Corso di Laurea in Scienze Economiche L-33

Matematica per l'Economia
SECS-S/06 - 8 CFU

Prof. Massimiliano Ferrara

massimiliano.ferrara@unirc.it
massimiliano.ferrara@unibocconi.it

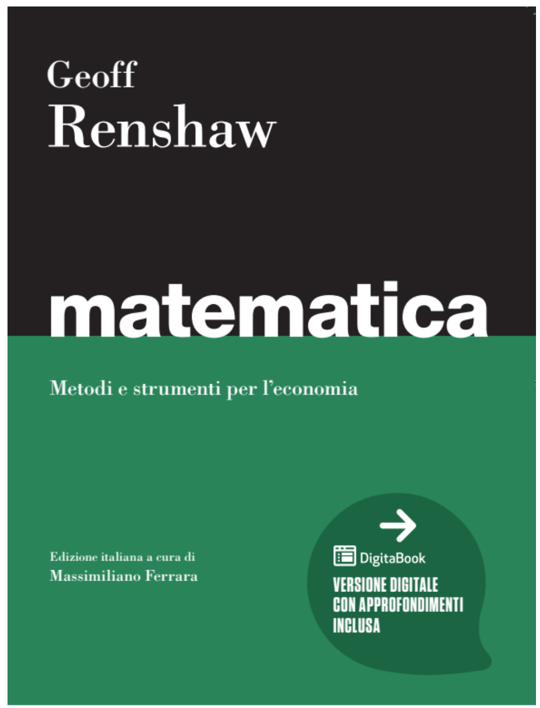
A.A. 2023/2024

Geoff Renshaw

Matematica. Metodi e strumenti per l'economia

Edizione italiana a cura di Massimiliano Ferrara

Capitolo 13 – Derivate delle funzioni esponenziali e logaritmiche e loro possibili applicazioni



Egea

Derivata della funzione esponenziale in base *e*

Enunciamo, senza dimostrare:

- Se $y = e^x$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = e^x$ (Regola 13.1)

Generalizzazione:

- Se $y = e^{f(x)}$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = e^{f(x)}f'(x)$ (Regola 13.2)

Esempio 1: $y = 10e^{x^2+3x} + 50$; $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 10e^{x^2+3x}(2x + 3)$

Esempio 2: $y = ae^{rx}$; $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = ae^{rx}(r) = rae^{rx}$

Derivata della funzione logaritmo in base *e*

Enunciamo, senza dimostrare:

- Se $y = \ln x$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}$ (Regola 13.3)

Generalizzazione:

- If $y = \ln f(x)$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{f'(x)}{f(x)}$ (Regola 13.4)

Esempio: $y = \ln(x^2 + 3x)$; $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2x+3}{x^2+3x}$

Tassi di crescita discreta e continua

Supponiamo che una variabile *y* sia legata al tempo, *x*, tramite una generica funzione $y = f(x)$

Crescita discreta su un periodo

x assume solo i valori 1, 2, 3,… (anni o altra unità temporale)

- Crescita assoluta dall'anno 0 all'anno 1: $\Delta y = y_1 - y_0$
- Tasso di crescita (= crescita per unità di tempo): $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \left(= \frac{y_1 - y_0}{1} \right)$
- Tasso di crescita proporzionale: $\frac{\frac{\Delta y}{\Delta x}}{y_0} = \frac{1}{y_0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \left(= \frac{y_1 - y_0}{y_0} \right)$

(Regola 13.6)

La Regola 13.6 si può ricavare anche dalla formula di crescita composta:

$$y = a(1+r)^x \quad \text{(Regola 10.4)}$$

Per la crescita su un periodo, $x = 1$, per cui $r = \frac{y}{a} - 1$

Nella Regola 13.6 abbiamo $y_1 = y$ e $y_0 = a$, perciò nella Regola 10.4

$$r = \frac{y}{a} - 1 = \frac{y-a}{a} = \frac{y_1 - y_0}{y_0} \quad \text{(come in Regola 13.6)}$$

Attenzione! La Regola 13.6 va usata solo per i calcoli sulla crescita su un periodo. Un errore comune è di calcolare, per esempio, una crescita di 10 anni con la formula $r = \frac{1}{10}\left(\frac{y_{10}-y_0}{y_0}\right)$

Questa è una **media aritmetica**. Essa assume una crescita **assoluta** costante. (Esempio 13.4)

Per periodi più lunghi va usata la Regola 10.4, che fornisce la **media geometrica** del tasso di crescita su più periodi. Essa assume una crescita **proporzionale** costante.

Crescita continua

Richiamiamo la Regola 13.6: la crescita proporzionale su 1 periodo è $\frac{1}{y_0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$

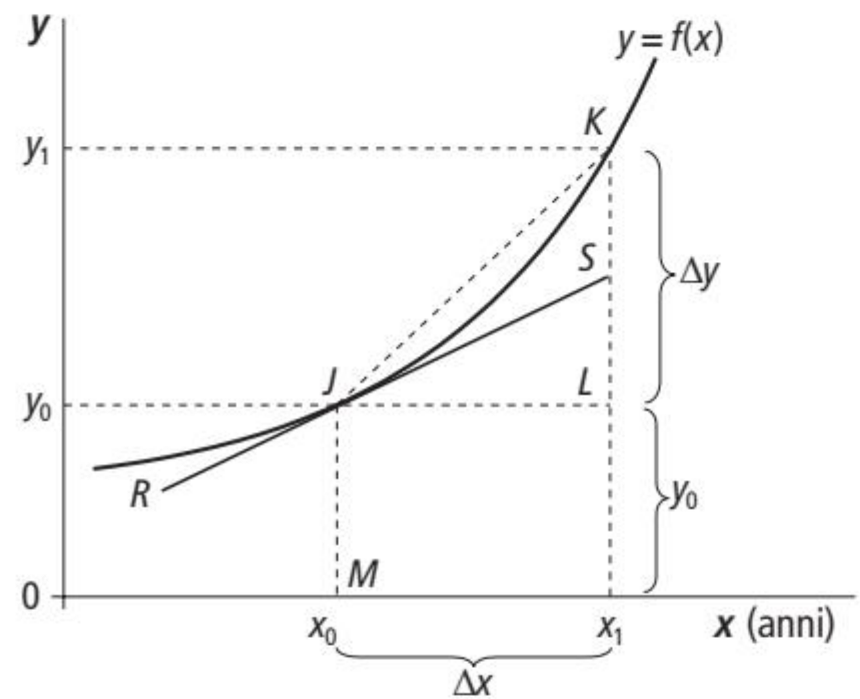
Supponiamo ora che *x* vari con continuità, cosicché $y = f(x)$ è una curva «liscia» anziché una funzione a gradino. Nella Regola 13.6 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ è adesso il rapporto incrementale e varia con il valore di Δ*x*. Manca perciò di precisione come misura della crescita. Per risolvere il problema:

Poniamo Δ*x* → 0. Allora $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ e la Regola 13.6 diventa:

Tasso di crescita proporzionale istantaneo: $\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ (Regola 13.7)

(trascuriamo i pedici su *y*) Vedi la fig.13.4.

Figura 13.4 Misura del tasso di crescita istantaneo di una variabile continua



$\frac{1}{y_0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ misura il tasso di variazione proporzionale medio (= tasso di crescita medio) fra x_0 e x_1. Questo tasso è uguale alla pendenza della corda *JK* divisa per la distanza *JM*.

$\frac{1}{y_0}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ misura il tasso di variazione proporzionale istantaneo (= tasso di crescita istantaneo) in x_0. Questo tasso è uguale alla pendenza della tangente *RS* divisa per la distanza *JM*.

Un caso speciale di crescita continua

La Regola 13.7 è valida per ogni funzione $y = f(x)$

Se y cresce a un tasso proporzionale costante, $y = f(x)$ diventa

$$y = ae^{rx} \quad \text{(Regola 12.2b)}$$

Dalla Regola 13.2, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = rae^{rx}$

Perciò nella Regola 13.7 abbiamo:

$$\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{y}rae^{rx} = r \quad \text{Tasso di crescita istantaneo} \quad \text{(Regola 13.8)}$$

Ancora sui grafici semi-logaritmici

Nel Capitolo 12 abbiamo visto che se una variabile cresce a un tasso (proporzionale) costante, il grafico che riporta ln *y* sull'asse verticale è lineare. Ora siamo in grado di dimostrarlo.

Premessa: (1) Se $A = B$, allora $\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}x}$

(2) Se $y = f(x)$, $\ln y = \ln f(x)$, dunque

$$\frac{\mathrm{d}(\ln y)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\ln f(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{f(x)} f'(x) = \frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$ (usando la Regola 13.4)

Ossia: $\dfrac{\mathrm{d}(\ln y)}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ (Regola 13.5)

Al primo membro abbiamo la pendenza su una scala logaritmica naturale, al secondo il tasso di crescita proporzionale istantaneo.

Un caso particolare importante

La Regola 13.5 è valida per qualsiasi funzione. Un caso particolare è quando *y* cresce a un tasso costante: $y = f(x)$ diventa $y = ae^{rx}$.

Dalle Regole 13.7 e 13.8 sappiamo che il tasso di crescita istantaneo per questa funzione è $\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = r$.

Passando ai logaritmi l'equazione $y = ae^{rx}$ otteniamo

$\ln y = \ln(ae^{rx}) = \ln a + rx$ da cui $\frac{\mathrm{d}(\ln y)}{\mathrm{d}x} = r$

Ciò conferma la Regola 13.5 in questo caso, e anche che la pendenza con la scala logaritmica sull'asse verticale dà il tasso di crescita.

Scala logaritmica ed elasticità

Finora abbiamo considerato la scala logaritmica solo per *y*, con *x* = tempo. Ora consideriamo i casi in cui su entrambi gli assi c'è una variabile economica. Esempio:

Funzione di domanda $q = Ap^{-\alpha}$, con derivata : $\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}p} = -\alpha A p^{-\alpha-1}$

L'elasticità della domanda è:

$$\frac{p}{q}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}p} = (-\alpha A p^{-\alpha-1})\frac{p}{q} = -\alpha$$

Passiamo ai logaritmi: $\ln q = \ln(Ap^{-\alpha}) = \ln A - \alpha \ln p$

La derivata è : $\frac{\mathrm{d}(\ln q)}{\mathrm{d}(\ln p)} = -\alpha$ (Regola 13.10)

Che cosa abbiamo appreso dalla slide precedente?

- Con scala logaritmica su **entrambi** gli assi la pendenza misura l’elasticità.
- L’esempio precedente è un caso specifico di una regola generale. La pendenza (= elasticità) non deve per forza essere costante.

NOTA: Se x = tempo, non ha senso usare una scala logaritmica sull’asse x!