Corso di Laurea in Scienze Economiche L-33

Matematica per l’Economia
SECS-S/06 - 8 CFU

Prof. Massimiliano Ferrara

massimiliano.ferrara@unirc.it
massimiliano.ferrara@unibocconi.it

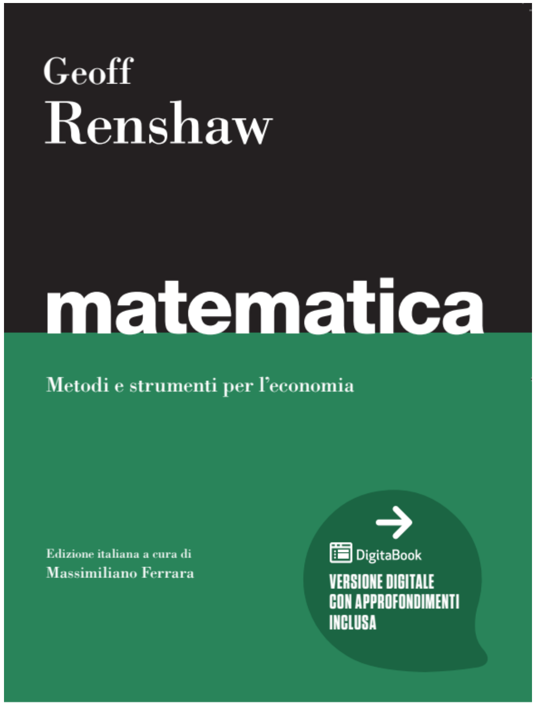
A.A. 2023/2024

Geoff Renshaw

Matematica. Metodi e strumenti per l’economia

Edizione italiana a cura di Massimiliano Ferrara

Capitolo 4 – Equazioni di secondo grado



Che cos'è un'espressione quadratica?

Guarda le figg. 4.1 - 4.3. L'area del rettangolo è:

$(a + b)(c + d)$ (dalla fig. 4.1)

$a(c + d) + b(c + d)$ (dalla fig. 4.2)

$ac + ad + bc + bd$ (dalla fig. 4.3)

(«Sviluppo», Regola 4.1)

Quando l'espressione contiene una variabile, *x*

$$(x + a)(x + b) = x(x + b) + a(x + b)$$

$$= x^2 + bx + ax + ab = x^2 + (a + b)x + ab$$

Quando *a* = *b*: $(x + a)(x + a) = x^2 + 2ax + a^2$

Figura 4.1

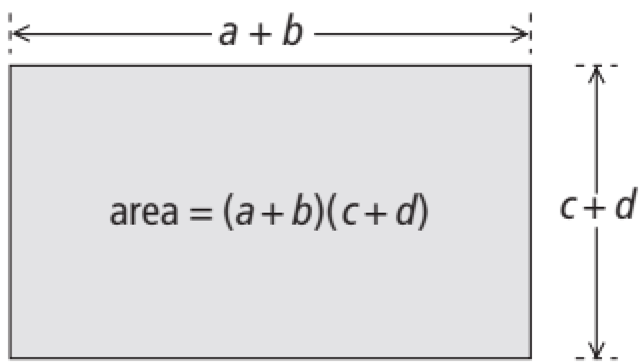


Figura 4.2

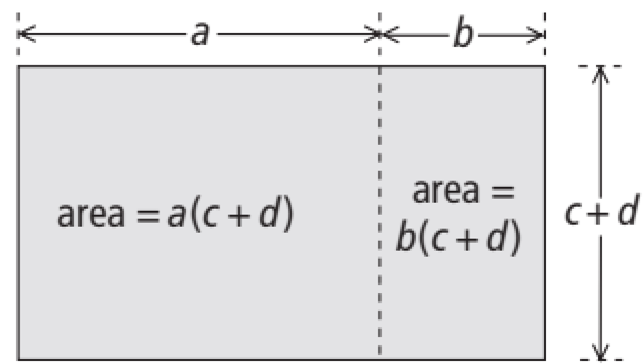
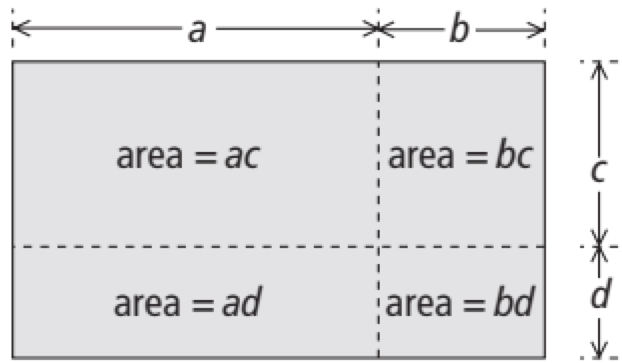


Figura 4.3



Fattorizzazione di un'espressione quadratica

Inverte lo «sviluppo» citato nella slide precedente.

Data $x^2 + (a + b)x + ab$, procediamo a ritroso per ottenere

$$(x + a)(x + b)$$

dove $(x + a)$ e $(x + b)$ sono i **fattori** della scomposizione.

Per determinare i fattori osserva che il secondo termine dell'espressione (di grado 1) ha coefficiente *a* + *b* e il terzo (il termine noto) è *ab*. Perciò, per esempio, data: $x^2 + 9x + 20$ cerchiamo 2 numeri *a* e *b* tali che *a* + *b* = 9 e *ab* = 20. Per tentativi otteniamo che i numeri cercati sono *a* = 5, *b* = 4.

La fattorizzazione è pertanto $(x + 5)(x + 4)$ (verifica sviluppando)

Equazioni quadratiche

Esempio: $x^2 + 9x + 20 = 0$, da risolvere trovando *x*.

Per quanto detto, sappiamo che $x^2 + 9x + 20 = (x + 5)(x + 4)$ (identità)

Essendo un'identità, risolvere $(x + 5)(x + 4) = 0$ è equivalente a risolvere $x^2 + 9x + 20 = 0$

Ora, $(x + 5)(x + 4) = 0$ è semplice da risolvere: $x = -5$ o $x = -4$

Le soluzioni di $x^2 + 9x + 20 = 0$ sono quindi $x = -5$ o $x = -4$

Formula risolutive per le equazioni quadratiche

Data una generica equazione di secondo grado:

$ax^2 + bx + c = 0$ (dove *a*, *b* e *c* sono delle costanti note), le soluzioni (dette radici) dell'equazione sono fornite dalla formula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ (Regola 4.4)

Esempio: $x^2 + 9x + 20 = 0$ In questo caso, *a* = 1, *b* = 9, *c* = 20

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \times 1 \times 20}}{2} = \frac{-9 \pm \sqrt{1}}{2} = -5 \text{ o } -4$$

Equazioni quadratiche con soluzione doppia

Nella formula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ (Regola 4.4), se $b^2 = 4ac$, allora

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad = \frac{-b}{2a}$$

Esempio: $x^2 + 6x + 9 = 0$ perciò $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2} = -3$

I fattori della scomposizione sono $(x + 3)(x + 3)$

Abbiamo dunque una sola soluzione di molteplicità «doppia».

Equazioni quadratiche impossibili

Nella formula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ (Regola 4.4),

se $b^2 < 4ac$, allora sotto radice quadrata c'è un valore negativo,

ma i numeri negativi non hanno radici di indice pari (reali)

Esempio: $x^2 + 2x + 2 = 0$; $x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - (4 \times 1 \times 2)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2}$

Funzioni quadratiche

Forma generale : $y = ax^2 + bx + c$;   Esempio: $y = x^2 + 5x + 6$

Due variabili ⇒   non esiste una soluzione unica per l'equazione.

Grafico della funzione quadratica

Fai riferimento alle figg. 4.5 - 4.6

Casi più semplici: $y = x^2$; $y = 3x^2$; $y = -x^2$

Le figg. 4.7 e 4.8 mostrano gli effetti dei parametri *b* e *c* sulla forma del grafico.

Figura 4.5 I grafici di $y = x^2$ e $y = 3x^2$

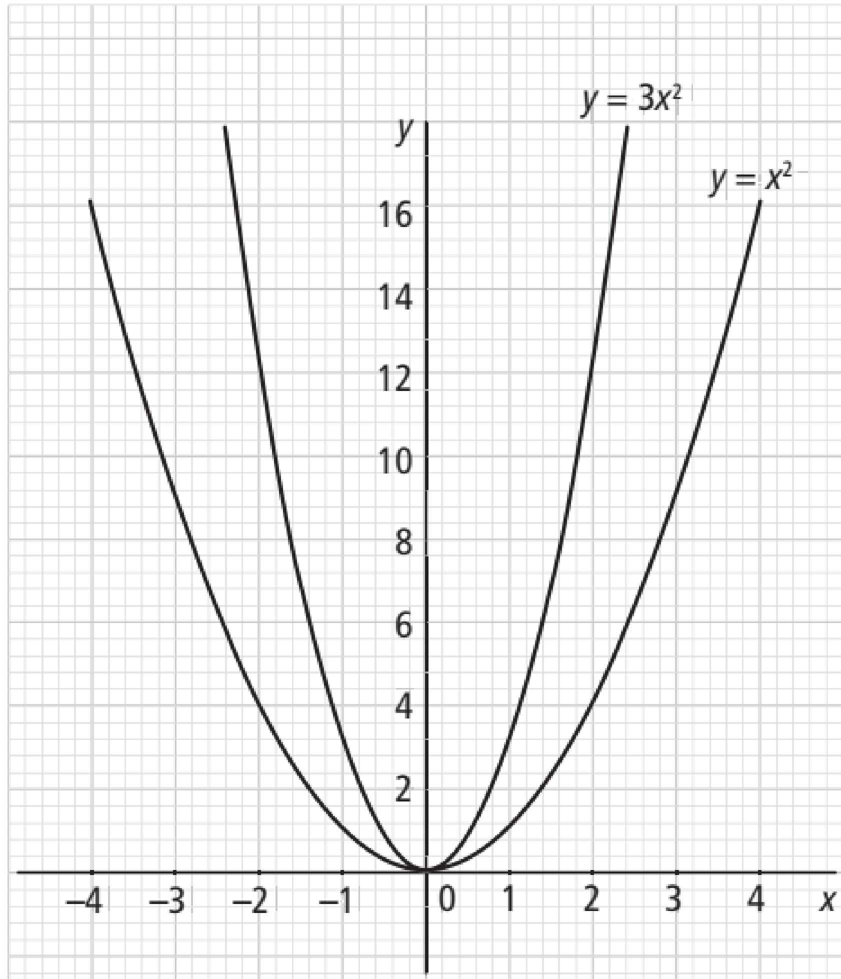


Figura 4.6 Il grafico di $y = -x^2$

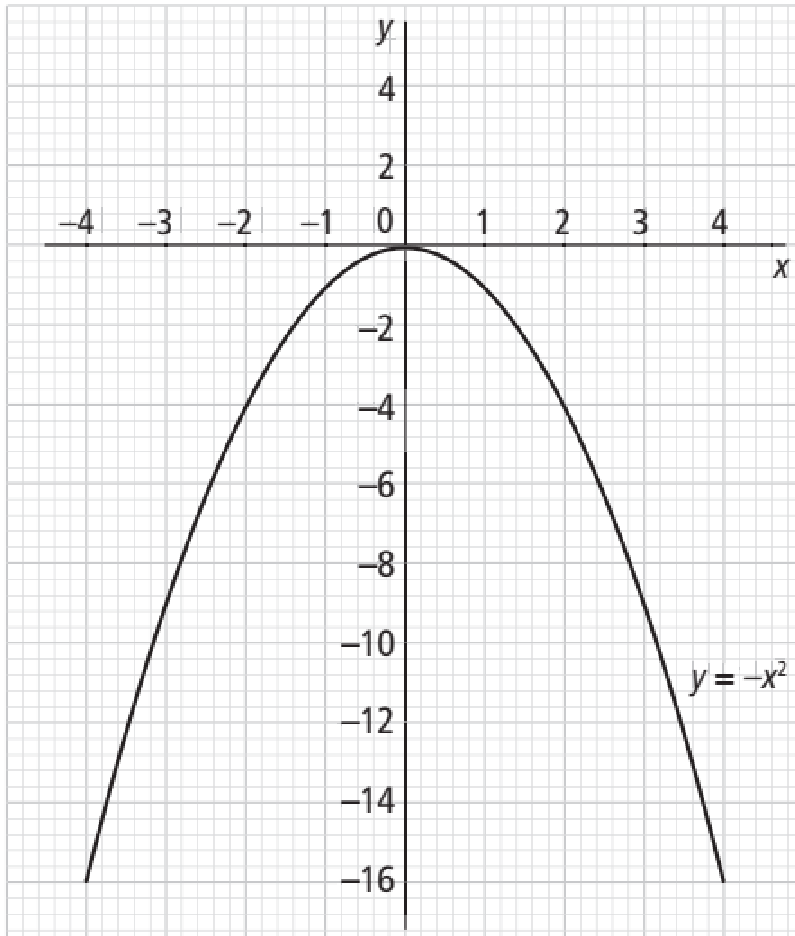


Figura 4.7 I grafici di $y = x^2 + 4$ e $y = x^2 - 4$

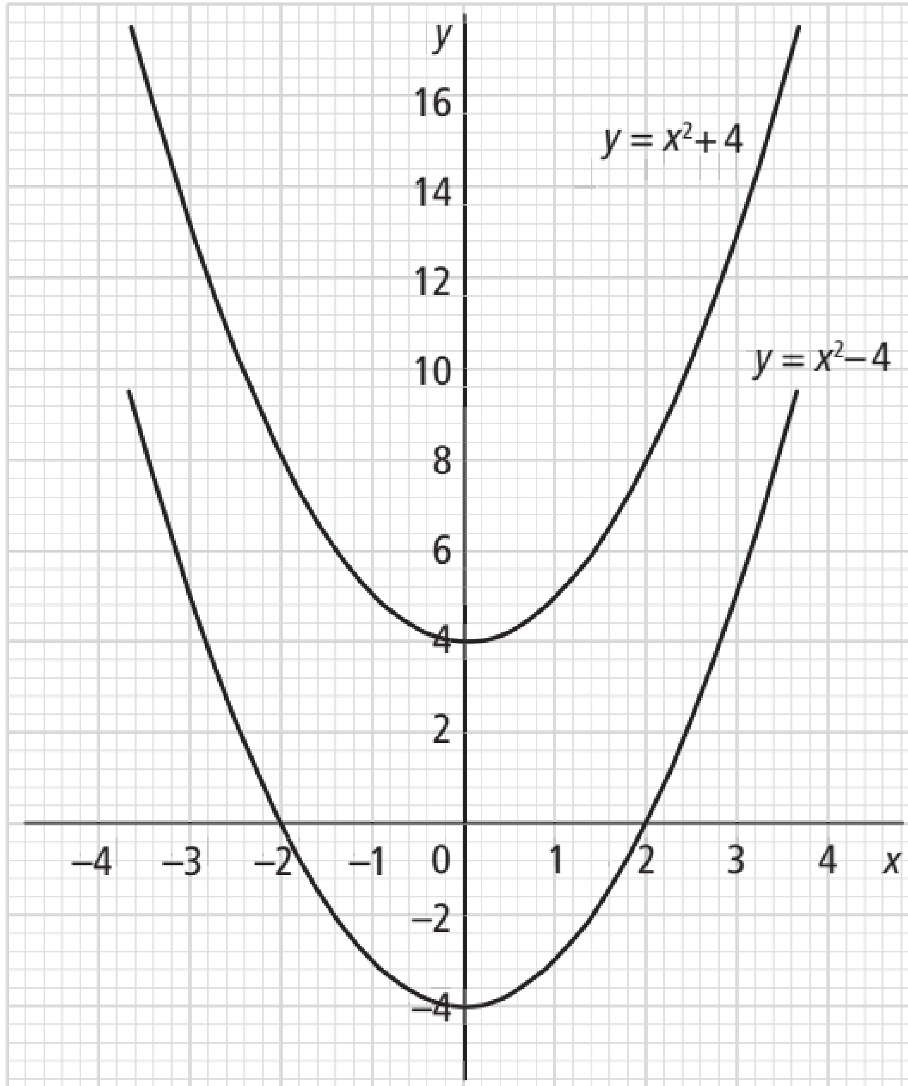
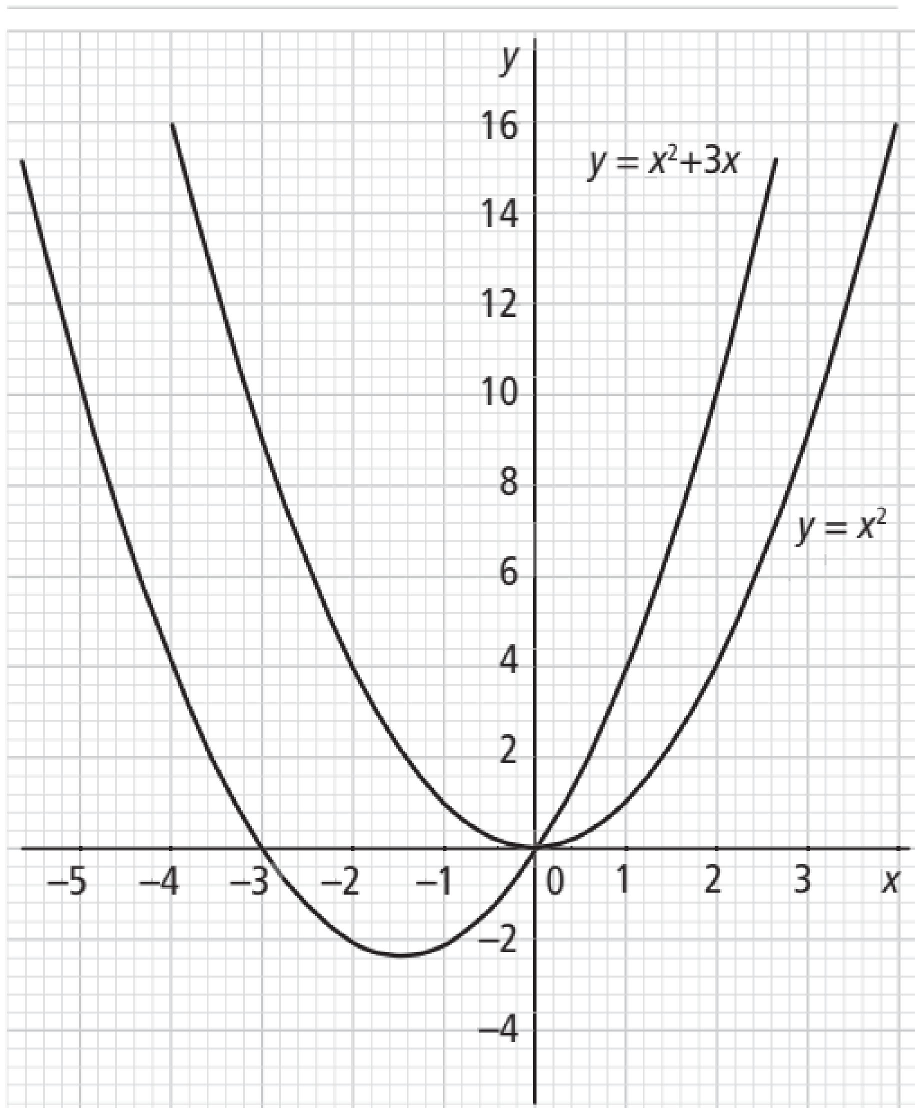


Figura 4.8 I grafici di $y = x^2$ e $y = x^2 + 3x$



Soluzione grafica delle equazioni quadratiche

In fig. 4.7, $y = x^2 - 4 = 0$ per x = 2 o −2.

Tali valori di x sono perciò soluzioni (radici) dell'equazione quadratica associata alla funzione, $x^2 - 4 = 0$.

Possiamo anche notare che $x^2 + 4 = 0$ non ha radici reali.

Sistemi in cui compaiono equazioni di secondo grado

Esempio: $\begin{cases} y = x^2 + 2x + 8 \\ y = 2x^2 + 3x + 2 \end{cases}$

Quali coppie di x e y soddisfano le due equazioni simultaneamente?

In riferimento alla fig. 4.13, le intersezioni sono soluzioni.

In riferimento alla fig. 4.14, le equazioni sono incompatibili.

Figura 4.13 Soluzione grafica del sistema $\begin{cases} y = 2x^2 + 3x + 2 \\ y = x^2 + 2x + 8 \end{cases}$

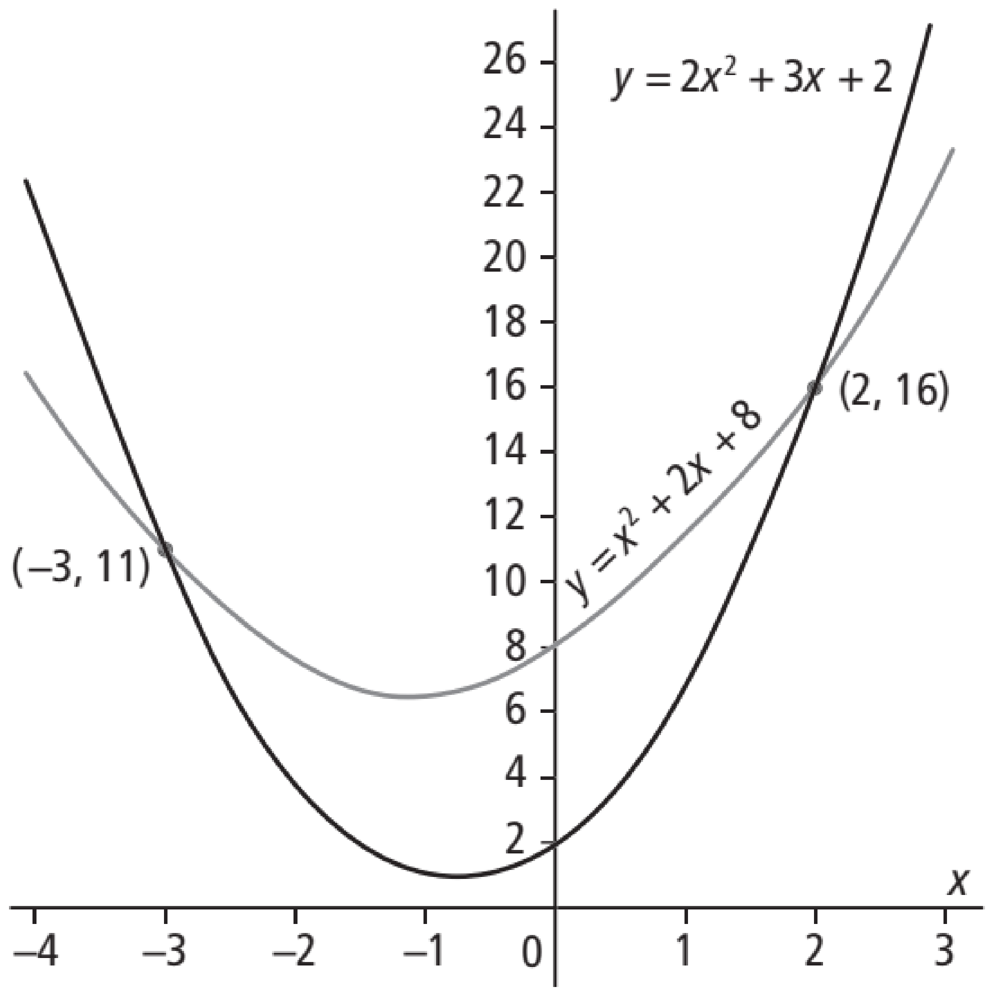
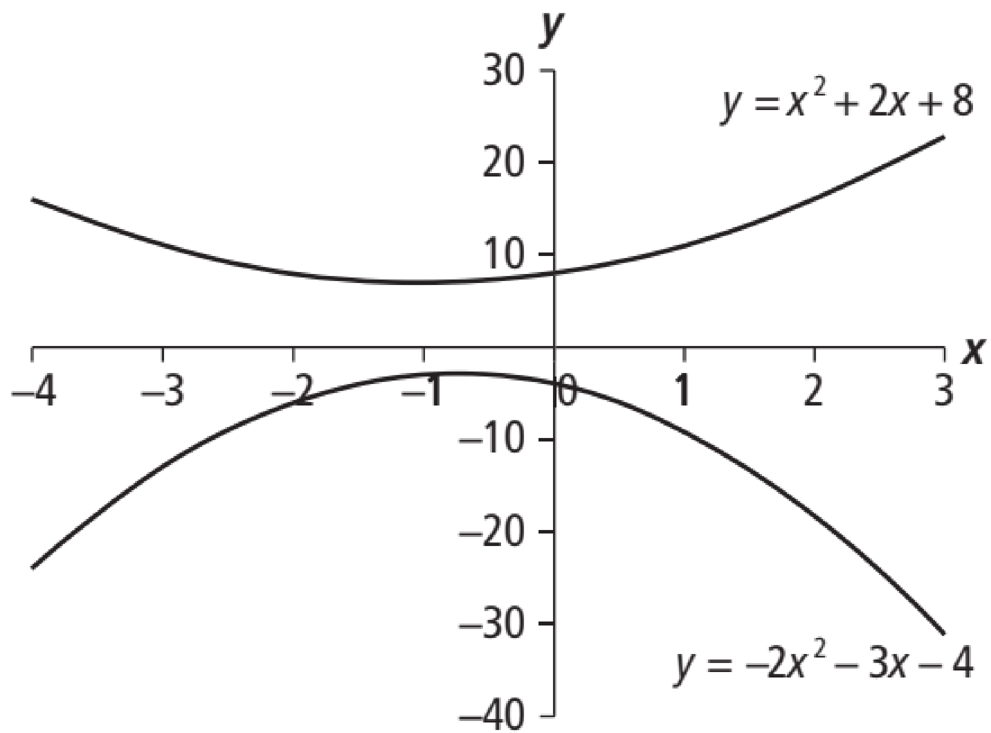


Figura 4.14 I grafici di $y = -2x^2 - 3x - 4$ e $y = x^2 + 2x + 8$



Poiché i due grafici non hanno intersezioni, il sistema formato dalle equazioni $y = x^2 + 2x + 8$ e $y = -2x^2 - 3x - 4$ non ha soluzioni (reali). Le equazioni sono incompatibili.

Applicazioni economiche
(1) Domanda e offerta; (2) costi e ricavi di un'impresa

1. La funzione di domanda o quella di offerta, o entrambe, possono essere quadratiche.

2. Costi e ricavi di un'impresa

È ragionevole supporre che la funzione di costo totale di breve periodo di un'impresa possa essere una funzione quadratica dell'output.

Esempio: $TC = 0{,}02q^2 + 1{,}5q + 100$ (fig. 4.17) (Perché questa forma?)

Inoltre, la funzione di ricavo totale di un monopolista può essere una funzione quadratica dell'output (quantità venduta).

Esempio: $TR = -0{,}125q^2 + 10q$ (fig. 4.18) (Perché questa forma?)

Figura 4.17 Funzioni di costo totale lineare e quadratica

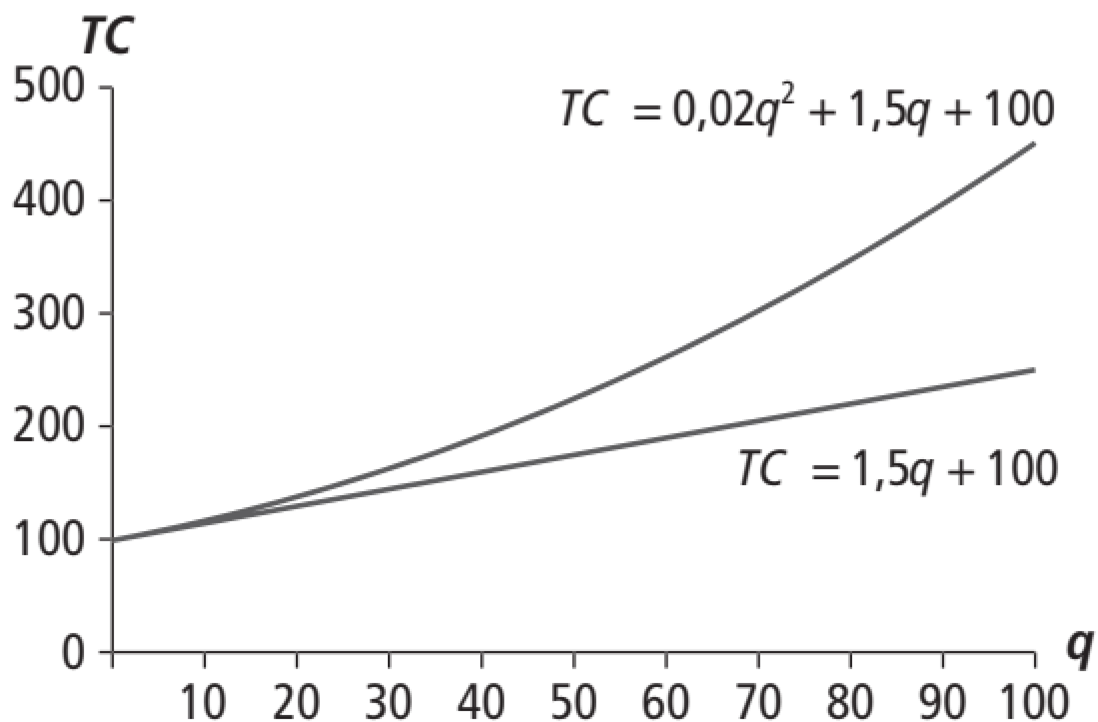


Figura 4.18 Una funzione di ricavo totale quadratica