \lambda I| = (-1)^n \lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + \ldots + c_{n-1}\lambda + c_n$$

- *Spettro* della matrice A: insieme degli autovalori di A

- *Matrice modale* V della matrice A: matrice avente per colonne gli autovettori di A, normalizzati in modo che la somma dei quadrati degli elementi sia pari ad 1

- *Teoremi su autovalori e autovettori*

  – A è simmetrica $\Leftrightarrow$ ad autovalori distinti sono associati autovettori ortogonali:

$$\begin{cases} Av_1 = \lambda_1 v_1 \\ Av_2 = \lambda_2 v_2 \end{cases} \Leftrightarrow v_2' v_1 = v_1' v_2 = 0$$

  – Autovettori corrispondenti ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti

  – A simmetrica $\Leftrightarrow$ V ortonormale

  – A simmetrica $\Leftrightarrow$ $AV = V\Lambda$, essendo $\Lambda = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$

- *Diagonalizzazione*

$$A = V\Lambda V^{-1}$$

  - A è *diagonalizzabile* $\Leftrightarrow$ $r(A) = r(\Lambda) =$ numero di radici non nulle dell'equazione caratteristica

  - *Decomposizione spettrale*: se A è diagonalizzabile, allora

$$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i w_i'$$

    dove $V = (v_1 \ldots v_n)$ e $V^{-1} = (w_1', \ldots, w_n')'$

- *Altre proprietà di autovalori e autovettori*

  - $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$
  - Siano λ e v autovalore ed autovettore di A
    * $A^2 v = \lambda^2 v$, ovvero λ^2 autovalore di A^2
    * $A^{-1} v = \left(\frac{1}{\lambda}\right) v$, ovvero $\frac{1}{\lambda}$ autovalore di A^{-1}
  - Matrici idempotenti hanno autovalori 0 o 1
  - A_n simmetrica idempotente e $r\,(A) = p$
    * A ha p autovalori pari ad 1 ed $n - p$ pari a 0
    * $tr(A) = p$

Forme quadratiche

Siano A una matrice simmetrica di dimensione n ed x un vettore in $\Re^n$, si dice *forma quadratica* l'applicazione

$$q : \Re^n \Rightarrow \Re \ni' q(x) = x'Ax$$

- A è *definita positiva* se $\forall x \in \Re^n$ vale $q(x) = x'Ax > 0$
- A è *semidefinita positiva* se $\forall x \in \Re^n$ vale $q(x) = x'Ax \geq 0$
- Analogamente *definita* e *semidefinita negativa*

- *Teoremi sulle forme quadratiche*
  - A definita positiva/negativa $\Rightarrow \; |A| \neq 0$
  - A definita positiva/negativa $\Leftrightarrow$ i suoi autovalori sono tutti positivi/negativi
  - A definita positiva, allora $\exists C \ni' CC' = A$ con C matrice triangolare inferiore e non singolare (*decomposizione di Cholesky*)

- *Teoremi sulle forme quadratiche*
  - A simmetrica idempotente $\Rightarrow$ A semidefinita positiva
  - A_m simmetrica definita positiva, B_{mn} con $r(B) = p \leq n \leq m$
    - $p = n \Rightarrow B'AB$ definita positiva
    - $p < n \Rightarrow B'AB$ semidefinita positiva
  - A_m simmetrica semidefinita positiva, B_{mn} con $r(B) = p \leq n \leq m \Rightarrow B'AB$ semidefinita positiva

Differenziazione con notazione matriciale

- Sia $f : \Re^n \to \Re \quad \ni' \quad y = f(x) = f(x_1, ..., x_n) \quad \forall x \in I \subset \Re^n$, si definisce *gradiente* di f

$$(grad\, f)' = \nabla' f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

  - gradiente di forme lineari $f(x) = a'x$, $\nabla f = a$
  - gradiente di forme quadratiche $f(x) = x'Ax$, $\nabla f = 2Ax$

- *Derivate rispetto agli elementi di una matrice*
  - forme quadratiche, $\frac{\partial x'Ax}{\partial A} = xx'$
  - determinanti, $\frac{\partial |A|}{\partial A} = \left[A_{ij}\right] = agg\,A' = |A|\,(A')^{-1}$
    - se $|A| > 0$, $\frac{\partial \log |A|}{\partial A} = (A')^{-1}$
  - traccia di un prodotto tra matrici, $\frac{\partial tr(XA)}{\partial X} = A'$

- Sia $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} = f''_{ij}$ si definisce *matrice Hessiana* di f

$$H(x) = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x \partial x'} = \left[f''_{ij} \right]$$

- Sia $f : \Re^n \rightarrow \Re^m$ e tale che

$$y = f(x) = \begin{cases} y_1 = f_1\,(x_1, ..., x_n) \\ \vdots \\ y_m = f_m\,(x_1, ..., x_n) \end{cases}$$

si definisce *matrice Jacobiana* di f

$$J(x) = (\nabla y_1, \ldots, \nabla y_m) = \nabla y = \frac{\partial y}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Massimi e minimi

- Sia $f = \Re^n \rightarrow \Re$ con f, f', f'' continue

  Massimi e minimi relativi

  – $\bar{x}$ è punto di *massimo relativo* $\leftrightarrow$ $\nabla f\,(\bar{x}) = o$ e $H(\bar{x})$ è *definita negativa*

  – $\bar{x}$ è punto di *minimo relativo* $\leftrightarrow$ $\nabla f\,(\bar{x}) = o$ e $H(\bar{x})$ è *definita positiva*

  – $\bar{x}$ è punto di *sella* $\leftrightarrow$ $\nabla f(\bar{x}) = o$ e $H(\bar{x})$ *non è definita* (positiva o negativa)

- Siano $f : A \subset \Re^n \to \Re$ e $\varphi(x) = 0$ (vincolo) con $f, f', f'', \varphi, \varphi', \varphi''$ continue in A, sia $\Sigma_\varphi = \{x \in A | \, \varphi(x) = 0\}$

  Massimi e minimi relativi vincolati (un vincolo di uguaglianza)

  - $\bar{x}$ *punto di massimo* o di *minimo relativo* di f su Σ_φ se esiste $\bar{\lambda} \in \Re$ (*moltiplicatore di Lagrange*) tale che $\nabla f(\bar{x}) = \bar{\lambda} \nabla \varphi(\bar{x})$

  - I punti di massimo e di minimo vincolati vanno cercati tra le soluzioni del sistema ottenuto annullando le derivate parziali della *funzione lagrangiana* $L(x, \lambda) = f(x) - \lambda \varphi(x)$ rispetto alle variabili $x_1, \ldots, x_n, \lambda$

- Siano $f : A \subset \Re^n \to \Re$ e $\varphi : \Re^n \to \Re^m \ni' \varphi(x) = o$ (vincolo) con $f, f', f'', \varphi, \varphi', \varphi''$ continue in A e sia $\Sigma_\varphi = \{x \in A | \, \varphi(x) = o\}$

  Massimi e minimi relativi vincolati (m vincoli di uguaglianza)

  – $\bar{x}$ *massimo* o *minimo* di f su Σ_φ se esiste $\bar{\lambda} \in \Re^m$ (*vettore dei moltiplicatori di Lagrange*) tale che

  $$\nabla f(\bar{x}) = \bar{\lambda}' \nabla \varphi(\bar{x})$$

  – I punti di massimo e minimo vincolati vanno cercati tra le soluzioni del sistema ottenuto annullando le derivate parziali della *funzione lagrangiana* $L(x, \lambda) = f(x) - \lambda' \varphi(x)$ rispetto alle variabili $x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$