Lezioni di Matematica Finanziaria

Massimiliano FERRARA

“Mediterranea” University of Reggio Calabria

SELEZIONE DI UN PORTAFOGLIO FINANZIARIO

TEORIA MATEMATICA DELLA SELEZIONE DI UN PORTAFOGLIO

Individuare le condizioni che un soggetto economico razionale deve soddisfare per "costruire" un portafoglio di prodotti finanziari con l'obiettivo (almeno in linea di principio) di minimizzare il rischio e/o massimizzare il risultato atteso).

$$\Downarrow$$

1° Step individuare delle ipotesi del modello

2° Step misurare nel modo più corretto possibile il rischio che grava sul portafoglio.

COME SI MISURA IL RENDIMENTO E IL RISCHIO DI UN TITOLO AZIONARIO

R_k = rendimento di un titolo (rischioso) *k-esimo*;

P_k^* = prezzo di mercato del titolo alla fine del periodo;

P_K = prezzo di mercato del titolo all'inizio del periodo,

D_k = totale dei dividendi corrisposti delle società che emette il titolo al possessore.

Abbiamo

$$R_k = \frac{P_k^* - P_k + D_k}{P_k}$$

$\left(P_k^* - P_k\right) =$ apprezzamento (+) o deprezzamento (-) del titolo in

$+$ termini di valore capitale (gain)

$\frac{D_k}{R_k} \Rightarrow$ rendimento del titolo *k-esimo*

N.B. = tuttavia la quantità R_k non è certa.

COME SI MISURA IL RENDIMENTO E IL RISCHIO DI UN TITOLO AZIONARIO

Ecco perché nella pratica finanziaria si considera come se fosse una variabile aleatoria.

Ipotizziamo che R_k vari temporalmente manifestandosi in *n* stati di natura (discreto) $R_k^{(i)}, \ldots\ldots, R_k^{(n)}$; ognuna di queste quantità rappresenta un possibile rendimento nell'*i-esimo* periodo (con $i = 1, \ldots\ldots, n$).

La condizione che si deve rispettare è

$$\sum_{i=1}^{n} p\left(R_k^{(i)}\right) = 1$$

Misure importanti che si possono determinare sono

1) **Rendimento atteso**

$$R\left(R_k\right) = \sum_{i=1}^{n} R_k^{(i)} \cdot p\left(R_k^{(i)}\right)$$

2) **Varianza del rendimento atteso**

$$\sigma_k^2 = \sum_{i=1}^{n} \left[R_k^i - E\left(R_k\right)\right]^2 \cdot p\left(R_k^i\right)$$

APPROCCIO MEDIA-VARIANZA IL CONTRIBUTO DI H. MARKOWITZ

Questo approccio affonda le sue radici nella teoria dell'utilità attesa, nelle "misure statistiche" media (o valore medio) e varianza e nel criterio di scelta omonimo. Alla base di questo approccio vi è l'ipotesi che le preferenze degli investitori varino in funzione del rischio e del rendimento del portafoglio e il decisore sia avverso al rischio; quindi l'obiettivo ultimo è sia la massimizzazione dei guadagni che la minimizzazione del rischio.

$\Downarrow$

Guadagno = rendimento atteso

Rischio = Varianza (o suoi derivati .... come scarto quadratico medio, semi-varianza etc.)

ESEMPIO NUMERICO 1

Sia $P_k = 101$ il prezzo al tempo $t = 0$ di un titolo rischio (azionario) il quale dopo un periodo n possiede un valore aleatorio descritto da una variabile aleatoria del tipo

$$P_k' = \begin{cases} 105 & 110 \\ \Downarrow & \Downarrow \\ 0,4 & 0,6 \end{cases}$$

tralasciando sic et simpliciter i dividendi, costruiamo la variabile aleatoria R_k corrispondente.

Soluzione

$$R_k = \begin{cases} \dfrac{105-101}{101} \\ \\ \dfrac{110-101}{101} \end{cases} = \begin{cases} 0,039604 & 0,4 \\ \\ 0,089109 & 0,6 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

variabili aleatorie cercate!!!

ESEMPIO NUMERICO 2

Sia $P_k = 200$ il solito prezzo di un generico titolo azionario. Il prezzo P'_k rilevato ad oggi. La varianza aleatoria che descrive la sua evoluzione finanziaria nel tempo è pari

$$P_k' = \begin{cases} 210 & 195 \\ \Downarrow & \Downarrow \\ 0,7 & 0,3 \end{cases}$$

calcoliamo il rendimento atteso e il rischio del titolo.

$$R_k = \begin{cases} \dfrac{210-200}{200} \\ \\ \dfrac{195-200}{200} \end{cases} = \begin{cases} +\ 0,05 \cdot 0,7 \\ \\ -\ 0,025 \cdot 0,3 \end{cases}$$

$$E\,(R_k) = 0,05 \cdot (0,7) + (-0,025) \cdot (0,3) = 0,0275$$

$$\sigma_k^2 = (0,05 - 0,0275)^2 \cdot 0,7 + (-0,025 - 0,0275)^2 \cdot 0,3 = 0,0011813$$

RENDIMENTO ATTESO DI UN PORTAFOGLIO

Consideriamo un investitore in possesso di una certa ricchezza W da "distribuire" in I attività finanziarie i cui rendimenti sono rappresentabili come variabili aleatorie R_1, R_2, ..., R_k,... ..., R_I. Al termine della operazione di investimento la ricchezza (al netto di oneri tributari e costi di transazione) sarà:

$$W' = W + \sum_{k=1}^{I} W_k \cdot R_k$$

dove W_k indica l'ammontare iniziale di ricchezza impegnato (investito) nella *k-esima* attività finanziaria. Considerando gli I titoli (in generale attività finanziarie) come infinitamente divisibili e possibili short sales (e cioè vendite allo scoperto), W_k può essere maggiore o minore o, purché si abbia

$$\sum_{k=1}^{I} W_k = W$$

ossia l'intera ricchezza W sia destinata per l'acquisto della *I-esima* attività.

RENDIMENTO ATTESO DI UN PORTAFOGLIO

Il rendimento R di portafoglio globale, di uno degli infiniti possibili portafogli ottenibili combinando le I attività, è dato da:

$$R_{port} = \frac{W' - W}{W}$$

ossia

$$R_{port} = \sum_{k=1}^{I} x_k \cdot = 1$$

RENDIMENTO ATTESO DI UN PORTAFOGLIO

Da qui si evince che il R_{port} realizzato al termine dell'operazione in un generico portafoglio risulta una variabile casuale somma delle singole variabili casuali R_k (con pesi x_k).

Naturalmente considerando la volatilità dei rendimenti è opportuno riferirsi al relativo valore medio $E(R_k)$.

Il rendimento atteso $E\ (R_{port})$ di un portafoglio risulta pari alla media aritmetica ponderata dei singoli $E\ (R_k)$ dati i "pesi" x_k ossia:

$$E\left(R_{port}\right) = E\left[\sum_{k=1}^{I} x_k \cdot R_k\right] = \sum_{k=1}^{I} x_k\ E\left(R_k\right) \quad (*)$$

Massimiliano FERRARA
“Mediterranea” University of Reggio Calabria

RENDIMENTO ATTESO DI UN PORTAFOGLIO

Per introdurre con maggiore semplicità le applicazioni informatiche è opportuno formalizzare $E(R_{port})$ in termini della notazione dell’algebra delle matrici.

$x_k \longrightarrow$ quota investite in certe attività finanziarie

$$x = [x_1, x_2, \ldots \ldots x_k, \ldots\ldots x_I,] \rightarrow \text{ vettore riga}$$

Con E il vettore dei rendimenti attesi, ossia:

$$E = [E(R_1), E(R_2), \ldots \ldots, E(R_k), \ldots\ldots E(R_I)]$$

La (*) può essere espressa nel seguente modo

$$E(R_{port}) = x_k \cdot E^T$$

dove T indica il vettore colonna trasposto del vettore riga originario.

ESEMPIO NUMERICO

Si considerino i seguenti rendimenti attesi

$$E\,(R_1) = 0{,}20$$

$$E\,(R_2) = 0{,}26$$

$$E\,(R_3) = 0{,}16$$

$$E\,(R_4) = 0{,}38$$

Si calcoli il $E\,(R_{port})$ sapendo che la ricchezza è così distribuita tra le $I = 4$ (attività).

$$x_1 = 0{,}20 \qquad x_2 = 0{,}25 \qquad x_3 = 0{,}15 \qquad x_1 = 0{,}50$$

$$E\,(Rport) = 0{,}20 \cdot (0{,}10) + 0{,}26 \cdot (0{,}25) + 16(0{,}15) + 0{,}38(0{,}50) = 0{,}299$$

COME VALUTARE IL RISCHIO DI UN PORTAFOGLIO

1ª considerazione:

Il rischio di un portafoglio (così come il rischio di ogni singolo titolo che forma il portafoglio) può essere espresso attraverso una variabile aleatoria (così come abbiamo visto per il rendimento atteso), ma nella pratica finanziaria questo procedimento non è seguito.

COME VALUTARE IL RISCHIO DI UN PORTAFOGLIO

2ª Considerazione

Tra il rischio di un portafoglio e le diverse tipologie di rischio che specificatamente gravano sulle attività che lo compongono, esiste uno stretto legame.

$$\Downarrow$$

Partendo da quest'ultima considerazione sarebbe opportuno valutare se esiste o meno una **correlazione** tra i rendimenti dei titoli stessi.

In statistica matematica, al fine di misurare la propensione di due serie di valori a muoversi assieme (esempio due variabili aleatorie) si calcola la cosiddetta **covarianza**.

Siano X e Y due generiche variabili aleatorie e σ la deviazione standard (o scarto quadratico medio); avremo che

$$Cov(X,Y) = \sigma_x \cdot \sigma_y \cdot Cc(X,Y)$$

rappresenta la covarianza.

La quantità *Cc (X,Y)* indica il **coefficiente di correlazione**, il quale indica il grado di relazione esistente fra due variabili.

Vedremo di lì a poco come si perviene alla sua determinazione.

In finanza matematica come misura della correlazione tra i rendimenti delle attività che compongono un generico portafoglio si assume una definizione di covarianza tra il rendimento del titolo *k-esimo* e del titolo *j-esimo*, del tipo:

$$\sigma_{ky} = E\left[\left(R_k - E\left(R_k\right)\right)\cdot\left(R_j - E\left(R_j\right)\right)\right]$$

La covarianza sarà positiva se vi è qualche probabilità che R_k e R_j siano contemporaneamente superiori o inferiori rispetto ai loro valori attesi.

$$\Downarrow$$

A questo punto determiniamo il coefficiente di correlazione (o indice di correlazione.

La costruzione della frontiera efficiente

LA COSTRUZIONE DELLA FRONTIERA EFFICIENTE

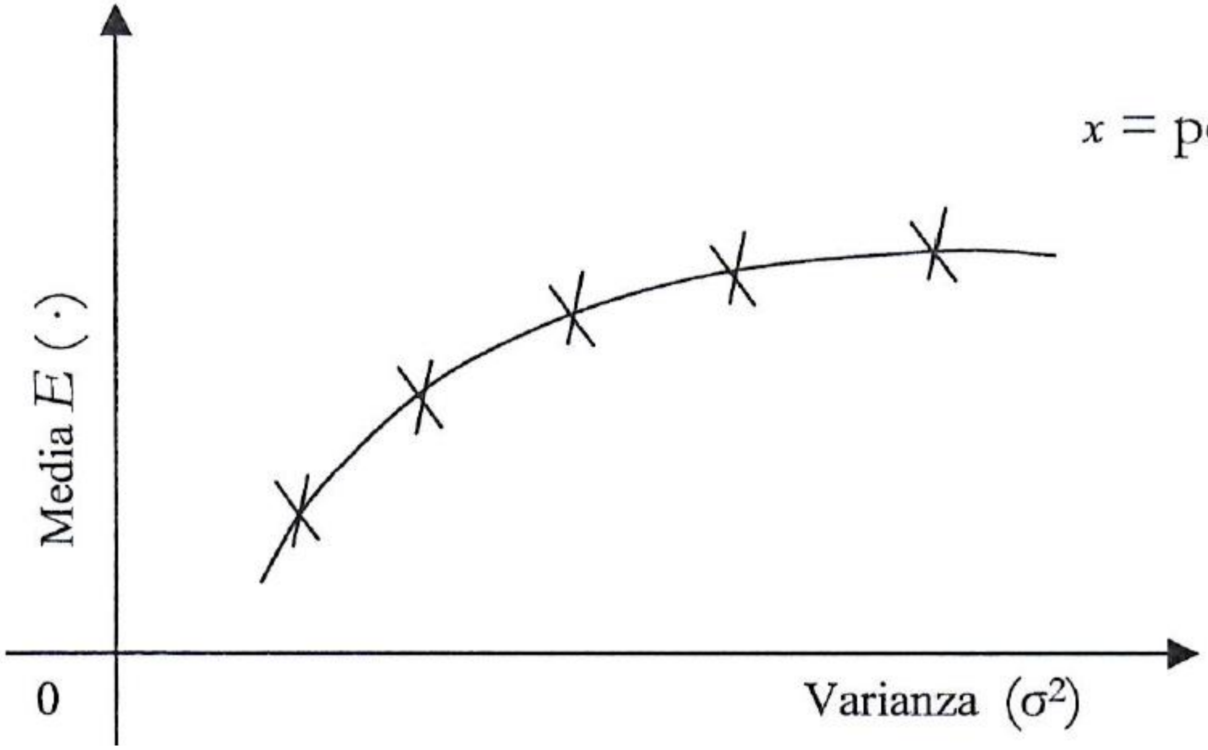
La costruzione della frontiera efficiente, per il caso generico di un portafoglio composto da I attività finanziarie, avverrà scegliendo per ogni livello di rendimento, il portafoglio dotato di **minimo** rischio, o parimenti scegliendo in corrispondenza di ciascun livello di rischio del portafoglio dotato di **massimo** rendimento.

DUE PROBLEMI DI OTTIMIZZAZIONE (NON LINEARE)

Minimizzare il rischio	Massimizzare il rendimento attivo
Min σ^2_{port} S.V. $\sum_{k=1}^{I} x_k = 1$ $E\left(R_{port}\right) = \tilde{R}$	Max $E\ (R_{port})$ S.V. $\sum_{k=1}^{I} x_k = 1$ $\sigma^2_{port} = \tilde{\sigma}^2$

COSTRUZIONE DELLA FRONTIERA EFFICIENTE

Quindi determinati rischio e rendimento atteso in relazione ad ogni portafoglio tra gli infiniti possibili (combinando gli I titoli), è possibile riportare su un piano cartesiano



ogni possibile combinazione (x) di portafoglio (o insieme delle opportunità di portafoglio).

COSTRUZIONE DELLA FRONTIERA EFFICIENTE

Una volta individuato questo insieme, il problema della "costruzione di un portafoglio ottimo" si risolve in tre momenti.

1. determinazione della frontiera di portafogli efficienti.
2. individuazione delle curve d'indifferenza dell'investitore.
3. individuazione del portafoglio ottimale.

Abbiamo visto, quindi, come Rendimento atteso e varianza di un portafoglio sono collegati alle caratteristiche di rischio e rendimento delle attività che lo compongono.

⇓

Ma se le caratteristiche di rischio/rendimento sono date (imposte dal mercato), al contrario la composizione del portafoglio dipende dalle scelte dell'investitore.

COSTRUZIONE DELLA FRONTIERA EFFICIENTE

$$\Downarrow$$

Il portafoglio ottimo risulta quindi dalla individuazione della ripartizione $\left(x_1^*, \ldots, x_k^*, \ldots, x_I^*\right)$ della ricchezza W che porta l'investitore alla combinazione rischio/rendimento **ottimale** (fra gli infiniti possibili) in grado di *massimizzare la sua utilità* (nel senso di soddisfazione economica).

COSTRUZIONE DELLA FRONTIERA EFFICIENTE

Una misura alternativa è costituita dall'indice di *correlazione*, ossia:

$$\rho_{kj} = \frac{\sigma_{kj}}{\sigma_k \cdot \sigma_j}$$

Esso può assumere i seguenti valori

0 = indica che la covarianza dei rendimenti è nulla (rendimenti non correlati);

1 =indica una correlazione positiva $(\sigma_{kj} > 0)$ ossia i rendimenti dei titoli si muovono nella stessa direzione;

2 = indica che i rendimenti sono negativamente correlati.

COSTRUZIONE DELLA FRONTIERA EFFICIENTE

La varianza del rendimento di un portafoglio, σ^2_{port} è rappresentabile come la varianza di una variabile aleatoria somma delle singole variabili aleatorie R_k con "pesi" le singole quote x_k e x_j

$$\sigma^2_{port} = \sum_{k=1}^{I} \sum_{j=1}^{I} x_k \, x_j \cdot \sigma_{kj}$$

ponendo per convenzione $\sigma_{kk} = \sigma^2_k$ avremo

$$\sigma^2_{port} = \sum_{k=1}^{I} x_k^2 \, \sigma_k^2 + \sum_{k=1}^{j} \sum_{j=1}^{j} x_k \, x_j \, \sigma_{kj}$$

con $k > 0 < j$.

Massimiliano FERRARA
"Mediterranea" University of Reggio Calabria

COSTRUZIONE DELLA FRONTIERA EFFICIENTE

Indicando con V la matrice delle covarianze

$$V = \begin{Vmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1j} & \cdots & \sigma_{1I} \\ \cdots & & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \sigma_{k1} & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \cdots & & & & & \\ \sigma_{I1} & \sigma_{I2} & \cdots & \cdots & \cdots & \sigma_I^2 \end{Vmatrix}$$

La formula della varianza di portafoglio può essere scritta con

$$\sigma_{port}^2 = x \cdot V\ x^T$$

Quindi il rischio (totale) di un portafoglio dipende **non solo** dal rischio **relativo** ad ogni singolo titolo; un contributo rilevante deve essere attribuito dall'analista finanziario alla correlazione tra i rendimenti.

ESEMPIO NUMERICO

Consideriamo due titoli azionari che danno vita alla seguente matrice

$$V = \begin{Vmatrix} 0.0032 & 0.0020 \\ 0.0020 & 0.0050 \end{Vmatrix}_{(2\ x\ 2)}$$

Si determini il rischio globale di portafoglio avente la seguente composizione.

$$x_1 \text{ (azioni energetiche)} = 0.80$$

$$x_2 \text{ (azioni tecnologiche)} = 0.20$$

ESEMPIO NUMERICO

Soluzione

La varianza sarà:

$$\sigma^2_{port} = 0.80^2 \cdot 0.0032 + 0,20^2 \cdot 0.0050 + 2 \cdot 0.80 \cdot 0.20 \cdot 0.0020 = 0.001288$$

$$\sigma^2_{port} = [0,80 \quad 0,20]_{(1x2)} \cdot \begin{bmatrix} 0.0032 & 0.0020 \\ 0.0020 & 0.0050 \end{bmatrix}_{(2x2)} \cdot \begin{bmatrix} 0,80 \\ 0.20 \end{bmatrix}_{(2x1)} = 0.001288$$

Obiettivo dell’analista finanziario rimane la determinazione della frontiera efficiente. Essa si determina risolvendo (con metodi analitici, grafici e/o algoritmici) i seguenti problemi di programmazione non lineare.

$$\begin{cases} min\ \sigma_p^2 \\ s.v \\ \sum_{k=1}^{I} x_k = 1 \\ E(R_p) = \tilde{R} \end{cases} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{cases} max\ E(R_p) \\ s.v \\ \sum_{k=1}^{I} x_k = 1 \\ \sigma_p^2 = \tilde{\sigma} \end{cases}$$

P. Manca ha dimostrato (1993) come la frontiera efficiente rappresentata sul piano $\sigma_p^2 - E(R_p)$ è un ramo di parabola (fig. 19 mentre è un ramo di iperbole se graficizzata su $\sigma_p^2 - E(R_p)$ (vedi fig. 2).

Fig. 1

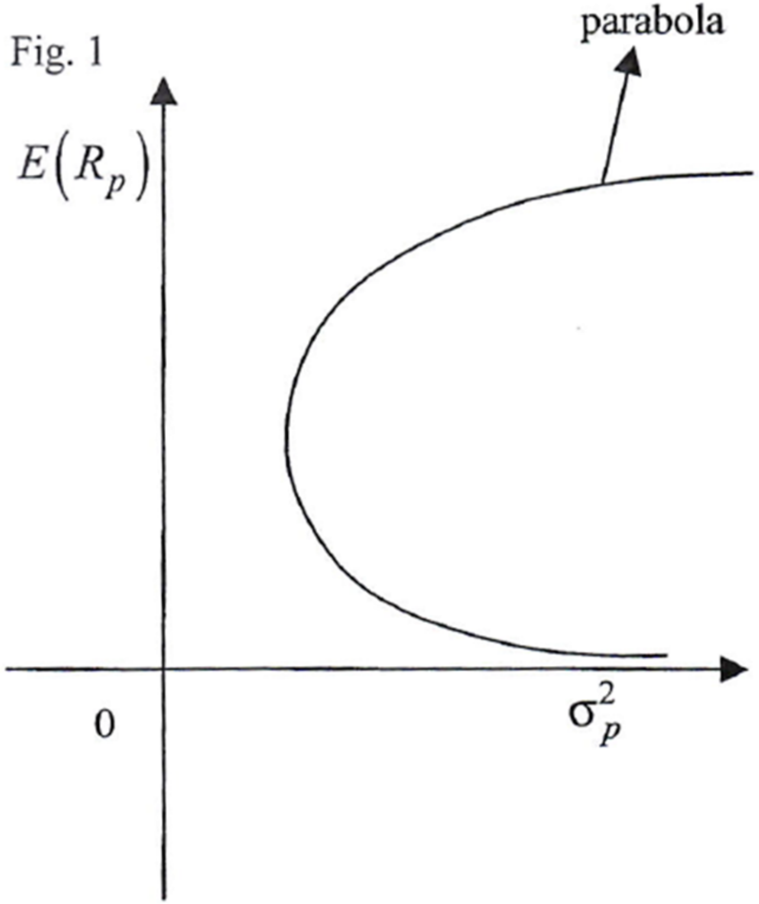
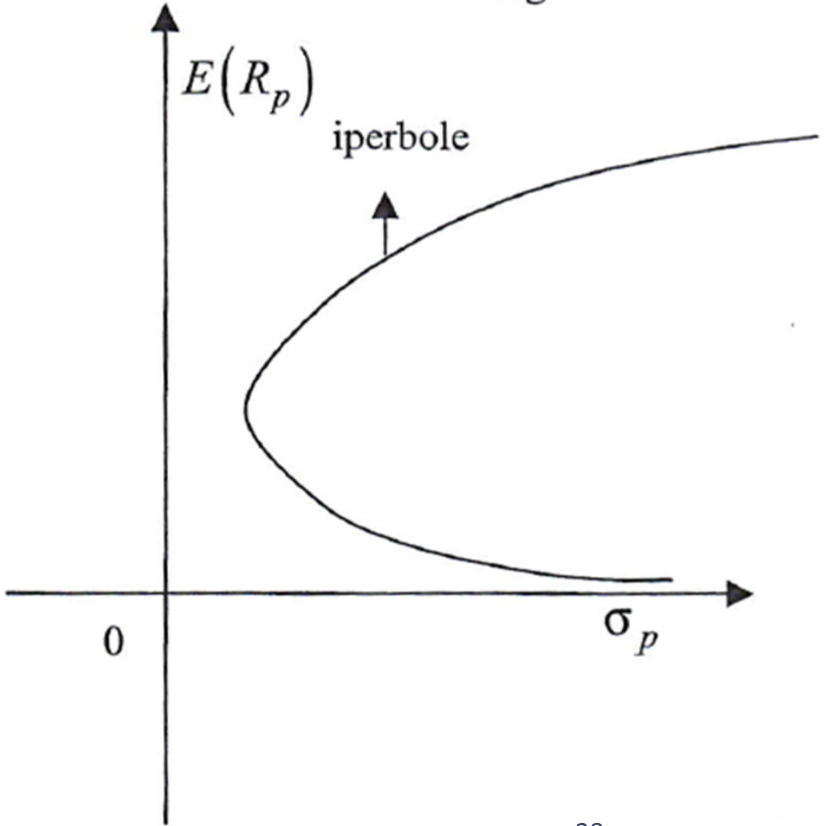


Fig. 2



METODO ANALITICO DEI MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE – ESEMPIO NUMERICO

Abbiamo tre titoli rischiosi per i quali si ha la seguente matrice V (var/cov).

$$V = \begin{bmatrix} 64 & -30 & -20 \\ -30 & 102 & 40 \\ -20 & 40 & 200 \end{bmatrix}$$

con i seguenti $E(R)$

$$E(R_1) = 20 \qquad E(R_2) = 26 \qquad E(R_3) = 29$$

Si calcoli il portafoglio a minimo rischio ed il suo rendiconto atteso

METODO ANALITICO DEI MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE – ESEMPIO NUMERICO

Soluzione

$$L(x_1, x_2, x_3, \lambda) = \underbrace{\sigma^2_{port}}_{\text{funz. obiettivo}} + \lambda \cdot \underbrace{(x_1 + x_2 + x_3 - 1)}_{\text{funzione vincolo}}$$

dove

$$\sigma^2_{port} = x_1^2 \cdot 64 + x_2^2 \cdot 102 + x_3^2 \cdot 200 + 2 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot (-30)$$
$$+ 2 \cdot x_1 \cdot x_3 (-20) + 2 \cdot x_2 \cdot x_3 (40).$$

METODO ANALITICO DEI MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE – ESEMPIO NUMERICO

Calcolando e azzerando le derivate prime della Lagrangiana abbiamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} -128\,x_1 - 60\,x_2 - 40\,x_3 + \lambda = 0 \\ -60\,x_1 + 204\,x_2 + 80\,x_2 + \lambda = 0 \\ -40\,x_1 + 80\,x_2 + 400\,x_3 + \lambda = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

si risolve il sistema lineare ottenendo la soluzione

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}5522 \\ x_2 = 0{,}3476 \\ x_3 = 0{,}1002 \\ \lambda = 45{,}80 \end{cases}$$

Il rendimento percentuale atteso del portafoglio a rischio minimo sarà il seguente: $E\left(R_{port}\right) = x_1 \cdot E(R_1) + x_2\,E(R_2) + x_3 \cdot E(R_3) =$

$$= 0{,}5522 \cdot 20 + {,}03476 \cdot 26 + 0{,}1002 \cdot 29 = 22{,}99$$

LA SELEZIONE DEL PORTAFOGLIO OTTIMO

Dati la frontiera efficiente e la famiglia delle curve d’indifferenza, il criterio delle massimizzazione dell’utilità condurrà a preferire il portafoglio il cui $E(R_{port})$ e la σ^2_{port} si trovano sulle curve d’indifferenza “più elevata”. Tale portafoglio viene individuato dal punto di tangenza tra la frontiera efficiente e le curve d’indifferenza.

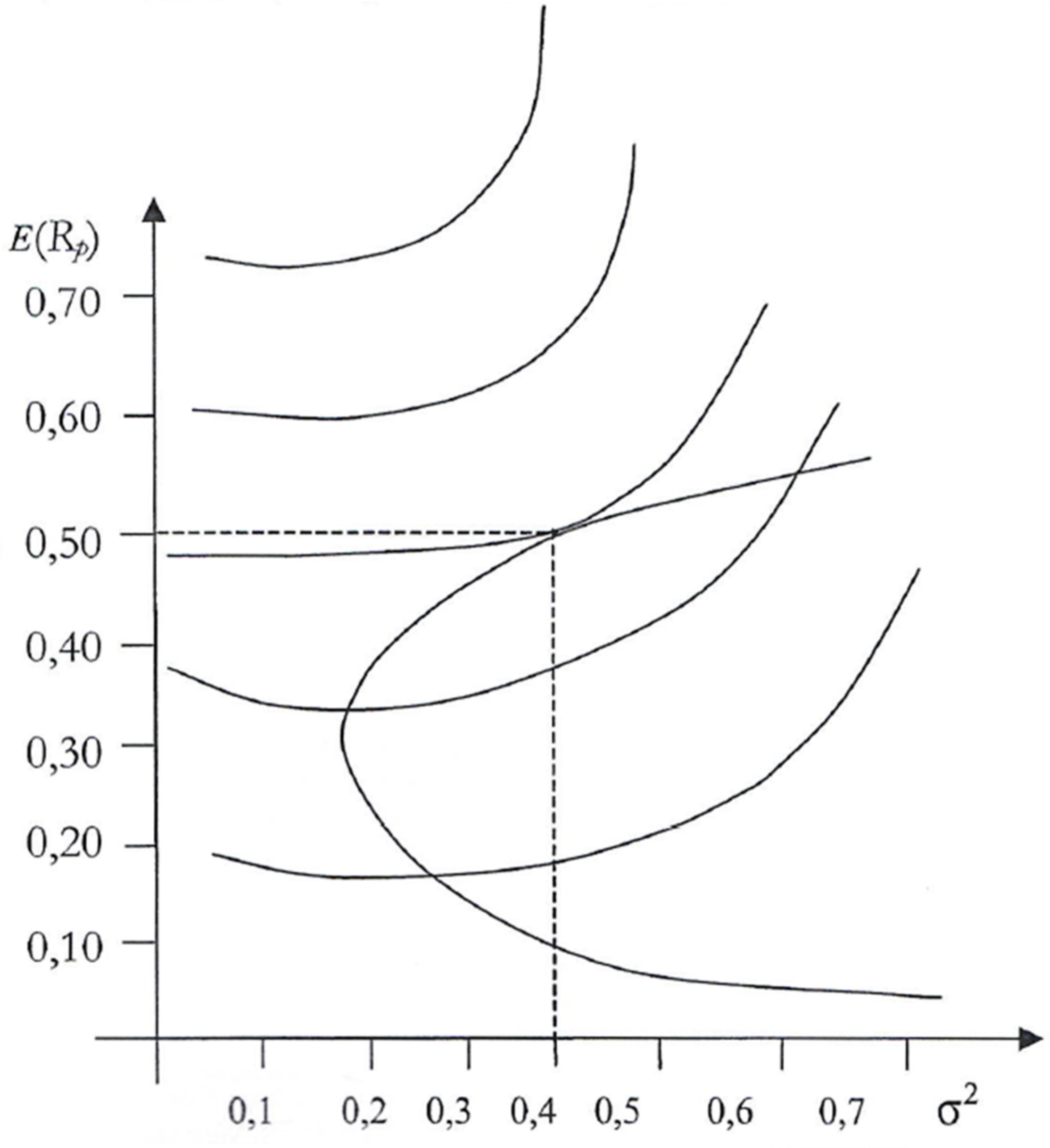
Il portafoglio ottimo (che è “unico” poiché la frontiera efficiente è concava e le curve d’indifferenza sono convesse) è quel portafoglio che verifica le seguenti uguaglianze:

$$s\left(E\left(R_{port}\right), \sigma^2_{port}\right) = t\left(E\left(R_{port}\right), \sigma^2_{prot}\right)$$

LA SELEZIONE DEL PORTAFOGLIO OTTIMO

$s(\cdot)$= saggio marginale di sostituzione tra $E(\cdot)$ e σ

$t(\cdot)$= saggio marginale di trasformazione



Massimiliano FERRARA
"Mediterranea" University of Reggio Calabria

LA SCELTA TRA DUE TITOLI RISCHIOSI

Abbiamo a disposizione due titoli rischiosi (tit. 1 e tit. 2). In questo contesto di analisi avremo che

$$E(Rport) = x_1 \cdot E(R_1) + x_2 \cdot E(R_2)$$

$$\sigma^2 \text{port} = x_1^2 \cdot \sigma_1^2 + x_2^2 \cdot \sigma_2^2 + 2x_1 \cdot x_2 \cdot p_{12} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \infty$$

LA SCELTA TRA DUE TITOLI RISCHIOSI

Il portafoglio con minimo rischio si ottiene calcolando la derivata prima di σ^2_{prot} rispetto x_1, si pone uguale a 0 dopodiché avendosi $x_1 + x_2 = 1$ avremo $x_1 = 1 - x_1$. Da qui si avrà:

$$\sigma^2_{port} = x_1^2 \cdot \sigma_1^2 + x_2^2 (1 - x_1)^2 - \sigma_2^2 + 2 \cdot x_1 \cdot (1 - x_1) \cdot p_{12} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2$$

$$\frac{d\sigma^2_{port}}{dx_1} = 2x_1 \sigma_1^2 - 2(1 - x_1)\sigma_2^2 + 2(1 - x_1)\, p_{12}\, \sigma_1 \sigma_2 - 2x_1\, p_{12}\, \sigma_1 \sigma_2$$

$\dfrac{d\sigma^2_{port}}{dx_1} = 0$ e risolvendo rispetto a x_1 avremo

$$2x_1 \sigma_1^2 - 2(1 - x_1)\sigma_2^2 + 2(1 - x_1)\, p_{12}\, \sigma_1 \sigma_2 - 2x_1\, p_{12}\, \sigma_1 \sigma_2 = 0$$

da cui

$$x_1^* = \frac{-2\sigma_1^2 + 2\, p_{12}\, \sigma_1 \sigma_2}{2\sigma_1^2 + 2\sigma_2^2 - 4\, p_{12}\, \sigma_1 \sigma_2} =$$

LA SCELTA TRA DUE TITOLI RISCHIOSI

$$=\sigma^2 \frac{\sigma_2 - p_{12}\sigma_1}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\, p_{12}\sigma_1\sigma_2}$$

$$= \boxed{\frac{\sigma_2^2 - \sigma_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\,\sigma_{12}}} \longrightarrow \text{quantità di } x_1^* \text{ che min } \sigma^2_{port}$$

La quantità x_1^* esprime la quota del titolo 1 (ed indirettamente del titolo 2) (ossia $x_2^* = 1 - x_1^*$) che individua il portafoglio a minimo rischio.

LA SCELTA TRA DUE TITOLI RISCHIOSI

Abbiamo 3 casi possibili

1. $p_{12} = -1$ $\qquad x_1^* = \dfrac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}$

2. $p_{12} = 0$ $\qquad x_1^* = \dfrac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$

3. $p_{12} = 1$ $\qquad x_1^* = -\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2}$

$$x_2^* = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2}$$

CASO PRATICO

Abbiamo 3 titoli rischiosi che presentano una matrice V del tipo :

$$V = \begin{bmatrix} 64 & 80{,}8 & -20 \\ 80{,}8 & 102 & 40 \\ -20 & 40 & 200 \end{bmatrix}$$

e i rendimenti attesi

$E(R_1) = 20$ $\quad$ $E(R_2) = 18$ $\quad$ $E(R_3) = 29$

CASO PRATICO

Calcoliamo

1. Portafoglio a min. σ_p^2;
2. il suo $E(R_{port})$;
3. la sua σ^2_{port}

Soluzione

Osservando la matrice V giungiamo alla seguente interpretazione:

$$p_{12} = 1$$
$$p_{13} < 0$$
$$p_{23} < 0$$

Inoltre il titolo 2 ha $E(R_2) < E(R_1)$ e $\sigma_2^2 > \sigma_1^2$ quindi la distribuzione della mia ricchezza dovrà avvenire tra il titolo 1 e il titolo 3.

CASO PRATICO

Quindi in questo caso potremo utilizzare le relazioni per i portafogli composti da soli due titoli

$$\sigma^2_{port} = x_1^2 \cdot \sigma_1^2 + x_3^2 \; - \sigma_3^2 + 2\, x_1 \cdot x_3 \cdot \sigma_{13} =$$

$$= x_1^2 - \sigma_1^2 + (1 - x_1)^2 \cdot \sigma_3^2 + 2 \cdot x_1 \cdot (1 - x_1) \cdot \sigma_{13}$$

derivando σ^2_p rispetto a x_1 e uguagliandola a 0 avremo

$$\frac{d\,\sigma^2_p}{dx_1} = 0$$

CASO PRATICO

che è verificata per

$$x_1 = \frac{\sigma_3^2 - \sigma_{13}}{\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - 2\,\sigma_{13}}$$

$$= \frac{200 - (-20)}{64 + 200 - 2 \cdot (-20)} =$$

$$= \frac{220}{304} = 0,7237 \qquad \rightarrow \qquad x_3 = 1 - x_1$$

$1 - 0,7237$ da cui ottengo

$$x_3 = 0,2763$$

Note le quantità si potrà risalire al rendimento ed al rischio del portafoglio.

$$E\left(R_{port}\right) = 0{,}7237 \cdot 0{,}20 + 0{,}2763 \cdot 0{,}29 = 0{,}2249$$

$$\sigma^2_{port} = 0{,}7237^2 \cdot 64 + 0{,}2763^2 \cdot 200 + 2 \cdot 0{,}7237 \cdot 0{,}2763 \cdot (-20) = 40{,}79$$

da cui la deviazione standard

$$\sigma_p = (40{,}79)^{\frac{1}{2}} = 6{,}38.$$

Inserimento in un portafoglio ottimo di un attività risk free

EQUILIBRIO IN UN MERCATO FINANZIARIO CAPM

Massimiliano FERRARA
"Mediterranea" University of Reggio Calabria

EQUILIBRIO IN UN MERCATO FINANZIARIO CAPM

Ipotizziamo che un investitore decida di investire oltre che in I titoli rischiosi anche in una $I+1$ – *esima* attività priva di rischio. Avremo che

$$\sum_{k=1}^{I+1} x_k = 1$$

Il rendimento del titolo *risk free* è indicato con il simbolo Rf.

Con l'inserimento del titolo *risk free* il (R_{port}) sarà

$$E\left(R_{port}\right) = \sum_{k=1}^{I} x_k \cdot E\left(R_k\right) + x_{I+1} \cdot Rf.$$

EQUILIBRIO IN UN MERCATO FINANZIARIO CAPM

Ipotizziamo che un investitore decida di investire oltre che in I titoli rischiosi anche in una $I+1$ – *esima* attività priva di rischio. Avremo che

$$\sum_{k=1}^{I+1} x_k = 1$$

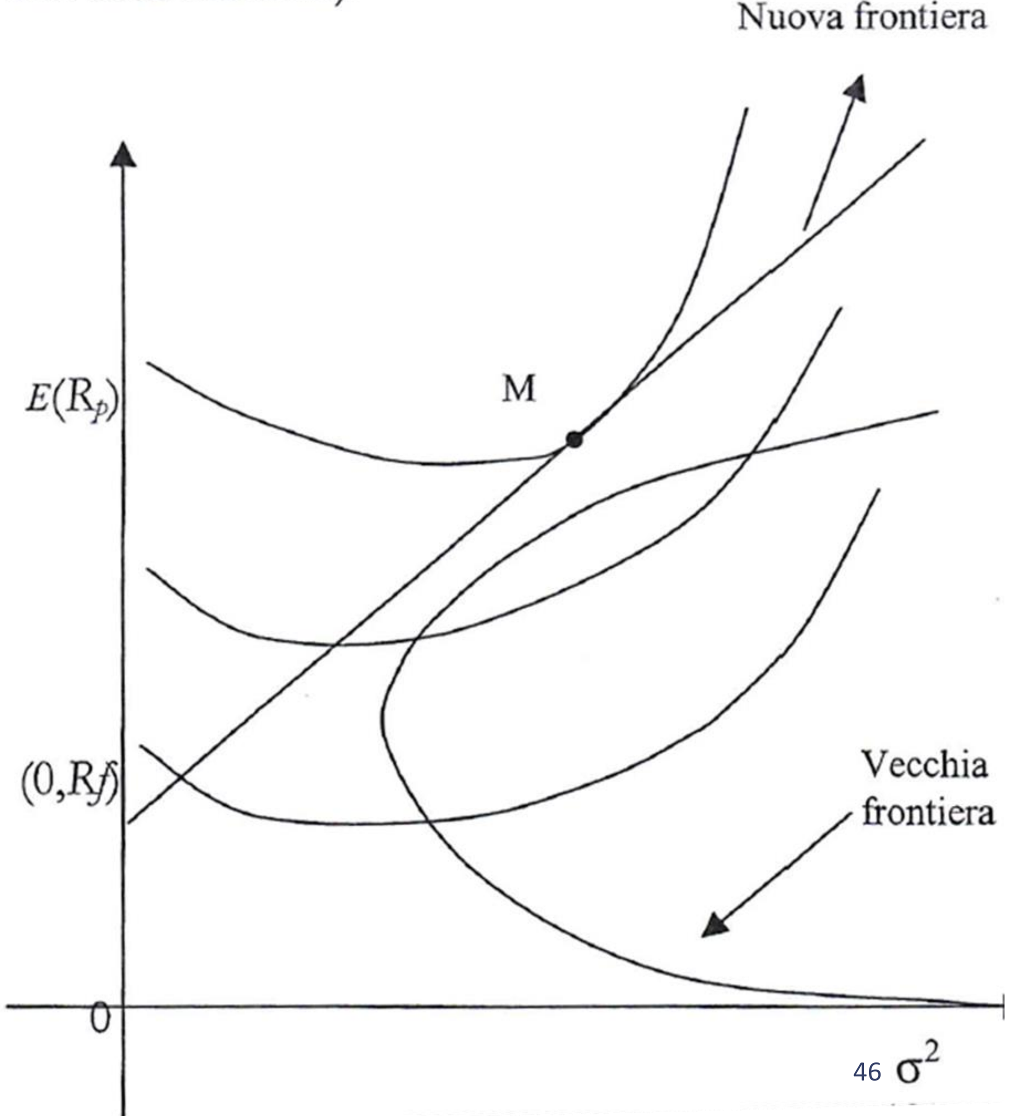
Il rendimento del titolo *risk free* è indicato con il simbolo Rf.

Con l'inserimento del titolo *risk free* il (R_{port}) sarà

$$E\left(R_{port}\right)=\sum_{k=1}^{I} x_k \cdot E\left(R_k\right)+x_{I+1} \cdot Rf.$$

EQUILIBRIO IN UN MERCATO FINANZIARIO CAPM

Avremo in questo modo una nuova frontiera efficiente, ossia una semiretta uscente dal punto (Rf), sul piano $\sigma^2 - E\left(R_p\right)$ e tangente la vecchia frontiera (dei soli titoli azionari).



N.B. = L’unico portafoglio rischioso appetibile dall’investitore è il portafoglio M

EQUILIBRIO IN UN MERCATO FINANZIARIO CAPM

In tale contesto avremo che il rendimento atteso di portafoglio sarà

$$E\left(R_p\right)=\left(1-x_{I+1}\right)\cdot E\left(R_M\right)+x_{I+1}\cdot Rf \qquad (1)$$

e la varianza di portafoglio

$$\sigma_{port}^2=\left(1-x_{I+1}\right)^2\cdot\sigma_M^2 \qquad (2)$$

o in termini di scarto quadratico medio

$$\sigma_{port}=\left(1-x_{I+1}\right)^2\cdot\sigma_M \qquad (3)$$

EQUILIBRIO IN UN MERCATO FINANZIARIO CAPM

dalla (1), (2) e (3) si ottiene l'equazione della nuova frontiera efficiente, ossia,

$$E(R_p) = Rf + \overbrace{\boxed{\frac{E(R_M) - R_f}{\sigma_M}}}^{\text{Coefficiente angolare}} \cdot \sigma_{port}$$

dove il coefficiente angolare è definito **prezzo per il rischio** e la differenza $\left[E(R_M) - R_f\right]$ è detta **premio per il rischio.**

Al fine di misurare il **rischio sistematico** che grava su una generica attività finanziaria $i \in I$, nella pratica finanziaria si ricorre al calcolo del coefficiente Beta (β)

$$\beta = \frac{\text{rischio associato ad } i}{\text{rischio associato all'intero mercato}}$$

EQUILIBRIO IN UN MERCATO FINANZIARIO CAPM

Il coefficiente β misura la quantità di rischio associata ad una certa attività finanziaria *i*. Ma a questo risultato si giunge solo indirettamente. Da un punto di vista analitico β è uguale a

$$\beta = \frac{Cov(R_i, R_M)}{\sigma_M^2}$$

dove R_i = rendimento attività i, R_M = rendimento medio del mercato (esempio indice guida di **Borsa**: **MIBTEL**, **NUMTEL** ecc.)

PRINCIPALI INDICI DI BORSA

- MIB 30 (Italia), raccoglie i migliori 30 titoli a maggiore flottente.
- CAC 40 (Francia), i 40 migliori titoli della borsa francese.
- DAX 30 (Germania)
- S&P (Standard's) 500 (Stati Uniti) i migliori 500 titoli americani.
- FTSE 350 (Inghilterra)
- NIKKEI 225 (Giappone)

Massimiliano FERRARA
"Mediterranea" University of Reggio Calabria

EQUILIBRIO IN UN MERCATO FINANZIARIO CAPM

Il β di un'attività i può essere

$\beta > 1$ (titoli aggressivi) $\uparrow\downarrow_M$ $\Uparrow\Downarrow$ attività i

$\beta < 1$ (titoli difensivi) $\uparrow\downarrow_M$ piccolissime variazioni di i.

$\beta = 1$ (titoli neutrali) $\uparrow\downarrow_M$ $\uparrow\downarrow$ a.i.

EQUILIBRIO IN UN MERCATO FINANZIARIO CAPM

In base al CAPM il portafoglio M, visto come "scelta ottima", nel caso di una frontiera efficiente "linearizzata", **coincide** con il cosiddetto **market portafoglio** (o portafoglio di mercato) ossia quel portafoglio composto da tutti i titoli rischiosi trattati sul mercato che compaiono nelle stesse proporzioni (x_k) con cui sono presenti in borsa.

In questo contesto di analisi l'equazione della frontiera efficiente valida per il singolo investitore può essere generalizzata e ritenuta espressiva delle caratteristiche del mercato. In questo caso la relazione

$$E(R_p) = Rf + \frac{E(R_M) - Rf}{\sigma_M} \cdot \sigma_p$$

prende il nome di CML (o capital market line)

N.B. La CML contiene solamente i portafogli composti come combinazione tra R_f e M **non** considerando tutti portafogli che si collocano sotto di essa.

EQUILIBRIO IN UN MERCATO FINANZIARIO. IL CAPM (CAPITAL ASSET PRICING MODEL)

In finanza matematica è molto importante individuare le condizioni che portano il mercato finanziario in equilibrio. In quest'ottica è importante lo studio del modello CAPM elaborato da W. Sharpe (1964).

Le ipotesi-guida del mercato sono:

1. gli investitori sono avversi al rischio e massimizzano l'utilità attesa;
2. la selezione dei loro portafogli avviene in base al $E(R)$ e la σ^2;
3. l'orizzonte temporale di riferimento è uniperiodale

Abbiamo delle ipotesi aggiuntive:

1. non vi sono imposte o altre imperfezioni di mercato;
2. gli investitori hanno aspettative omogenee sui valori attesi, varianze e le covarianze dei rendimenti dei titoli .

EQUILIBRIO IN UN MERCATO FINANZIARIO. IL CAPM (CAPITAL ASSET PRICING MODEL)

Per questi portafogli la misura del rischio **non** sarà la σ^2 (o σ) dei rendimenti. Infatti si deve mettere in evidenza la componente rischio **sistematica.** Obiettivo è quello di misurare il rischio totale associato all'attività $i \in I$. Il rischio totale è dato da

$$\boxed{\beta_i \, \sigma_M} \rightarrow \text{costo del total risk}$$

Massimiliano FERRARA
"Mediterranea" University of Reggio Calabria

EQUILIBRIO IN UN MERCATO FINANZIARIO. IL CAPM (CAPITAL ASSET PRICING MODEL)

Seguendo questo iter si ottiene la *correzione del rendimento in rapporto al rischio*, ossia

$$\beta_i \sigma_M p \quad \text{dove} \quad p = \frac{E(R_M) - Rf}{\sigma_M}$$

da qui avremo

$$\beta_i \cancel{\sigma_M} = \frac{E(E_M) - Rf}{\cancel{\sigma_M}}, \text{ ossia}$$

$$\beta_i \; E(R_M) - Rf$$

definito anche come **risk adjustment.**

Massimiliano FERRARA
"Mediterranea" University of Reggio Calabria

EQUILIBRIO IN UN MERCATO FINANZIARIO. IL CAPM (CAPITAL ASSET PRICING MODEL)

Abbiamo adesso tutti gli elementi per individuare le condizioni di equilibrio di un mercato finanziario: *in equilibrio tutte le attività devono avere lo stesso tasso di rendimento corretto in rapporto al rischio ossia* $\beta_i\left(E(R_M)-R_f\right)$.

Sapendo che in un mercato finanziario reale esistono sia attività rischiose che attività *risk free* con rendimenti pari a R_f, per queste avremo che $\beta_f=0$, allora da qui se con *Ri* indico il rendimento atteso delle attività *i*, con R_M il rendimento medio del mercato, avremo in equilibrio

$$E(R_i)-\beta\left(E(R_M)-R_f\right)=R_f-\cancel{\beta_f\left(E(R_M)-R_f\right)}$$

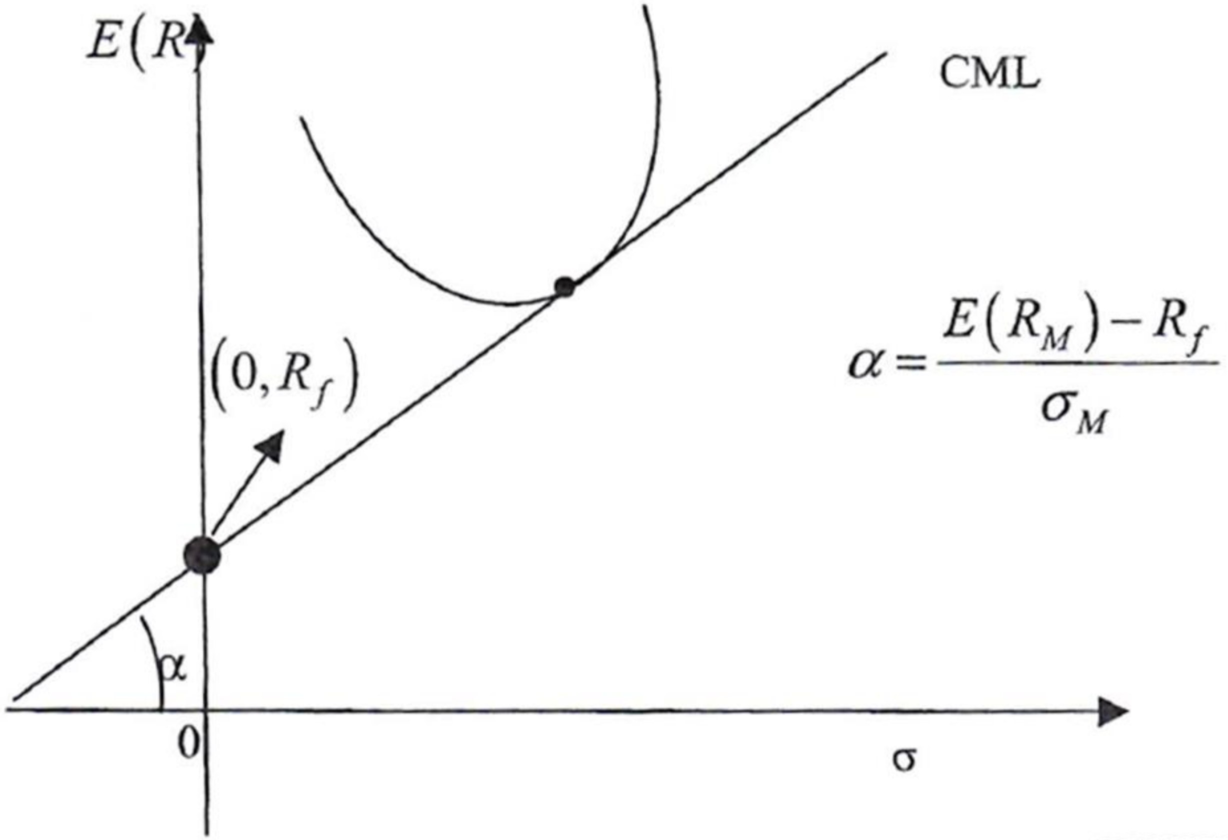
da cui:

$$E(R_i)=R_f+\beta_i\left(E(R_M)-R_f\right) \qquad (*)$$

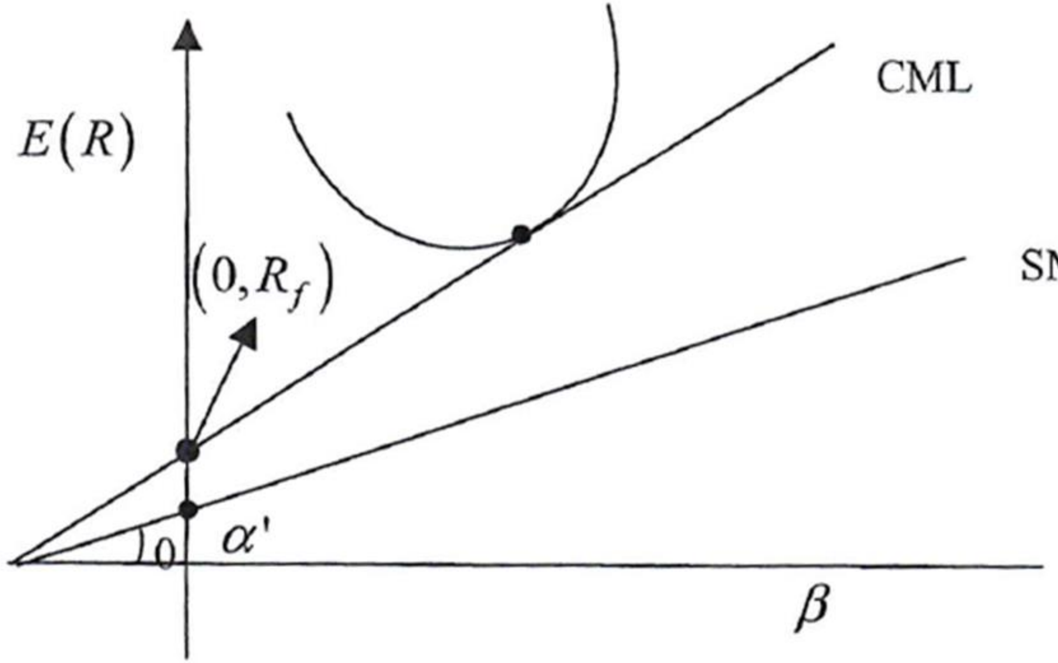
Massimiliano FERRARA
"Mediterranea" University of Reggio Calabria

EQUILIBRIO IN UN MERCATO FINANZIARIO. IL CAPM (CAPITAL ASSET PRICING MODEL)

L'equazione (*) prende il nome di Security Market Line (o SML) ed esprime il rendimento atteso di un titolo (o attività) rischioso in modo proporzionale al premio per il rischio $\left(\beta_i\left(E\left(R_M\right)-R_f\right)\right)$



EQUILIBRIO IN UN MERCATO FINANZIARIO. IL CAPM (CAPITAL ASSET PRICING MODEL)



$$\alpha' = E(R_M) - R_g$$

Per i portafogli efficienti e perfettamente diversificati che si trovano sulla CML vi sarà la remunerazione del rischio totale misurato dalla $\sigma^2 (0\ \sigma)$, mentre la SML indica che per i portafogli inefficienti (posti sotto la CML) vi sarà solo la remunerazione della parte sistematica del rischio totale.

CASI PRATICI (1)

Abbiamo 2 tipi di titoli azionari che presentano un coefficiente β pari a 1,5 e 0,8; il rendimento (in percentuale) del Mercato è visto come variabile casuale che assume valori pari a 10 e 5 con ½ di probabilità.

Determinare:

1) le quote relative ai due titoli che bisogna detenere per "costruire" un portafoglio con β complessivo pari a 1;
2) Il rendimento atteso del titolo dotato di β uguale a 1,5 stimato mediante l'equazione del CAPM se il tasso $R_f = 3\%$

CASI PRATICI (1)

Soluzione

Abbiamo che $\beta_1 = 1{,}5$

$$\beta_2 = 0{,}8$$

$$R_M = \begin{cases} 10\% & 5\% \\ \downarrow & \downarrow \\ 1/2 & 1/2 \end{cases}$$

Il quesito 1) è risolto della equazione

$$\beta_p = x_1 \cdot \beta_1 + x_2 \cdot \beta_2 = 1$$

sapendo che $x_2 = 1 - x$, si ha:

$$x_1 \cdot 1{,}5 + (1 - x_1) \cdot 0{,}8 = 1$$

$$x_1 \cdot 1{,}5 + 0{,}8 - x_1 \cdot 0{,}8 = 1$$

$$x_1 - 0{,}7 = 0{,}2$$

$$x_1 = 0{,}2857$$

CASI PRATICI (1)

da cui $x_2 = 0,7143$

Per calcolare il rendimento percentuale di cui al punto 2) abbiamo

$$E(R_1) = R_f + \beta_1 \left[E(R_M) - R_f \right]$$

dove $R_f = 3$ e $\beta_1 = 1,5$

$$E(R_M) = 10 \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot \frac{1}{2} = 7,5$$

Avremo quindi

$$E(R_1) = 3 + 1,5 \cdot (7,5 - 3) = 9,75\%$$

o parimenti

$$E(R_1) = 0,3 + 1,5 \cdot (0,75 - 0,3) = 0,975\%$$

CASO PRATICO (2)

Un portafoglio considerato efficiente offre un rendimento atteso pari al 15% ed inoltre:

- il rendimento atteso del mercato è il 10%;
- lo s.p.m. del rendimento del mercato è 0,20;
- il rendimento del titolo esente da rischio è il 5% Calcolare:

1) la deviazione standard del portafoglio;
2) dimostrare che la correlazione con il mercato del portafoglio è perfettamente positiva.

Al fin di calcolare la deviazione standard (s.p.m.), σ_p, del portafoglio, ricorriamo alla nota formula

$$E(R_p) = R_f + \frac{E(R_M) - R_f}{\sigma_M} \cdot \sigma_p$$

Massimiliano FERRARA
"Mediterranea" University of Reggio Calabria

CASO PRATICO (2)

da cui

$$0,15 = 0,15 + \frac{0,10 - 0,05}{0,2} \cdot \sigma_p$$

$$\sigma_p = 0,4$$

Al fine di dimostrare che la correlazione con il mercato del portafoglio è perfettamente positiva, abbiamo che

$$\beta_p = \frac{\mathrm{cov}(R_p;R_M)}{\sigma_M^2}$$

da cui $\mathrm{cov}(R_p;R_M) = \beta_p \cdot \sigma_M^2$

CASO PRATICO (2)

Per determinare il β del portafoglio si ricorre alla:

$$E(R_p) = R_f + \beta_f \left[E(R_M) - R_f \right]$$

e cioè

$$\beta_p = \frac{E(R_p) - R_f}{E(R_M) - R_f} = \frac{0{,}15 - 0{,}05}{0{,}10 - 0{,}05} = 2$$

Poiché

$$\operatorname{cov}(R_p; R_M) = 2 \cdot (0{,}2)^2 = 0{,}08$$

e avremo

$$\rho_{pM} = \frac{\operatorname{cov}(R_p; R_M)}{\sigma_p \, \sigma_M} = \frac{0{,}08}{0{,}2 \cdot 0{,}4} = 1$$

dimostrando la perfetta correlazione positiva.