



Corso di Laurea in Scienze Economiche L-33

Matematica per l'Economia
SECS-S/06 - 8 CFU

Prof. Massimiliano Ferrara

massimiliano.ferrara@unirc.it
massimiliano.ferrara@unibocconi.it

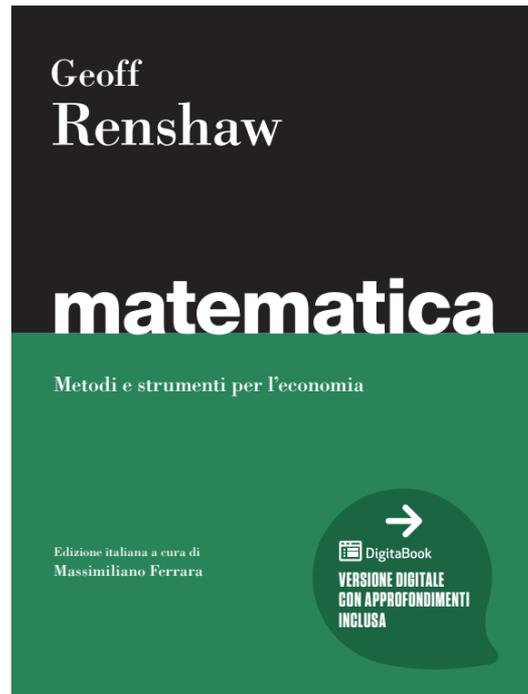
A.A. 2023/2024

Geoff Renshaw

Matematica. Metodi e strumenti per l'economia

Edizione italiana a cura di Massimiliano Ferrara

Capitolo 14 – Integrazione



 Egea

Integrale definito

Osserva la fig. 14.1.

Possiamo misurare approssimativamente l'area A fra a e b calcolando l'area di uno o più rettangoli disegnati sotto la curva.

All'aumentare del numero di tali rettangoli, l'errore di approssimazione diminuisce.

L'area di uno di questi rettangoli è $f(x_r)(x_{r+1} - x_r)$.

Con n rettangoli, l'area totale è $\sum_{r=1}^n f(x_r)(x_{r+1} - x_r)$

Per n che tende a infinito, questa sommatoria tende a un valore limite, che è l'area A cercata.

Scriviamo tale valore limite come

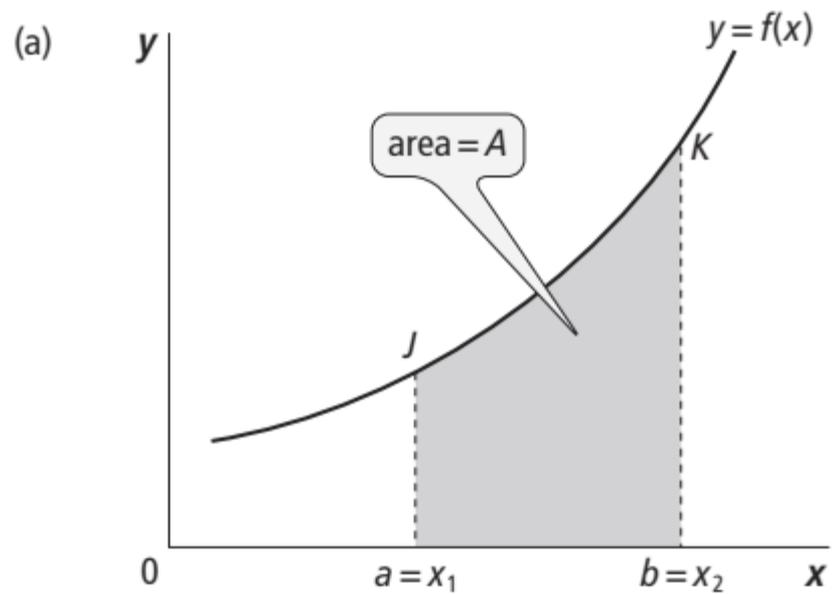
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^n f(x_r)(x_{r+1} - x_r) = \int_a^b f(x)dx$$

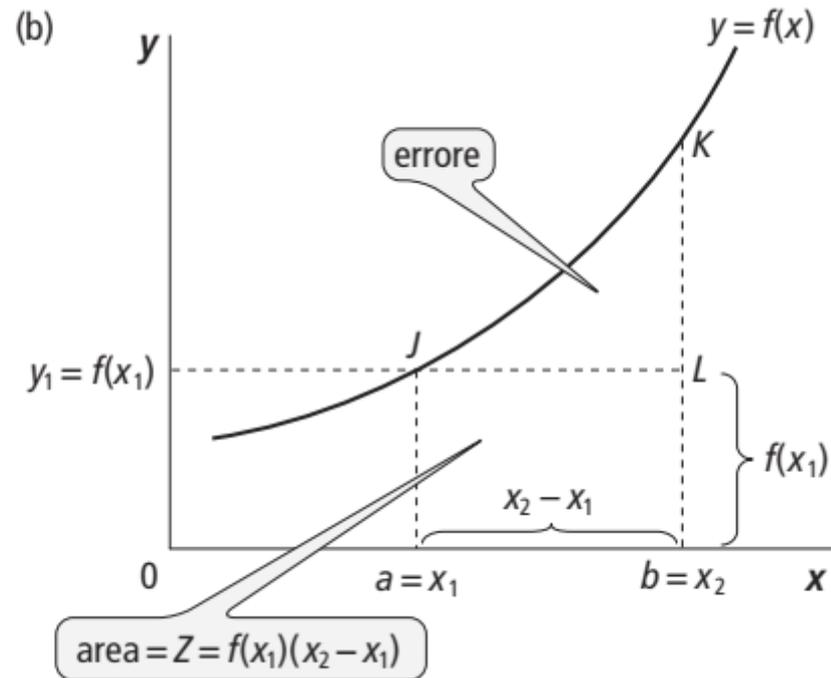
E lo chiamiamo **integrale definito** (Regola 14.1)

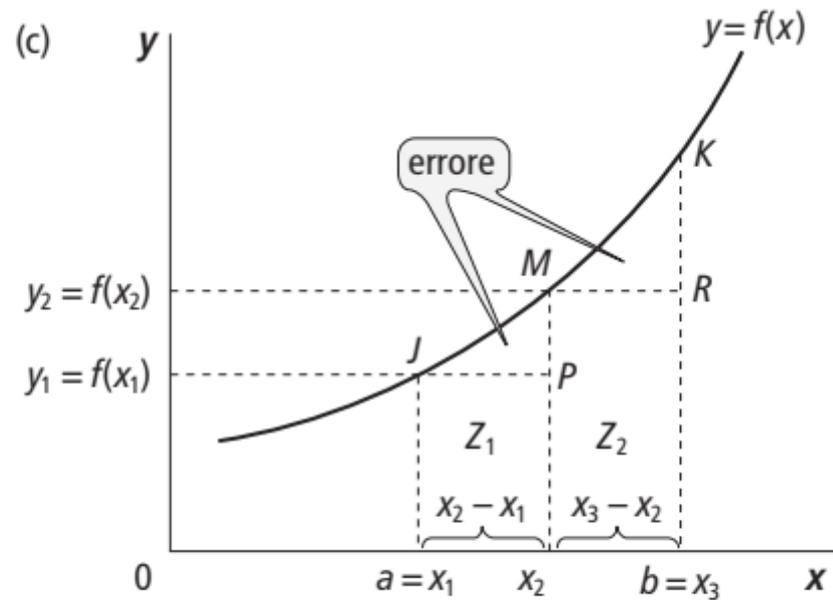
L'integrale indefinito

Osserva la fig. 14.2. L'**integrale indefinito** è ancora un'area, ma con l'estremo superiore non specificato diventa una funzione di x . Lo indichiamo con la scrittura $\int f(x)dx$.

Figura 14.1 Approssimazione dell'area sottesa da una curva

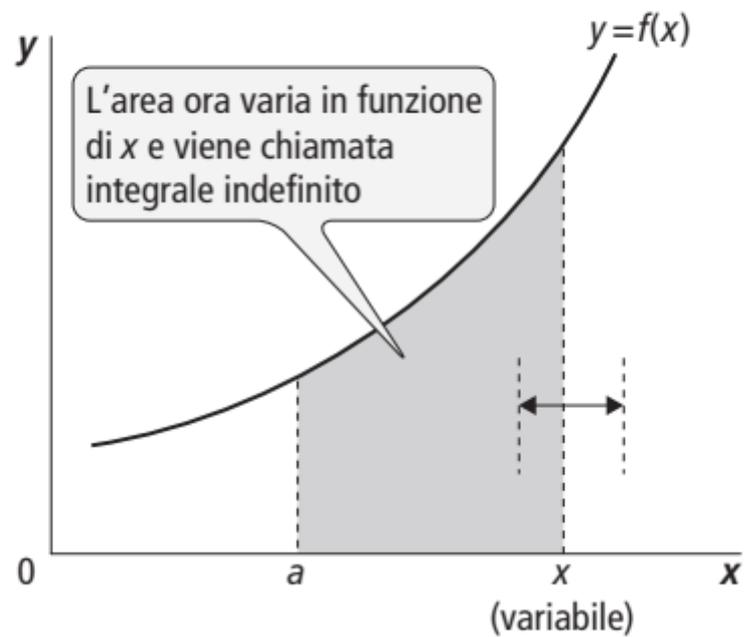






Aumentando il numero di rettangoli Z_1, Z_2 possiamo ridurre l'errore di approssimazione dell'area sottesa dalla curva.

Figura 14.2 L'integrale indefinito



Primitive

Per calcolare $\int f(x)dx$ dobbiamo trovare una funzione $F(x)$ tale che $f(x)$ è la derivata di $F(x)$. (Regola 14.2)

Esempio: $\int (2x)dx = x^2 + c$ dove c è una generica costante.

Questa funzione rispetta la Regola 14.2 perché $2x$ è la derivata di $x^2 + c$.

Calcolo dell'integrale indefinito

Ognuna delle seguenti regole è l'inverso di una regola di derivazione. Alcune sono più complicate di altre e molti integrali non possono essere calcolati.

1. Regola della potenza: $\int (x^n)dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ (Nota che compare una costante additiva arbitraria)

Esempio: $\int (x^3)dx = \frac{x^4}{4} + c$

2. Costante moltiplicativa: $\int A(x^n)dx = A \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ (la costante A ricompare nell'integrale)

Esempio: $\int (12x^3)dx = 12 \frac{x^4}{4} + c = 3x^4 + c$

Ciò significa che la costante moltiplicativa può essere trasportata fuori o dentro l'integrale. Esempio: $\int (10x)dx = 5 \int (2x)dx = 5(x^2) + c$

3. Funzione di funzione: $\int [f(x)]^n f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c$

Esempio: $\int (x^4 + 1)^2 4x^3 dx = \frac{(x^4+1)^3}{3} + c$

(verificalo derivando)

4. Funzione esponenziale: Ricorda che $\frac{d}{dx}$ di $e^{f(x)} = e^{f(x)} f'(x)$

L'inverso è : $\int e^{f(x)} f'(x) dx = e^{f(x)} + c$

5. Funzione logaritmica: Ricorda che $\frac{d}{dx}$ di $\ln[f(x)] = \frac{f'(x)}{f(x)}$

L'inverso è : $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln[f(x)] + c$

Finding a definite integral

Teorema fondamentale del calcolo integrale (Regola 14.3)

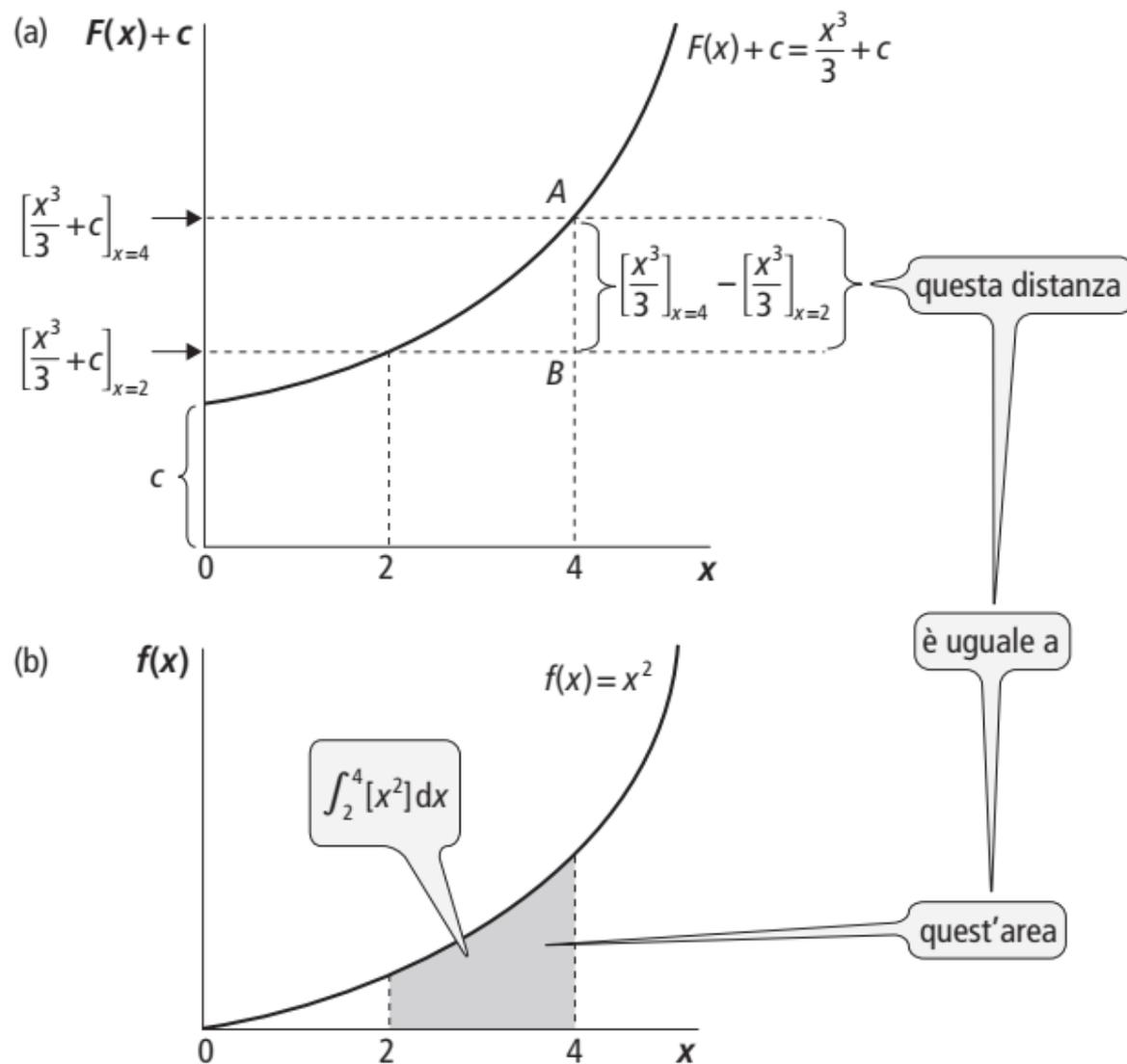
Se $\int [f(x)] dx = F(x) + c$ allora $\int_a^b [f(x)] dx = [F(x)]_{x=b} - [F(x)]_{x=a}$

Esempio: $\int_2^4 [x^2] dx$. Anzitutto troviamo $\int [x^2] dx = \frac{x^3}{3} + c$

$$\text{Poi: } \int_2^4 [x^2] dx = \left[\frac{x^3}{3} + c \right]_{x=4} - \left[\frac{x^3}{3} + c \right]_{x=2} = \frac{64}{3} - \frac{8}{3} = \frac{56}{3}$$

Nota che la costante additiva scompare. Vedi la fig. 14.3.

Figura 14.3 Illustrazione del teorema fondamentale del calcolo integrale



Applicazione economica 1: dalla funzione MC alla funzione TC

Se $TC = f(q) + c$ (dove $f(q) = TVC =$ costi totali variabili e $c =$ costi fissi costs), allora per definizione $MC = f'(q)$ e dunque

$$\int [MC]dq = f(q) + c = TVC + \text{costi fissi}$$

(Nota che non possiamo determinare c solo dalle informazioni su MC)

TVC come area sotto la curva MC

Dalla Regola 14.3, $\int_a^b MCdq = [TVC + c]_{q=b} - [TVC + c]_{q=a}$

Perciò l'area sottesa dalla curva MC misura la variazione di TVC quando q cresce da $q = a$ a $q = b$ (vedi la fig. 14.3 e l'Esempio 14.15)

Applicazione economica 2: dalla funzione MR alla funzione TR

Se $TR = f(q)$, allora per definizione $MR = f'(q)$ e perciò

$$\int [MR]dq = f(q) + c = TR + c$$

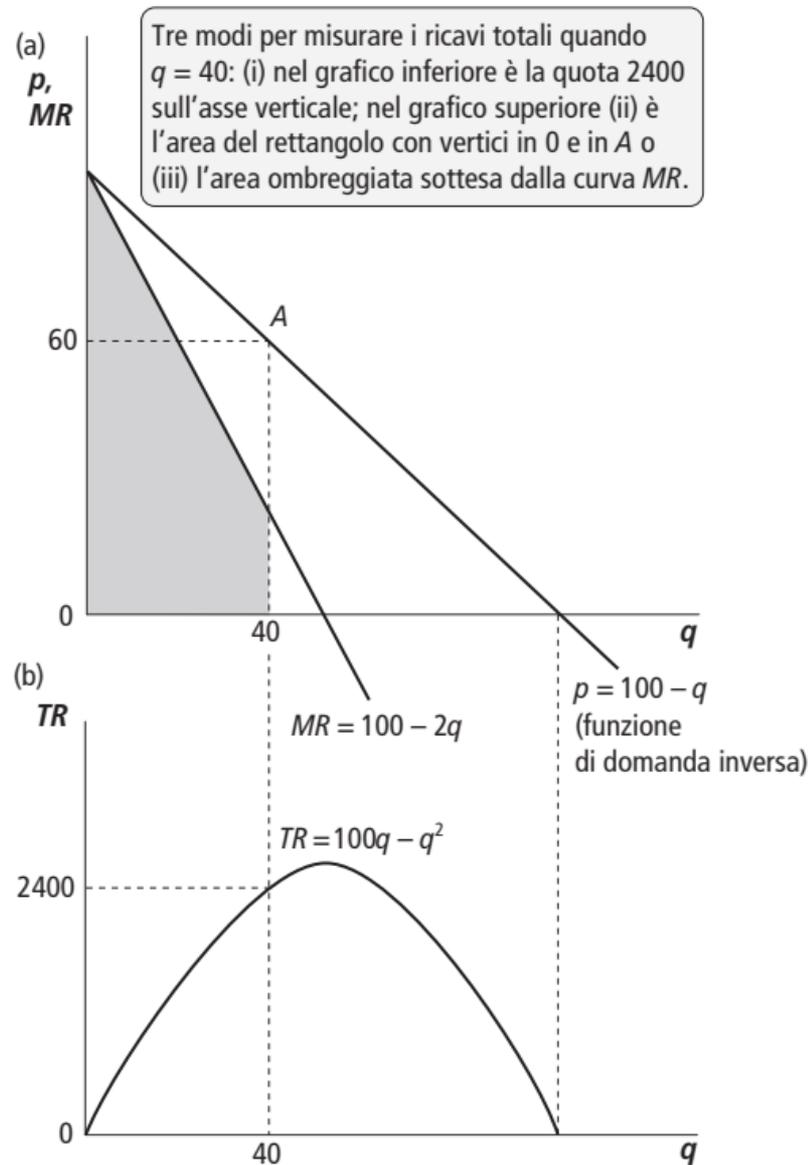
Tuttavia sappiamo che quando $q = 0$, $TR = 0$; perciò c deve valere zero. Dunque $\int [MR]dq = TR$

TR come area sotto la curva MR

Dalla Regola 14.3, $\int_a^b MR dq = [TR]_{q=b} - [TR]_{q=a}$

Perciò l'area sottesa dalla curva MR misura la variazione di TR quando q cresce da a a b . Se $a = 0$, l'area misura TR in base alle unità b vendute. (Esempio 14.12 e fig. 14.6)

Figura 14.6 Tre modi per misurare i ricavi totali



Applicazione economica 3: surplus dei consumatori

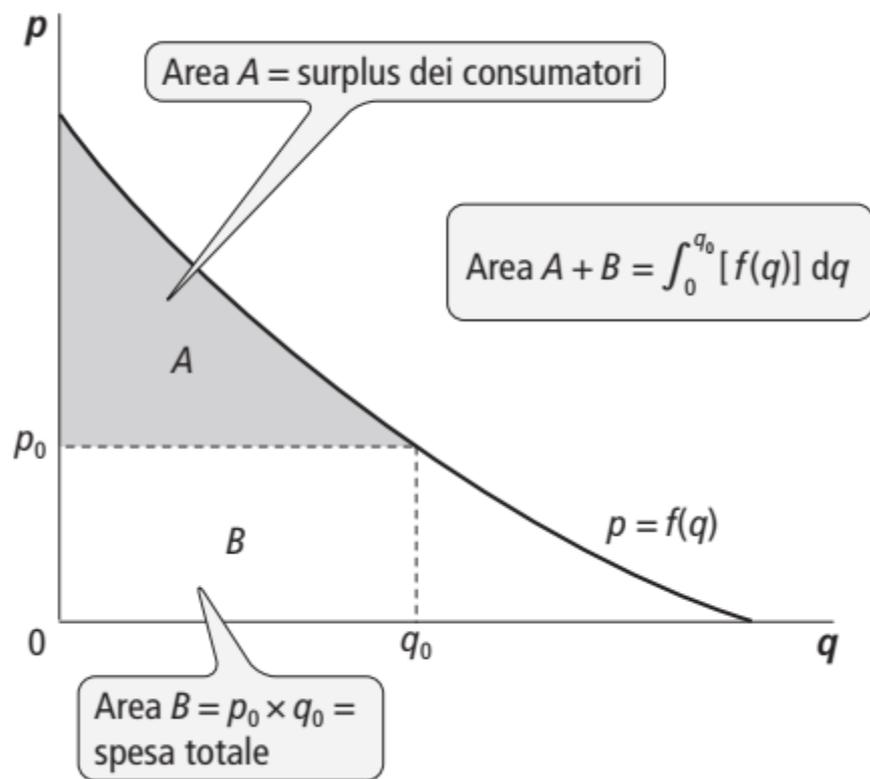
Osserva la fig. 14.7. Sotto certe ipotesi, $A + B$ è una misura quantitativa della soddisfazione totale dei consumatori legata al consumo di q_0 . Quest'area è detta valutazione dei consumatori. Se da essa sottraiamo la somma che i consumatori devono pagare, $p_0 q_0 = \text{area } B$, arriviamo a un beneficio netto, il surplus dei consumatori, rappresentato dall'area A .

Funzione di domanda inversa $p = f(q)$, area $A+B = \int_0^{q_0} f(q) dq$

Area $B = p_0 q_0$

Perciò il surplus dei consumatori (area A) è $\int_0^{q_0} f(q) dq - p_0 q_0$
(Regola 14.4)

Figura 14.7 Valutazione (A + B) e surplus (A) dei consumatori



Applicazione economica 4: surplus dei produttori

Osserva la fig. 14.8. In concorrenza perfetta, la curva $MC = 3q + 5$ è la funzione di offerta inversa. Abbiamo visto in precedenza che l'area sottesa dalla curva MC è TVC .

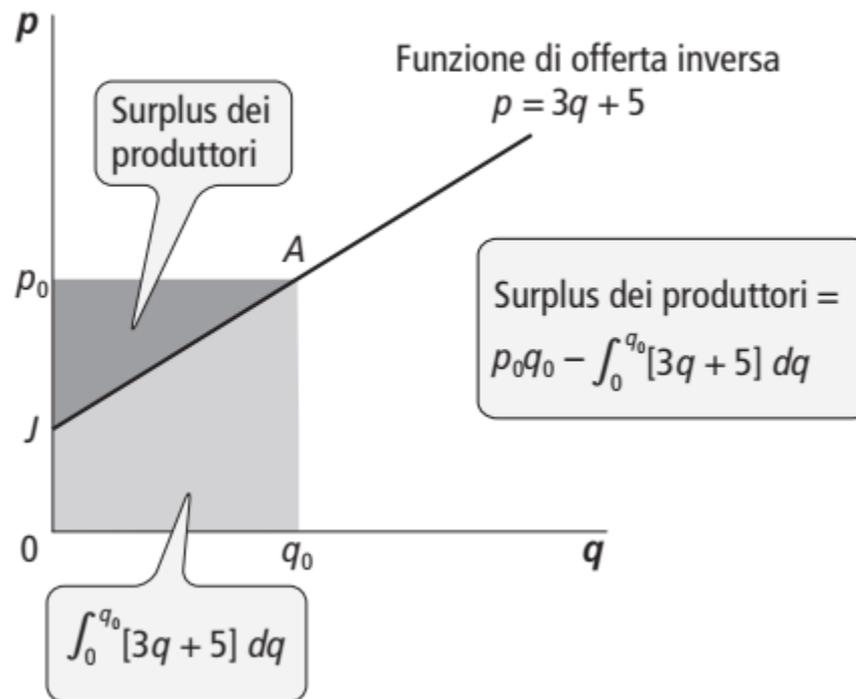
L'area ombreggiata scura è perciò $= \int_0^{q_0} [3q + 5]dq = TVC$ dell'output q_0 .

Inoltre, area scura + area chiara = $TR = p_0 q_0$

Dunque area chiara = surplus dei produttori = $p_0 q_0 - \int_0^{q_0} [3q + 5]dq$
(Regola 14.5)

Inoltre, surplus dei produttori = $TR - TVC =$ profitti + costi fissi. Esso fornisce la somma massima che i produttori sono disposti a pagare per il diritto di vendere la quantità q_0 al prezzo p_0 (quando l'alternativa è non vendere nulla).

Figura 14.8 Surplus dei produttori



Applicazione economica 5: VA di un flusso continuo

Nella Regola 12.7, il VA di un singolo pagamento di importo a con scadenza in data futura x_0 , attualizzato con continuità, è $y = ae^{-rx_0}$

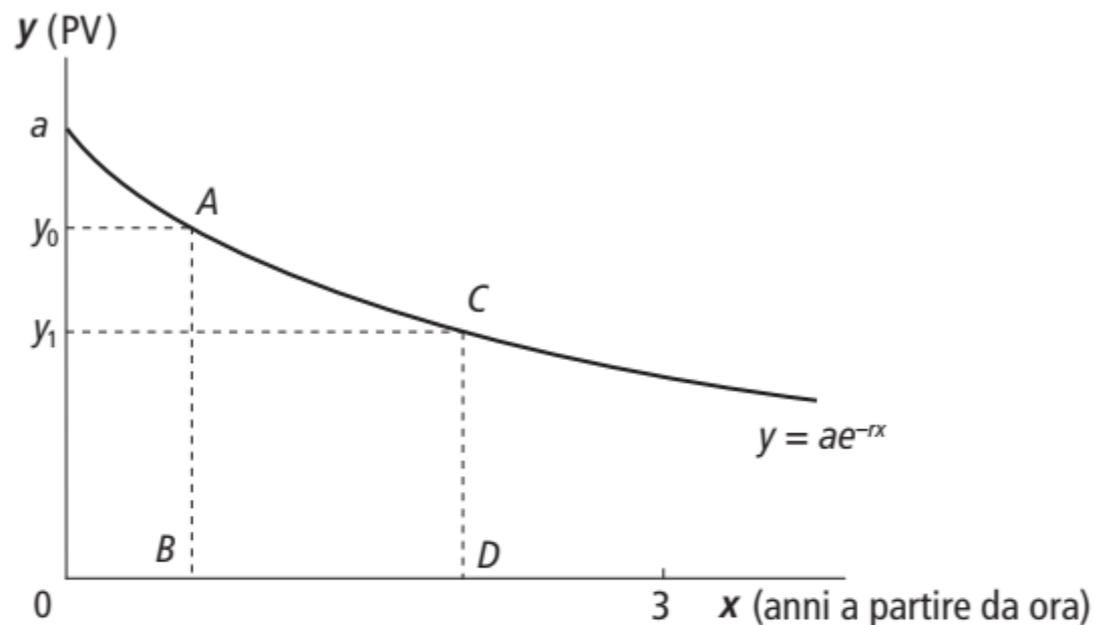
Si tratta della lunghezza di un segmento verticale sotto la curva $y = ae^{-rx}$ (fig. 14.9).

Se invece abbiamo un flusso continuo di pagamenti al tasso a annuo sino alla data x_0 , il loro VA è la somma di tutti i segmenti verticali, ossia l'area sottesa dalla curva.

Pertanto: $VA = \int_0^{x_0} [ae^{-rx}] dx$ (Regola 14.6)

Che si semplifica in $VA = \frac{a}{r} (1 - e^{-rx})$ (Regola 14.6a)

Figura 14.9 Valore attuale di un flusso continuo di entrate



La lunghezza del segmento verticale AB ($= y_0$) rappresenta il valore attuale di un singolo pagamento di a euro da ricevere a un tempo x_0 da oggi in regime di attualizzazione continua. La somma delle lunghezze di tutti i segmenti verticali simili (= area sottesa dalla curva) fra 0 e 3, misurata da $\int_0^3 [ae^{-rx}]dx$, rappresenta il valore attuale di un flusso continuo di entrate di a euro all'anno per 3 anni.