Metodi matematici, statistici e finanziari per giuristi

Mauro D'Amico - Lorenzo Peccati

Indice

Parte I

Calcolo finanziario elementare

Capitolo 1

Regimi finanziari

1.1 Operazioni finanziarie

1.1.1 Introduzione

Esistono numerose situazione pratiche dove si prendono in considerazione spostamenti di capitali disponibili in date diverse, tra queste per esempio:

- il versamento oggi di un capitale su un c/c per poi prelevare in futuro lo stesso capitale più gli interessi maturati;
- l'impiego di denaro nell'acquisto di un titolo a reddito fisso (per esempio, un BOT) per poi rivenderlo in futuro;
- la richiesta ad una banca di anticipare oggi una somma che potremo incassare solo tra tre mesi.

Quindi, il punto di partenza da cui ci muoveremo è quello dello scambio tra capitali nel tempo.

Definizione 3.1 Uno scambio tra somme di denaro disponili in date diverse si dice *operazione finanziaria*.

Possiamo descrivere un'operazione finanziaria semplicemente attraverso una sequenza di coppie di numeri del tipo

$$\text{(Scadenze, Movimenti di cassa)}$$

dove le scadenze, indicate con t_s (con $s = 0, 1, 2, ..., n$) , sono misurate in anni e i movimenti di cassa, indicati con a_s (con $s = 0, 1, 2, ..., n$), sono misurati in euro ($a_s > 0$ identifica un'entrata o un incasso di denaro, mentre $a_s < 0$ identifica un'uscita o un esborso di denaro).
Un altro modo per descrivere un'operazione finanziaria consiste nell'uso d'una tabella del tipo

Scadenze	t_0	t_1	t_2	$\cdots$	t_s	$\cdots$	t_n
Importi (in €)	a_0	a_1	a_2	$\cdots$	a_s	$\cdots$	a_n

ove a ogni scadenza s'associa il movimento di cassa (con segno).

Esempio 3.2 L'operazione finanziaria che consiste nel ricevere oggi (data 0) un finanziamento da una Banca per un importo di 10000 € e che dovremo restituire attraverso il pagamento di tre rate semestrali d'ammontare pari a 3500 € potrà essere descritta, per esempio:

- dal punto di vista del cliente che riceve il finanziamento

Scadenze	0	1/2	1	3/2
Importi	10000	−3500	−3500	−3500

  oppure

  $$\{(0, 10000)\,;(1/2, -3500)\,;(1, -3500)\,;(3/2, -3500)\}$$

- dal punto di vista della Banca che eroga il finanziamento

Scadenze	0	1/2	1	3/2
Importi	−10000	3500	3500	3500

  oppure

  $$\{(0, -10000)\,;(1/2, 3500)\,;(1, 3500)\,;(3/2, 3500)\}$$

1.1.2 Capitalizzazione e attualizzazione

Cominciamo con lo studio d'un'operazione finanziaria che comporta solo lo scambio tra due somme di denaro: una disponibile oggi, cioè alla data 0, e l'altra disponibile in futuro alla data $t > 0$. Possiamo distinguere tra *operazioni finanziarie di capitalizzazione* e *d'attualizzazione* (o *di sconto*).

Definizione 3.3 Uno scambio tra una disponilità immediata (che si dice *ca pi tale*) con una disponibilità futura (che prende il nome di *montante* o *valore finale*) si dice *operazione finanziaria di capitalizzazione.*

Un'operazione finanziaria di capitalizzazione si può descrivere con una tabella del tipo

Scadenze	0	t
Importi	− Capitale	Montante

dove il capitale s'indica con C e il montante con M. La differenza tra montante e capitale, indicato con I, si dice *interesse*, cioè

$$I = \text{Montante} - \text{Capitale} = M - C$$

mentre il rapporto tra il montante e il capitale, indicato con f, si chiama *fattore di montante* o di *capitalizzazione*, cioè

$$f(t) = \frac{\text{Montante}}{\text{Capitale}} = \frac{M}{C}$$

che rappresenta il montante in t per ogni euro impiegato in 0 (fornisce quindi un *rapporto di scambio intertemporale* tra le somme di denaro). Quindi, la ricerca del montante M si farà con la seguente formula (con $t \geq 0$)

$$M = C \cdot f\,(t)$$

Definizione 3.4 Uno scambio tra una disponibilità futura (che si dice *valore nominale*) con una disponibilità immediata (che prende il nome di *valore attuale* o *valore scontato*), si dice *operazione finanziaria di attualizzazione o di sconto.*

Possiamo descrivere un'operazione finanziaria d'attualizzazione (o di sconto) con la tabella seguente

Scadenze	0	t
Importi	Valore scontato	$-$ Valore nominale

dove, di solito, il *valore scontato* s'indica con A e il *valore nominale* con S. La differenza tra il valore nominale e il valore scontato, indicata con D, si dice *sconto*, cioè

$$D = \text{Valore nominale} - \text{Valore scontato} = S - A$$

Infine, il rapporto tra il valore scontato e il valore nominale, indicato con ϕ, si chiama *fattore d'attualizzazione* o di *sconto*, cioè

$$\phi(t) = \frac{\text{Valore scontato}}{\text{Valore nominale}} = \frac{A}{S}$$

che fornisce il valore oggi (cioè alla data 0) di un euro disponibile in t (cioè il *rapporto di scambio intertemporale* tra le due somme). Perciò, la ricerca del valore attuale A si farà con la formula seguente (con $t \geq 0$)

$$A = S \cdot \phi(t)$$

In modo molto semplice possiamo dire che con la capitalizzazione le disponibilità immediate si trasformano in disponibilità future (cioè si portano capitali avanti nel tempo), mentre con l'attualizzazione trasformiamo disponibilità future in somme da utlizzare immediatamente (cioè si portano capitali indietro nel tempo).

Esempio 3.5 Consideriamo le seguenti due operazioni finanziarie

(a)

Scadenze	0	9/12
Importi	-1000	1200

(b)

Scadenze	0	1
Importi	980	-1200

L'operazione (a) è di capitalizzazione con $C = 1000$, $M = 1200$ e $I = 200$. Il fattore di montante a 9 mesi risulta

$$f\left(\frac{9}{12}\right) = \frac{M}{C} = \frac{1200}{1000} = 1.2$$

L'operazione (b) è d'attualizzazione con $A = 980$, $S = 1200$ e, quindi, lo sconto risulta $D = 220$. Il fattore di sconto a un anno risulta

$$\phi(1) = \frac{A}{S} = \frac{980}{1200} \approx 0.8167$$

quindi un euro disponibile tra 1 anno oggi vale circa 0.82 €.

Possiamo esprimere l'interesse I e lo sconto D utilizzando i rispettivi fattori finanziari:

- per l'interesse I, si ha

$$I = M - C = C \cdot f(t) - C = C \cdot [f(t) - 1]$$

- per lo sconto D, si ha

$$D = S - A = S - S \cdot \phi(t) = S \cdot [1 - \phi(t)]$$

1.1.3 Fattori finanziari coniugati, tasso annuo d'interesse e tasso annuo di sconto

I fattori finanziari f e ϕ giocano un ruolo molto importante perché ci permettono di modificare le somme di denaro, cioè da capitale a montante e da valore nominale a valore scontato. I fattori finanziari possono dipendere:

- solo dalla durata dell'operazione t, cioè scriveremo $f(t)$ e $\phi(t)$;
- dalla durata dell'operazione t e da parametri che regolano la crescita (nella capitalizzazione) o la decrescita (nella attualizzazione) di una somma di denaro in relazione alla durata t, e in tal caso scriveremo

$$f(t, \alpha) \qquad \text{e} \qquad \phi(t, \beta)$$

dove α e β rappresentano dei parametri.
I fattori finanziari $f(t)$ e $\phi(t)$ identificano, rispettivamente, *leggi finanziarie di capitalizzazione* e *d'attualizzazione*. Mentre fattori finanziari del tipo $f(t, \alpha)$ e $\phi(t, \beta)$ identificano, rispettivamente, *regimi finanziari di capitalizzazione* e *d'attualizzazione*. Da un regime finanziario di capitalizzazione

(d'attualizzazione) fissando esattamente il valore del parametro α (β) possiamo identificare una legge finanziaria di capitalizzazione (attualizzazione). Questo vuol dire che il rapporto di scambio intertemporale tra disponibilità future e immediate dipende solo dalla durata t.

Esempio 3.6 Il fattore finanziario di capitalizzazione $f(t) = 1 + \alpha t$, con $\alpha > 0$ e $t \geq 0$, identifica un regime finanziario di capitalizzazione (infatti dipende sia dal parametro α e sia dalla durata t). Ponendo, per esempio, $\alpha = 0.12$, si ottiene $f(t) = 1 + 0.12t$, con $t \geq 0$, che rappresenta una legge finanziaria di capitalizzazione e, di conseguenza, il rapporto di scambio tra capitale e montante dipenderà solo dalla durata t.

Questi fattori finanziari sono legati tra di loro, vediamo come. Consideriamo le due operazioni finanziarie seguenti:

1. s'impiega un capitale C per una durata t ottenendo come montante l'ammontare $M = Cf(t)$;

2. si attualizza il montante dell'operazione precedente, che è $M = Cf(t)$, per la stessa durata t usando il fattore di attualizzazione $\phi(t)$, ottenendo $A = [Cf(t)]\,\phi(t)$.

A questo punto se vogliamo che il valore scontato A sia uguale al capitale impiegato C (si dice anche che stiamo lavorando con *operazioni finanziarie simmetriche*), per ogni durata t, si dovrà avere

$$C = A \quad \Rightarrow \quad C = [Cf(t)]\,\phi(t)$$

onde

$$1 = f(t) \cdot \phi(t) \tag{1.1}$$

e quindi i due fattori finanziari sono legati dalla condizione che il loro prodotto deve valere 1 per ogni durata t. Questa relazione che lega i fattori finanziari sarà di fondamentale importanza quando ci occuperemo di costruire i regimi finanziari di capitalizzazione e di sconto. Chiaramente questa relazione dal punto di vista pratico non sempre è vera, questo per via delle posizioni non simmetriche che coinvolgono le controparti d'un'operazione finanziaria (per esempio, banca e cliente).

Definizione 3.7 I fattori finanziari $f(t)$ e $\phi(t)$ si dicono *coniugati* se il loro prodotto vale 1, per ogni valore di $t \geq 0$.

La condizione di fattori finanziari coniugati permette di trovare il fattore di sconto (montante) coniugato a un fattore di montante (sconto), infatti dalla (3.1) si ha

$$f(t) = \frac{1}{\phi(t)} \quad (\text{noto } \phi(t)) \qquad\qquad \phi(t) = \frac{1}{f(t)} \quad (\text{noto } f(t))$$

I parametri che caratterizzano i regimi finanziari di capitalizzazione e d'attualizzazione sono, di solito, il tasso annuo d'interesse e il tasso annuo di sconto. Procediamo nella definizione di questi due elementi molto importanti.

Definizione 3.8 Si dice *tasso annuo:*

- *d'interesse*, indicato con i, l'interesse prodotto da un euro impiegato per un anno, cioè

$$\text{Tasso annuo d'interesse} = i = f(1) - 1$$

- *di sconto*, indicato con d, il compenso richiesto per anticipare oggi un euro disponibile tra un anno, cioè

$$\text{Tasso annuo di sconto} = d = 1 - \phi(1)$$

Esempio 3.9 Il tasso annuo d'interesse i della seguente legge di capitalizzazione $f(t) = 1.14^t$ risulta

$$i = f(1) - 1 = 1.14 - 1 = 0.14 = 14\%$$

mentre il tasso annuo di sconto d della legge di attualizzazione $\phi(t) = 1 - 0.15t$ vale

$$d = 1 - \phi(1) = 1 - [1 - 0.15 \cdot 1] = 0.15 = 15\%$$

Ponendo $t = 1$ dalla condizione dei fattori finanziari coniugati (3.1) si ha

$$f(1) \cdot \phi(1) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad (1 + i)(1 - d) = 1$$

quindi possiamo stabilire una relazione tra questi tassi annui, cioè

$$i = \frac{d}{1 - d} \qquad\qquad d = \frac{i}{1 + i}$$

1.2 Regimi finanziari

1.2.1 Generalità

In questo sezione studieremo i regimi finanziari più comuni che si usano nella pratica di tutti i giorni sia per la capitalizzazione e sia per l'attualizzazione. Precisamente prenderemo in esame i regimi finanziari:

- dell'interesse semplice e dello sconto semplice (o razionale);
- dell'interesse composto e dello sconto composto;
- dello sconto razionale e dell'interesse semplice anticipato.

La costruzione d'un regime finanziario, come di solito avviene quando si costruisce un qualsiasi modello matematico, si basa su opportune ipotesi che faremo sulla formazione:

1. degli interessi nella capitalizzazione;
2. dello sconto nell'attualizzazione.

1.2.2 Interesse semplice e sconto semplice

Si tratta di un regime finanziario molto diffuso nella pratica. Il regime finanziario dell'interesse semplice si costruisce attraverso un'ipotesi sulla formazione degli interessi generati da un capitale C impiegato per una durata $t \geq 0$. Precisamente si ha:

Ipotesi. L'interesse è direttamente proporzionale, secondo un coefficiente $i > 0$ (tasso annuo d'interesse), al capitale impiegato C e alla durata dell'impiego t, che tradotto in formule equivale

$$I = C \cdot t \cdot i$$

Tenendo conto che l'interesse I si paga alla fine dell'operazione, il montante M in capitalizzazione semplice di un capitale C per una durata t risulta

$$M = C + I = C + C \cdot t \cdot i = C \cdot (1 + i \cdot t)$$

da cui il fattore di montante associato è $f(t) = 1+it$, rappresentato nel piano da una semiretta uscente da $(0,1)$ con pendenza i (vedi figura 3.1.(a)).

Esempio 3.10 Impiegando 1500 € per 10 mesi in capitalizzazione semplice a tasso annuo d'interesse del 4.5% s'ottiene un montante di

$$M = 1500 \cdot f\left(\frac{10}{12}\right) = 1500 \cdot \left(1 + 0.045 \cdot \frac{10}{12}\right) = 1556.25$$

da cui l'interesse prodotto risulta $I = 56.25$. Il montante di 2500 € impiegato al tasso annuo d'interesse semplice del 2.75% per 90 giorni è

$$M = 2500 \cdot f\left(\frac{90}{365}\right) = 2500 \cdot \left(1 + 0.0275 \cdot \frac{90}{365}\right) \approx 2516.95$$

generando un ammontare d'interesse $I = 16.95$.

Sono d'immediata lettura le seguenti formule inverse

$$C = \frac{M}{1+it} \quad ; \quad t = \frac{1}{i}\left[\frac{M}{C} - 1\right] \quad ; \quad i = \frac{1}{t}\left[\frac{M}{C} - 1\right]$$

che ci permettono di ricavare, rispettivamente, il capitale, la durata e il tasso annuo d'interesse una volta che conosciamo gli altri elementi.

Esempio 3.11 Un impiego in capitalizzazione semplice di 1220 € per 9 mesi ha prodotto un montante pari a 1350 €, da cui il tasso annuo d'interesse i implicito nell'operazione risulta

$$i = \frac{1}{9/12} \cdot \left[\frac{1350}{1220} - 1\right] \approx 0.1421 = 14.21\%$$

Osservazione 3.12 Nel modello base il tasso annuo d'interesse rimane uguale per tutta la durata t dell'impiego. Come facciamo a calcolare il montante di un impiego nell'ipotesi che il tasso annuo d'interesse subisca una variazione Δi (in aumento o in diminuzione) prima della fine dell'operazione? Consideriamo un impiego di un capitale C per una durata T a tasso annuo d'interesse i e ipotizziamo che alla data t, con $0 < t < T$, il tasso annuo d'interesse cambi in $i+\Delta i$ (rimanendo tale fino alla scadenza T). Ricordando come si formano gli interessi nella capitalizzazione semplice, l'interesse (a scadenza) risulta

$$I = C \cdot i \cdot t + C \cdot (i + \Delta i) \cdot (T - t)$$

da cui il montante finale risulterà

$$\begin{aligned} M = C + I &= C + C \cdot i \cdot t + C \cdot (i + \Delta i) \cdot (T - t) \\ &= C \cdot (1 + iT) + C \cdot \Delta i \cdot (T - t) \end{aligned}$$

Esempio 3.13 S'impiegano 3000 € per un anno in capitalizzazione semplice con tasso annuo d'interesse variabile in base alla durata come segue: $i(t) = 3\%$ per $t \leq 4/12$ e $i(t) = 3.5\%$ per $t > 4/12$. L'interesse a fine anno risulta

$$I = 3000 \cdot 0.03 \cdot \frac{4}{12} + 3000 \cdot 0.035 \cdot \left(1 - \frac{4}{12}\right) = 100$$

e, quindi, il montante risulta $M = 3100$ €.

Generalizzando, se consideriamo le durate $t_1, t_2, \ldots, t_n$ in cui, rispettivamente, valgono i tassi annui d'interesse $i_1, i_2, \ldots, i_n$, allora il montante M relativo all'impiego di un capitale C per una durata T (dove $T = t_1 + t_2 + \cdots + t_n$) risulterà

$$M = C + C \cdot i_1 \cdot t_1 + \cdots + C \cdot i_n \cdot t_n = C\left(1 + \sum_{s=1}^{n} i_s t_s\right)$$

Di solito nella capitalizzazione semplice gli interessi sono pagati una sola volta, alla scadenza dell'operazione. Nulla vieta però di pagare gli interessi più volte durante l'operazione. Per esempio, consideriamo un impiego a un anno in capitalizzazione semplice con pagamenti semestrali degli interessi: indicheremo con i_2 il tasso semestrale d'interesse semplice. Gli ammontari che entrano in giuoco in questo caso sono:

- pagamento degli interessi alla fine del primo semestre, cioè

$$I_1 = C \cdot i_2 \cdot 1$$

- pagamento degli interessi di competenza del secondo semestre e del capitale iniziale impiegato, cioè

$$I_2 + C = C \cdot i_2 \cdot 1 + C$$

e, quindi, il montante finale a un anno risulterà

$$M^* = C + 2C \cdot i_2 \cdot 1 = C \cdot (1 + 2 \cdot i_2)$$

Chiaramente il montante con pagamento degli interessi alla fine di ogni semestre o alla fine dell'anno dovranno essere uguali, quindi avremo

$$C\,(1 + i \cdot 1) = C\,(1 + i_2 \cdot 2) \qquad \Rightarrow \qquad i = i_2 \cdot 2$$

che stabilisce quale relazione deve valere tra i e i_2 affinché i montanti a fine anno siano uguali. Questi tassi si chiameranno *equivalenti*. Genera liz ziamo questo concetto attraverso una definizione formale.

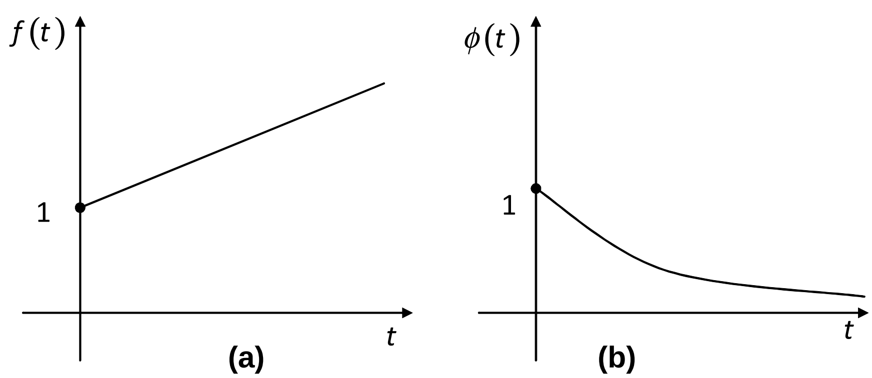

Figura 3.1 - Fattori finanziari interesse e sconto semplice

Definizione 3.14 Il tasso annuo d'interesse i e il tasso periodale d'interesse i_m si dicono *equivalenti* (in capitalizzazione semplice), se per ogni $t \geq 0$:

$$i \cdot t \equiv i_m \cdot m \cdot t$$

onde:

$$i = mi_m \tag{1.2}$$

Dalla (1.2) si ricavano le formule inverse

$$i = i_m \cdot m \qquad \text{e} \qquad i_m = \frac{i}{m}$$

con le quali possiamo ricavare i noto i_m e viceversa.
Quindi, conoscendo il tasso annuo d'interesse i e il numero di volte che si vuole pagare gli interessi in un anno m (dove i casi più frequenti sono $m = 2, 3, 4, 6, 12$) possiamo ricavare i corrispondenti tassi periodali equivalenti, per esempio:

- per $m = 12$ si ha $i_{12} = i/12$ che rappresenta il tasso mensile d'interesse semplice equivalente all'annuale;
- per $m = 3$ si ha $i_3 = i/3$ che rappresenta il tasso quadrimestrale d'interesse semplice equivalente all'annuale,

e così via.
Per finire, osserviamo che in capitalizzazione semplice i tassi d'interesse i e i_m sono legati tra loro da una relazione lineare.

Esempio 3.15 Il tasso quadrimestrale d'interesse semplice i_3 equivalente all'annuo $i = 12\%$ risulta

$$i_3 = \frac{i}{3} = \frac{0.12}{3} = 0.04 = 4\%$$

Passiamo ora allo sconto semplice o razionale. Consideriamo una somma di denaro S di cui potremo disporre soltanto alla data futura $t > 0$. Per usare immediatamente questa somma di denaro possiamo chiedere a qualcuno d'anticiparla. Nell'ipotesi che quest'ultimo impieghi il suo denaro a interesse semplice fino alla scadenza t, allora possiamo considerare un'operazione a sconto semplice come simmetrica rispetto una a interesse semplice. Perciò, dalla condizione dei fattori finanziari coniugati (3.1) ricaviamo il fattore di sconto coinugato al fattore di montante semplice, che risulta

$$\phi(t) = \frac{1}{1 + it} \qquad \text{con } t \geq 0 \tag{1.3}$$

che identifica il *regime finanziario dello sconto semplice* (o *razionale*) rap pre sentato graficamente da un ramo d'iperbole uscente dal punto $(0,1)$ strettamente in discesa e convessa (vedi figura 3.1.(b)). Quindi, moltiplicando il valore nominale S per il fattore di sconto (3.3), si perviene al valore attuale o scontato A

$$A = S \cdot \phi(t) = S \cdot \frac{1}{1+it}$$

da cui segue lo sconto D, che risulta

$$D = S - A = S - S \cdot \frac{1}{1+it} = \frac{S \cdot i \cdot t}{1+it}$$

Esempio 3.16 Il valore scontato di 1500 € disponibili tra 9 mesi al tasso annuo d'interesse semplice del 6% vale

$$A = 1500 \cdot \phi(9/12) = \frac{1500}{1 + 0.06 \cdot (9/12)} \approx 1435.41$$

con sconto $D = 1500 - 1435.41 = 64.59$ €.

Analogamente a quanto visto per il regime finanziario dell'interesse semplice, il regime finanziario dello sconto semplice appena visto è un modello base. Una possibile variante potrebbe essere quella che il tasso annuo d'interesse sia funzione della durata t dello sconto, per esempio una funzione del tipo

$$i(t) = \begin{cases} i_1 & t \leq t^* \\ i_2 & t > t^* \end{cases}$$

con $i_1 < i_2$, giustificato dal fatto che disponibilià lontante richiedano compensi più alti.
Nell'operazione di sconto pesano molto anche i costi d'agenzia, cioè tutte le spese richieste dal soggetto che compie materialmente l'operazione di sconto, che normalmente sono commisurate alla durata dello sconto t e,all'ammontare da scontare richiesto S.

Esempio 3.17 Le condizioni che la Banca Alfa pratica per lo sconto sono riassunte nella seguente tabella informativa a disposizione per i suoi clienti

Ammontari	**Spese Fisse**	**Spese Variabili**	**Tassi d'interesse**
$S \leq 5000$	20 €	-	5%
$S > 5000$	5 €	0.5% di S	4%

Un'azienda chiede alla banca d'anticipare due somme di denaro: 4000 € con scadenza 4 mesi e 8000 € con scadenza 6 mesi. Applicando la formula dello sconto razionale e i dati della tabella si ha:

- per la prima somma il valore scontato risulta$A_1 = 4000 \cdot \phi\left(4/12\right) = \frac{4000}{1+0.05\cdot(4/12)} \approx 3934.43$

mentre il netto ricavo A_1^* è

$$A_1^* = A_1 - 10 = 3934.43 - 20 = 3914.43$$

- per la seconda somma il valore scontato risulta$A_2 = 8000 \cdot \phi\left(6/12\right) = \frac{8000}{1+0.04\cdot(6/12)} \approx 7843.14$

mentre il netto ricavo A_2^* è

$$A_2^* = A_2 - 5 - 0.005 \cdot 8000 = 7843.14 - 5 - 40 = 7798.14$$

1.2.3 Interesse composto e sconto composto

Anche il regime finanziario dell'interesse composto si usa in pratica. Consideriamo l'impiego d'un capitale C per una durata $t \geq 0$. A differenza della capitalizzazione semplice, dove gli interessi sono calcolati rispetto al capitale iniziale indipendentemente dalla durata dell'impiego (3 mesi o 12 anni), nella capitalizzazione composta la durata dell'impiego entra nel modello di formazione degli interessi attraverso il meccanismo della *ca pi taliz zazione degli interessi* che rappresenta l'ipotesi di partenza per la costruzione di questo nuovo modello. Ipotizziamo di poter esprimere la durata dell'impiego da 0 a t come somma di n periodi tutti uguali, per esempio in periodi annuali dove si calcolano gli interessi semplici. Allora l'ipotesi di capitalizzazione degli interessi è la seguente:

Ipotesi di capitalizzazione degli interessi: gli interessi prodotti in un anno vengono aggiunti al capitale d'inizio d'anno per produrre nuovi interessi nell'anno successivo. Indicando con M_s il capitale disponibile alla data s l'ipotesi si traduce nella formula (ricorsiva) seguente

$$M_0 = C \qquad \text{Interessi} = M_s - M_{s-1} = M_{s-1} \cdot i \tag{1.4}$$

con $s = 1, 2, ..., n$.

Dalla (3.4) possiamo riscrivere la formula come segue

$$\begin{cases} M_0 = C \\ M_s = M_{s-1} + M_{s-1} \cdot i \end{cases} \qquad \text{con } s = 1, 2, ..., n$$

che ci permette di calcolare il montante alla data s in capitalizzazione composta. Si procede come segue:

- per $s = 1$ si ha il montante alla fine del primo anno

$$M_1 = M_0 + M_0 \cdot i = C + C \cdot i = C(1 + i)$$

- per $s = 2$ si ha il montante alla fine del secondo anno

$$M_2 = M_1 + M_1 \cdot i = M_1 (1 + i) = C (1 + i)^2$$

- per $s = 3$ si ha il montante alla fine del terzo anno

$$M_3 = M_2 + M_2 \cdot i = M_2 (1 + i) = C (1 + i)^3$$

procedendo in questo modo si arriva a calcolare il montante alla data n che risulta

$$M_n = M_{n-1} + M_{n-1} \cdot i = M_{n-1} (1 + i) = C (1 + i)^n$$

Quindi la formula che ci permette di calcolare il montante di un capitale C impiegato per la durata $t \geq 0$ con capitalizzazione composta con tasso annuo d'interesse i è

$$M = C (1 + i)^t \tag{1.5}$$

da cui il fattore di montante associato è $f(t) = (1 + i)^t$, rappresentato nel piano da una curva uscente dal punto $(0, 1)$, strettamente in salita e convessa (vedi figura 3.2.(a)).
Gli interessi I generati dall'operazione si determinano sottraendo dal montante M il capitale C, ossia

$$I = M - C = C (1 + i)^t - C = C \cdot \left[(1 + i)^t - 1\right]$$

Esempio 3.18 Il montante di un capitale di 2500 € impiegati per 4 anni in capitalizzazione composta al tasso annuo d'interesse del 7% risulta

$$M = 2500 \cdot f(4) = 2500 \cdot (1 + 0.07)^4 \approx 3276.99$$

producendo interessi pari a $I = 3276.99 - 2500 = 776.99$ €.

Ricaviamo le formule inverse partendo dalla (3.5) che risultano:

- ricerca del capitale C noti M, i e t

$$C = \frac{M}{(1+i)^t} = M \cdot (1+i)^{-t} \tag{1.6}$$

- ricerca del tasso annuo d'interesse i noti M, C e t

$$(1+i)^t = \frac{M}{C} \quad \Rightarrow \quad 1 + i = \sqrt[t]{\frac{M}{C}} \quad \Rightarrow \quad i = \sqrt[t]{\frac{M}{C}} - 1 \tag{1.7}$$

- ricerca della durata t noti M, C e i

$$(1+i)^t = \frac{M}{C} \qquad \Rightarrow \qquad t = \log_{1+i}\left(\frac{M}{C}\right) = \frac{\ln(M/C)}{\ln(1+i)} \tag{1.8}$$

Esempio 3.19 Se si vuole conoscere quanto tempo serve affinché un capitale di 3500 € impiegato al tasso annuo d'interesse composto del 3% porti a un montante di 4200 €, occorre applicare la formula inversa (3.8) ottenendo

$$t = \frac{\ln(4200/3500)}{\ln(1+0.03)} = \frac{\ln 1.2}{\ln 1.03} \approx 6.168097$$

cioè poco più di sei anni. Se si vuole impiegare il denaro solo 4 anni allora dovremo cercare, utilizzando la formula inversa (3.7), un impiego con tasso annuo d'interesse composto pari a

$$i = \sqrt[4]{\frac{4200}{3500}} - 1 = \sqrt[4]{1.2} - 1 \approx 0.0466 = 4.66\%$$

Consideriamo l'impiego d'un capitale C in capitalizzazione composta per la durata T con tasso annuo d'interesse i. Ipotizziamo che alla data t, con $0 < t < T$, ci sia una variazione del tasso d'interesse, per esempio da i a $i + \Delta i$, allora il problema del calcolo del montante si risolve utilizzando la seguente formula

$$M = C\,(1+i)^t\,[1+(i+\Delta i)]^{T-t}$$

Esempio 3.20 S'impiega un capitale di 2500 € per cinque anni in capitalizzazione composta al tasso annuo d'interesse del 2.5%. Se dopo due anni il tasso annuo d'interesse aumenta di mezzo punto percentuale (passando al 3%) allora il montante a scadenza risulta

$$M = 2500\,(1+0.025)^2\,(1+0.03)^3 \approx 2870.12$$

generando un interesse pari a 370.12 €.

Generalizzando, se consideriamo le durate $t_1, t_2, \ldots, t_n$ dove rispettivamente valgono i tassi annui d'interesse $i_1, i_2, \ldots, i_n$, allora il montante M relativo all'impiego di un capitale C per la durata T (dove $T = t_1 + t_2 + \cdots + t_n$) risulterà

$$M = C\,(1+i_1)^{t_1}\,(1+i_2)^{t_2}\cdots(1+i_n)^{t_n} = C \cdot \prod_{s=1}^{n}(1+i_s)^{t_s}$$

Il processo di capitalizzazione degli interessi può essere fatto anche per periodi diversi dall'anno, per esempio per semestri, per mesi e anche per giorni (si pensi agli impieghi giornalieri fatti da importanti Istituti di credito utilizzando come parametro di calcolo il *tasso overnight*, indicato con il simbolo O/N e riportato dai più importanti giornali finanziari).

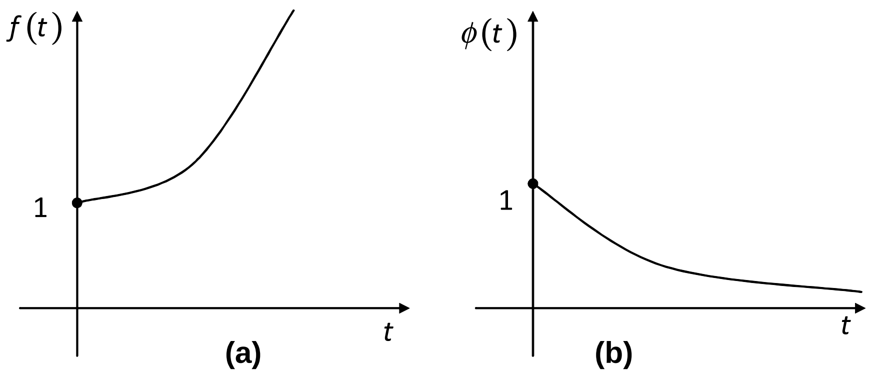

Figura 3.2 - Fattori finanziari interesse e sconto composto

Consideriamo due impieghi a un anno fatti con diversa capitalizzazione degli interessi: il primo con capi ta lizzazione annuale e il secondo con capitalizzazione semestrale. Il montante a fine anno nei due casi risulta:

- con capitalizzazione annuale

$$M_1 = C(1+i)$$

- con capitalizzazione semestrale

$$M_2 = C\,(1+i_2)^2$$

  dove i_2 rappresenta il tasso semestrale d'interesse composto.

Le due capitalizzazioni a fine anno risulteranno equivalenti se

$$M_1 = M_2 \qquad \Rightarrow \qquad (1+i) = (1+i_2)^2$$

che ci fornisce quale condizione deve valere tra i due tassi affinché i montanti a fine anno siano uguali. Questi si dicono tassi equivalenti (in capitalizzazione composta). Possiamo generalizzare questo processo attraverso la definizione che segue.

Definizione 3.21 Il tasso annuo d'interesse i e il tasso periodale d'interesse i_m si dicono *equivalenti* in capitalizzazione composta, per ogni $t \geq 0$, se vale la condizione

$$(1+i)^t \equiv (1+i_m)^{tm} \tag{1.9}$$

Dalla (3.9) si ricavano le formule inverse

$$i = (1+i_m)^m - 1 \qquad \text{e} \qquad i_m = \sqrt[m]{1+i} - 1$$

con le quali possiamo ricavare i noto i_m e viceversa.

Esempio 3.22 Il tasso mensile d'interesse composto i_{12} equivalente a quello annuo $i = 11\%$ risulta

$$i_{12} = \sqrt[12]{1+0.11} - 1 \approx 0.008735 = 0.8735\%$$

Osservazione 3.23 Nella pratica esistono altri due parametri per descrivere le condizioni di un impiego finanziario, questi sono:

1. il *tasso annuo nominale* (TAN), indicato con il simbolo j_m, che si ottiene moltiplicando m per il tasso periodale d'interesse i_m, cioè

   $$j_m = i_m \cdot m$$

   da non confondere con il tasso annuo d'interesse (effettivo) i.

2. il *tasso istantaneo d'interesse*, indicato con δ, che si usa nell'ipotesi di capitalizzazione degli interessi istantanea (numerosi modelli in Finanza utilizzano questo tipo di capitalizzazione ed esso è stato reso obbligatorio da CONSOB per l'indicazione delle condizioni che le fiduciarie offrono). In questo caso la formula per calcolare il montante risulta

   $$M = C \cdot \mathrm{e}^{\delta t} \tag{1.10}$$

Valgono le seguenti relazioni

$$1+i = \left(1+\frac{j_m}{m}\right)^m \qquad 1+i = \mathrm{e}^{\delta} \qquad \left(1+\frac{j_m}{m}\right)^m = \mathrm{e}^{\delta}$$

tra i, j_m e δ.

Che relazione esiste tra i e j_m? Dato che valgono le seguenti[1] relazioni

$$\begin{cases} 1+i=\left(1+\dfrac{j_m}{m}\right)^m \\ \left(1+\dfrac{j_m}{m}\right)^m \geq 1+m\cdot\dfrac{j_m}{m}=1+j_m \end{cases} \Rightarrow \quad 1+i \geq 1+j_m$$

da cui si trova $i \geq j_m$, per ogni m, dove il segno di uguaglianza vale nel caso $m=1$.

Adesso occupiamoci dello sconto composto. Dalla condizione (3.1), relativa ai fattori finanziari coniugati, possiamo ricavare il fattore di sconto composto coniugato al fattore di montante composto che risulta

$$\phi(t)=\frac{1}{f(t)}=\frac{1}{(1+i)^t}=(1+i)^{-t}$$

che identifica il *regime finanziario dello sconto composto*, rappresentata graficamente da una curva che parte dal punto $(0,1)$, strettamente in discesa e convessa (vedi figura 3.2.(b)). Quindi, il valore attuale A con sconto composto d'una somma S disponibile alla data $t \geq 0$ risulta

$$A=S\cdot\phi(t)=\frac{S}{(1+i)^t}=S(1+i)^{-t} \tag{1.11}$$

da cui si ricava lo sconto D come differenza tra S e A.

Esempio 3.24 Il valore attuale di 12000 € disponibili tra due anni a tasso annuo d'interesse composto $i=12\%$ risulta

$$A=12000\cdot\phi(2)=12000\cdot 1.12^{-2}\approx 9566.33$$

mentre lo sconto vale $D=2433.67$ €.

Infine, utilizzando la seguente formula (sconto continuo/istantaneo)

$$A=S\cdot\phi(t)=S\cdot e^{-\delta t}$$

possiamo calcolare il valore oggi di una somma S disponibile alla data t utilizzando il tasso istantaneo d'interesse δ.

[1] Si ricorda la seguente disuguaglianza (di Bernoulli): $(1+x)^n \geq 1+nx$, per ogni reale $x \geq -1$ e per ogni naturale n.

1.2.4 Sconto commerciale e interesse semplice anticipato

In questo caso, a differenza dei due regimi finanziari precedenti, costruiremo prima, attraverso opportune delle ipotesi, il regime finanziario dello sconto commerciale e, succesivamente, ricaveremo il regime finanziario dell'interesse semplice anticipato.
Il regime finanziario dello sconto commerciale si costruisce facendo un'ipotesi sulla formazione dello sconto D richiesto nell'operazione di attualizzazione.

Ipotesi. Lo sconto D è direttamente proporzionale, secondo un coefficiente $d > 0$ (tasso annuo di sconto), all'ammontare del valore nominale S e alla durata dello sconto $t \geq 0$, cioè

$$D = S \cdot d \cdot t \tag{1.12}$$

Sottraendo dal valore nominale S lo sconto D si ottiene il valore attuale A, che risulta

$$A = S - D = S - S \cdot d \cdot t = S\,(1 - dt)$$

e, quindi, il fattore di sconto commerciale risulta $\phi\,(t) = 1 - dt$, rappresentata graficamente da un segmento di retta con estremi i punti $(0, 1)$ e $(1/d, 0)$ (figura 3.3.(a)).

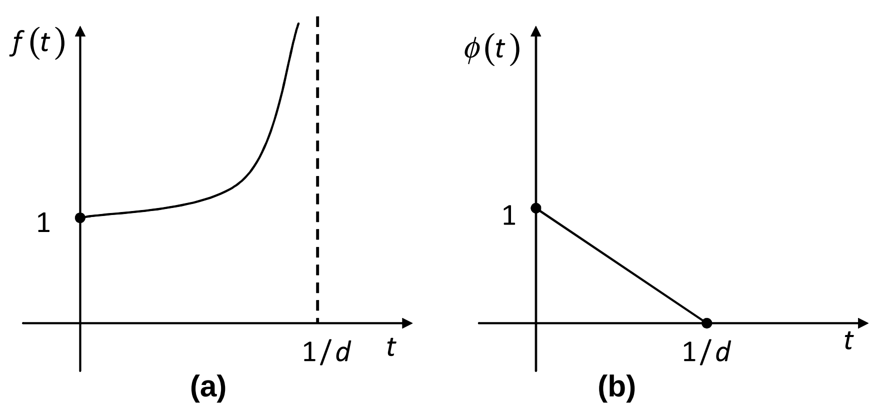

Figura 3.3

È chiaro che questa operazione ha significato finanziario per ogni durata $t \leq 1/d$, dato che per durate $t > 1/d$ il valore scontato sarebbe negativo! Tenendo conto di questo aspetto, possiamo scrivere il fattore di sconto commerciale come segue

$$\phi(t) = \begin{cases} 1 - dt & \text{per} \quad 0 \leq t \leq 1/d \\ 0 & \text{per} \quad t > 1/d \end{cases}$$

Esempio 3.25 Il valore oggi di un credito di 4000 € disponibile tra 3 mesi calcolato utilizzando il tasso annuo di sconto $d = 8\%$ è

$$A = 4000 \cdot \phi\left(\frac{3}{12}\right) = 4000\left(1 - 0.08 \cdot \frac{3}{12}\right) = 3920$$

da cui lo sconto $D = 80$ €.

Per finire, possiamo dire che si possono costruire altri modelli di attua liz zazione calibrati sulla durata dell'anticipazione t e/o sull'ammontare del valore nominale S da anticipare. Dal fattore di sconto commerciale possiamo ricavare il fattore di montante coniugato, che risulta

$$f(t) = \frac{1}{\phi(t)} = \frac{1}{1 - dt}$$

che permette di costruire il regime finanziario degli interessi semplici anticipati. Si osserva che:

- il fattore di montante $f(t)$ è definito solo per durate t strettamente minori di $1/d$;
- il fattore di montante $f(t)$ è rappresentato nel piano da una curva che parte dal punto $(0, 1)$, strettamente in salita e convessa e per t che si avvicina a $1/d$ diverge a $+\infty$ (vedi figura 3.3.(b)).

Infatti, il montante M di un capitale impiegato fino alla data t a interessi semplici anticipati vale

$$M = C \cdot f(t) = \frac{C}{1 - dt} \tag{1.13}$$

mentre l'interesse è la differenza tra M e C.

Esempio 3.26 Il montante di un capitale di 3400 € impiegati per 2 anni a interessi semplici anticipati con $d = 6\%$ risulta

$$M = 3400 \cdot f(2) = \frac{3400}{1 - 0.06 \cdot 2} = \frac{3400}{0.88} \approx 3863.64$$

da cui gli interessi $I = 463.64$ €.

Dalla (3.13) possiamo ricavare le seguenti formule inverse

$$C = M(1 - dt) \qquad t = \frac{1}{d}\left(1 - \frac{C}{M}\right) \qquad d = \frac{1}{t}\left(1 - \frac{C}{M}\right)$$

che ci permettono di ricavare, rispettivamente, il capitale, la durata e il tasso annuo di sconto una volta che conosciamo gli altri elementi.

1.3 Intensità istantanea d'interesse [CONSOB]

Consideriamo le seguenti operazione finanziarie relative all'impiego di 1 euro con diversa durata

(a)

Scadenze	0	t
Importi	-1	$f(t)$

(b)

Scadenze	0	$t+h$
Importi	-1	$f(t+h)$

con $h > 0$. Ci chiediamo a quale tasso annuo d'interesse occorre impiegare il montante $f(t)$ dell'operazione (a) da t a $t+h$ affinché risulti uguale al montante $f(t+h)$ dell'operazione (b)? Indicheremo questo tasso annuo d'interesse, che dipende sia da t e sia dalla lunghezza dell'*extra* impiego h, con $r(t,h)$. Nell'ipotesi che la durata h sia breve è normale legare gli elementi di questo *extra* impiego utilizzando la capitalizzazione semplice, quindi

$$f(t) \cdot [1 + r(t,h) \cdot h] = f(t+h)$$

da cui il tasso annuo d'interesse cercato risulta

$$r(t,h) = \frac{1}{h}\left[\frac{f(t+h)}{f(t)} - 1\right] = \frac{f(t+h) - f(t)}{h \cdot f(t)} \tag{1.14}$$

Se facciamo l'ipotesi che f sia differenziabile in t allora il numeratore della (3.14) si può scrivere come segue

$$f(t+h) - f(t) = f'(t) \cdot h + o(h)$$

da cui, sostituendo nella (3.14), s'ottiene

$$r(t,h) = \frac{f'(t) \cdot h + o(h)}{h \cdot f(t)} = \frac{f'(t)}{f(t)} + \frac{o(h)}{f(t)}$$

onde per h molto piccolo ($h \to 0$) si ha

$$r(t,h) \cong \frac{f'(t)}{f(t)} = \mathrm{D}[\ln f(t)] =: \rho(t)$$

che prende in nome di *intensità istantanea d'interesse (o tasso istantaneo d'interesse)* alla data t associata al fattore di montante $f(t)$. Prima di dare un significato a questa nuova funzione calcoliamo le intensità istantanee d'interesse per i tre regimi finanziari di capitalizzazione che abbiamo studiato nel precedente paragrafo, che risultano:

- per la capitalizzazione semplice

$$\rho(t) = \mathrm{D}[\ln(1+it)] = \frac{1}{1+it} \cdot \mathrm{D}[1+it] = \frac{i}{1+it}$$

- per la capitalizzazione composta

$$\rho(t) = \mathrm{D}\left[\ln(1+i)^t\right] = \ln(1+i) \cdot \mathrm{D}[t] = \ln(1+i)$$

- per la capitalizzazione a interessi semplici anticipati (con $t < 1/d$)

$$\rho(t) = \mathrm{D}\left[\ln(1-dt)^{-1}\right] = -\frac{1}{1-dt} \cdot \mathrm{D}[1-dt] = \frac{d}{1-dt}$$

Possiamo osservare che l'intensità istantanea d'interesse associata alla capitalizzazione composta non dipende dalla durata t, rispetto alle altre due dove la durata t è presente. Possiamo interpretare l'intensità istantanea d'interesse come il tasso annuo d'interesse semplice alla data t tale per cui i due impieghi (a) e (b) siano equivalenti alla data $t+h$.

Esempio 3.27 Un impiego di 15000 € in capitalizzazione semplice al tasso annuo d'interesse del 6% viene proposto per due diverse durate: 1 anno e 1 anno e due mesi. Il montanti associati alle due proposte d'impiego risultano:

- a un anno

$$M_1 = 15000 \cdot f(1) = 15000\,(1 + 0.06 \cdot 1) = 15900$$

- a un anno e due mesi

$$M_2 = 15000 \cdot f(14/12) = 15000 \left(1 + 0.06 \cdot \frac{14}{12}\right) = 16050$$

Ci si può chiedere a quale tasso annuo d'interesse tra un anno dovremo impiegare il montante M_1 per due mesi in modo da trovare M_2. Per rispondere a questa domanda è sufficiente calcolare l'intensità istantanea d'interesse associata al fattore di montante semplice e valutarla a un anno, ottenendo

$$\rho\,(t) = \frac{0.06}{1 + 0.06t} \quad \Rightarrow \quad \rho\,(1) = \frac{0.06}{1 + 0.06 \cdot 1} \approx 0.0566 = 5.66\%$$

Infatti, possiamo verificare agevolmente che

$$M_2^* = 15900 \cdot (1 + \rho\,(1) \cdot h) = 15900 \cdot \left(1 + 0.0566 \cdot \frac{2}{12}\right) \approx 16049.99$$

Un regime di capitalizzazione si può caratterizzare attraverso l'intensità istantanea d'interesse $\rho\,(t)$, infatti utilizzando la seguente formula

$$f(t) = \mathrm{e}^{\int_0^t \rho(s)\ \mathrm{d}s} \quad \text{oppure} \quad f\,(t) = \exp\left(\int_0^t \rho\,(s)\ \mathrm{d}s\right)$$

possiamo facilmente identificare il fattore di montante associato.

Esempio 3.28 Il fattore di montante associato all'intensità istantanea d'interesse $\rho\,(t) = 0.12\,(1 + 0.12t)^{-1}$, con $t \geq 0$, risulta

$$f(t) = \mathrm{e}^{\int_0^t 0.12(1+0.12s)^{-1}\mathrm{d}s} = \mathrm{e}^{[\ln(1+0.12s)]_0^t} = 1 + 0.12t$$

che identifica la legge finanziaria della capitalizzazione semplice con tasso annuo d'interesse 12%.

1.4 Scindibilità

Prendiamo due operazioni finanziarie così strutturate:

- **Operazione A**: s'impiega un capitale di un euro per una durata s (qualsiasi) ottenendo il montante $f(s)$, immediatamente questo montante si reimpiega alle stesse condizioni (iniziali) per una durata t ottenendo il montante $f(s) \cdot f(t)$ in $t+s$;
- **Operazione B**: s'impiega un capitale di un euro per una durata $t+s$ ottenendo il montante $f(t+s)$.

I montanti delle due operazioni in $t+s$ potranno essere diversi o uguali, quest'ultima possibilità è quella che a noi interessa sottolineare mediante la seguente definizione.

Definizione 3.29 Un fattore di montante si dice *scindibile* (per prodotto) se vale la condizione

$$f(s) \cdot f(t) = f(t+s) \tag{1.15}$$

per ogni coppia $t, s \geq 0$.

La scindibilità è una proprietà importante in quanto sancisce che il risultato finale di un'operazione non viene condizionato da eventuali impieghi e immediati reimpieghi eseguiti in date intermedie (con le stesse condizioni iniziali). Proviamo a controllare, utilizzando la (3.15), se i tre regimi finanziari studiati in precedenza godono di questa proprietà:

- il regime finanziario dell'interesse semplice non gode della proprietà della scindibilità, infatti applicando la definizione si ottiene

$$\begin{aligned} f(s) \cdot f(t) &= (1+is)(1+it) = 1 + i(s+t) + i^2 st \\ &> 1 + i(s+t) = f(t+s) \qquad \text{se } i > 0 \end{aligned}$$

per ogni $t, s > 0$, da cui si deduce che conviene interrompere l'impiego alla data intermedia s e poi cominciare un nuovo impiego fino alla scadenza $t+s$, realizzando un guadagno pari a

$$f(s) \cdot f(t) - f(t+s) = i^2 st > 0$$

- il regime finanziario dell'interesse semplice anticipato non gode della proprietà della scindibilità mostrando la seguente disuguaglianza $f(s) \cdot f(t) < f(t+s)$, per ogni $t, s > 0$, il che implica che eventuali interruzioni d'impiego non sono convenienti;

- il regime finanziario dell'interesse composto è l'unico che gode della proprietà della scindibilità, infatti applicando la condizione (3.15) ab bia mo

$$f(s) \cdot f(t) = (1+i)^s \cdot (1+i)^t = (1+i)^{t+s} = f(t+s)$$

  per ogni $t, s \geq 0$.

Esiste un teorema che permette di stabilire se un fattore di montante gode della proprietà della scindibilità sulla base della sua intensità istantanea d'interesse $\rho(t)$.

Teorema 3.30 Un fattore di montante $f(t)$ è scindibile se e solo se l'intensità istantanea d'interesse $\rho(t)$ non dipende dalla durata t, cioè

$$f(t) \text{ scindibile} \quad \Leftrightarrow \quad \rho(t) \text{ costante}$$

Dato che la capitalizzazione composta è l'unica con intensità istantanea d'interesse costante, ne consegue che solo la capitalizzazione composta gode della proprietà di scindibilità.

1.5 Rendite finanziarie

1.5.1 Generalità e classificazione delle rendite

Nei paragrafi precedenti abbiamo visto come valutare un singolo capitale attraverso la ricerca del montante nella capitalizzazione e del valore attuale nell'attualizzazione. Adesso cerchiamo di generalizzare questo processo per poter valutare più capitali disponibili in epoche diverse.

Definizione 3.31 Una operazione finanziaria del tipo

Scadenze	t_1	t_2	t_3	$\cdots$	t_s	$\cdots$	t_n
Importi	R_1	R_2	R_3	$\ldots$	R_s	$\ldots$	R_n

dove gli importi hanno tutti lo stesso segno si dice *rendita finanziaria*. Gli importi R_s si dicono *termini* o *rate* della rendita, mentre le date t_s si dicono *scadenze* della rendita (con $s = 1, 2, ..., n$).

Esempio 3.32 La seguente operazione finanziaria

Anni	1	1/2	2	4
Importi	500	300	300	1500

;

si può considerare come una rendita ($R_s > 0$), a differenza di questa

Anni	2	5/2	4	6
Importi	-50	50	-50	150

dove le rate non hanno lo stesso segno e che diremo (semplicemente) operazione finanziaria.

Possiamo fare una piccola classificazione, non esaustiva, delle rendite sulla base di due elementi: manifestazione delle rate e ammontare delle rate. Infatti:

1. **Manifestazioni delle rate:** se tutte le rate della rendita si manifestano alla fine di ogni periodo la rendita si dirà *posticipata*, altrimenti se si manifestano all'inizio di ogni periodo la rendita si dirà *anticipata*.

2. **Ammontare delle rate**: se tutti gli ammontari delle rate della rendita sono uguali allora la rendita si dirà a *rate costanti* (cioè $R_1 = R_2 = \cdots = R_n$), altrimenti se almeno l'ammontare di una rata è diverso dai rimanenti allora la rendita si dirà a *rate variabili*.

Rendite con rate costanti e scadenze regolari delle rate (per esempio, annuali, semestrali, mensili e così via) saranno più semplici da valutare attraverso l'uso di alcune formule particolari.

Esempio 3.33 La rendita (a cinque anni) seguente

Anni	1	2	3	4	5
Importi	100	300	500	1500	2000

è posticipata con rate (annue) variabili. Mentre la rendita

Mesi	0	1	2	3	4	5
Importi	400	400	400	400	400	400

è anticipata con rate (mensili) costanti.

Come visto per la valutazione di un singolo capitale, anche per le rendite possiamo procede nella ricerca del suo valore a una scadenza particolare utilizzando i regimi finanziari di capitalizzazione e attualizzazione visti prima. Distingueremo i seguenti casi nella valutazione:

1. rendite posticipate;
2. rendite anticipate;

Infine, faremo un piccolo cenno alle rendite *perpetue* (o *illimitate*).

1.5.2 Valutazione di una rendita posticipata

Consideriamo una rendita finanziaria posticipata con rate variabili del tipo

Scadenze	t_1	t_2	$\cdots$	t_k	$\cdots$	t_{n-1}	t_n
Importi	R_1	R_2	$\cdots$	R_k	$\cdots$	R_{n-1}	R_n

e i fattori finanziari di capitalizzazione $f(t)$ e di sconto $\phi(t)$. Indichiamo con V_{t_k} il valore della rendita alla scadenza t_k (con $k = 0, 1, ..., n$) e indichiamo con T la scadenza finale della rendita (con $T = t_n$).
Possiamo valutare questa rendita a tre scadenze particolari:

- in $t_0 = 0$, cioè oggi, il che vuole dire calcolare il *valore attuale della rendita* che si ottiene come somma dei valori attuali delle singole rate della rendita

$$V_0 = R_1 \cdot \phi(t_1) + \cdots + R_n \cdot \phi(t_n) = \sum_{s=1}^{n} R_s \cdot \phi(t_s)$$

- in $t_n = T$, cioè alla scadenza dell'ultima rata, il che vuol dire calcolare il *montante* o *valore finale della rendita* che si ottiene come somma dei montanti delle singole rate della rendita

$$V_T = R_1 \cdot f(T - t_1) + \cdots + R_n \cdot f(T - t_n) = \sum_{s=1}^{n} R_s \cdot f(T - t_s)$$

- in t_k, che si ottiene facendo la somma di tutti i montanti delle rate della rendita che si manifestano prima di tale scadenza e di tutti i valori attuali delle rate della rendita che si manifestano dopo tale scadenza, cioè

$$V_{t_k} = \sum_{s=1}^{k} R_s \cdot f(t_k - t_s) + \sum_{s=k+1}^{n} R_s \cdot \phi(t_s - t_k)$$

Esempio 3.34 Consideriamo la seguente rendita posticipata

Anni	1	3/2	3
Importi	500	300	1500

Utilizzando il tasso annuo d'interesse semplice $i = 3\%$, quindi avremo i fattori finanziari $f(t) = 1 + 0.03t$ e $\phi(t) = (1 + 0.03t)^{-1}$, possiamo valutare la seguente rendita a diverse date, per esempio:

- alla data 0, cioè ricerca del valore attuale della rendita, che risulta

$$\begin{aligned} V_0 &= 500 \cdot \phi(1) + 300 \cdot \phi(3/2) + 1500 \cdot \phi(3) \\ &= \frac{500}{1 + 0.03} + \frac{300}{1 + 0.03 \cdot 1.5} + \frac{1500}{1 + 0.03 \cdot 3} \approx 2148.67 \end{aligned}$$

- alla data 3/2, cioè

$$\begin{aligned} V_{3/2} &= 500 \cdot f(1) + 300 \cdot f(0) + 1500 \cdot \phi(3/2) \\ &= 500 \cdot [1 + 0.03 \cdot 0.5] + 300 + \frac{1500}{1 + 0.03 \cdot 1.5} \approx 2242.91 \end{aligned}$$

- alla data 3, cioè ricerca del montante della rendita, che risulta

$$\begin{aligned} V_3 &= 500 \cdot f(2) + 300 \cdot f(3/2) + 1500 \cdot f(0) \\ &= 500\,[1 + 0.03 \cdot 2] + 300\,[1 + 0.03 \cdot 1.5] + 1500 \approx 2343.5 \end{aligned}$$

Nel caso di rate annue costanti ($t_s = s$ e $R_s = R$ per ogni $s = 1, 2, ..., n$) e fattori finanziari composti si hanno le seguenti formule particolari:

- per il valore attuale in 0 si ha

$$V_0 = \sum_{s=1}^{n} \frac{R}{(1+i)^s} = R \sum_{s=1}^{n} (1+i)^{-s} = R \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

- per il valore finale alla data n, cioè alla scadenza dell'ultima rata, si ha

$$V_n = R\,(1+i)^n \sum_{s=1}^{n} (1+i)^{-s} = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

- per il valore alla data intermedia k (con k intero e $0 \leq k \leq n$), si ha

$$\begin{aligned} V_k &= \sum_{s=1}^{k} R\,(1+i)^{k-s} + \sum_{s=k+1}^{n} R\,(1+i)^{s-k} \\ &= R \cdot \frac{(1+i)^k - 1}{i} + R \cdot \frac{1 - (1+i)^{k-n}}{i} \end{aligned}$$

Osservazione 3.35 Spesso si usano i seguenti simboli finanziari

$$a_{\overline{n}|i} := \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \qquad \text{e} \qquad s_{\overline{n}|i} := \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

che si leggono, rispettivamente, "a posticipato figurato n al tasso i" e "s posticipato figurato n al tasso i" (dove n rappresenta il numero delle rate della rendita). Utilizzando questi simboli possiamo scrivere le formule precedenti come segue

$$V_0 = R \cdot a_{\overline{n}|i} \qquad V_n = R \cdot s_{\overline{n}|i} \qquad V_k = R \cdot s_{\overline{k}|i} + R \cdot a_{\overline{n-k}|i}$$

con k intero e $0 \leq k \leq n$.

Esempio 3.36 Consideriamo una rendita posticipata formata da 12 rate annue costanti ciascuna d'importo pari a 1500 €. Utilizzando il tasso annuo d'interesse composto $i = 4\%$ possiamo calcolare:

- il valore attuale A (cioè in 0) della rendita

$$A = 1500 \cdot a_{\overline{12}|0.04} = 1500 \cdot \frac{1 - 1.04^{-12}}{0.04} \approx 14077.61$$

- il montante M della rendita (alla scadenza dell'ultima rata)

$$M = 1500 \cdot s_{\overline{12}|0.04} = 1500 \cdot \frac{1.04^{12} - 1}{0.04} \approx 22538.71$$

- il valore della rendita alla data 3

$$\begin{aligned} V_3 &= 1500 \cdot s_{\overline{3}|0.04} + 1500 \cdot a_{\overline{9}|0.04} \\ &= 1500 \cdot \left[\frac{1.04^3 - 1}{0.04} + \frac{1 - 1.04^{-9}}{0.04} \right] \approx 15835.40 \end{aligned}$$

Per calcolare il valore della rendita dopo 3 anni e sei mesi è sufficiente moltiplicare il valore della rendita a tre anni, cioè V_3, per il fattore di montante a sei mesi ottenendo

$$V_{3.5} = V_3 \cdot f\,(6/12) = 15835.40 \cdot 1.04^{0.5} \approx 16149$$

1.5.3 Valutazione d'una rendita anticipata

Consideriamo una rendita finanziaria anticipata con rate variabili del tipo

Scadenze	t_0	t_1	$\cdots$	t_{k-1}	$\cdots$	t_{n-2}	t_{n-1}
Importi	R_1	R_2	$\cdots$	R_k	$\cdots$	R_{n-2}	R_n

e i fattori finanziari di capitalizzazione $f(t)$ e di sconto $\phi(t)$. Indichiamo con V_{t_k} il valore della rendita alla scadenza t_k (con $k = 0, 1, ..., n$) e indichiamo con T la scadenza finale della rendita (con $T = t_n$).
Possiamo valutare questa rendita a tre scadenze particolari:

- in $t_0 = 0$, cioè oggi, il che vuole dire calcolare il valore attuale della rendita che si ottiene come somma dei valori attuali delle singole rate della rendita
$$V_0 = R_1 \cdot \phi(t_0) + \cdots + R_n \cdot \phi(t_{n-1}) = \sum_{s=1}^{n} R_s \cdot \phi(t_{s-1})$$
- in $t_n = T$, il che vuol dire calcolare il montante o valore finale della rendita che si ottiene come somma dei montanti delle singole rate della rendita
$$V_T = R_1 \cdot f(T - t_0) + \cdots + R_n \cdot f(T - t_{n-1}) = \sum_{s=1}^{n} R_s \cdot f(T - t_{s-1})$$
- in t_k, che si ottiene facendo la somma di tutti i montanti delle rate della rendita che si manifestano prima di tale scadenza e di tutti i valori attuali delle rate della rendita che si manifestano dopo tale scadenza
$$V_{t_k} = \sum_{s=1}^{k} R_s \cdot f(t_k - t_{s-1}) + \sum_{s=k+1}^{n} R_s \cdot \phi(t_{s-1} - t_k)$$

Esempio 3.37 Consideriamo la seguente rendita anticipata con rate annue variabili

Anni	0	1	2
Importi	500	300	1500

Utilizzando il tasso annuo d'interesse semplice $i = 3\%$ possiamo valutare la seguente rendita a diverse date, per esempio:

- alla data 0 si ha

$$V_0 = 500 + \frac{300}{1+0.03} + \frac{1500}{1+0.03\cdot 2} \approx 2206.36$$

- alla data 1 si ha

$$V_1 = 500\cdot[1+0.03\cdot 1] + 300 + \frac{1500}{1+0.03\cdot 1} \approx 2271.31$$

- alla data 3 si ha

$$V_3 = 500\,[1+0.03\cdot 3] + 300\,[1+0.03\cdot 2] + 1500\,[1+0.03\cdot 1] = 2408$$

Nel caso di rate annue costanti e fattori finanziari composti si hanno le seguenti formule particolari:

- per il valore attuale in 0, si ha

$$V_0 = \sum_{s=1}^{n} \frac{R}{(1+i)^{s-1}} = R\,(1+i)\sum_{s=1}^{n}(1+i)^{-s} = R\,(1+i)\,a_{\overline{n}|i}$$

- per il valore finale alla data n, cioè alla scadenza dell'ultima rata, si ha

$$V_n = \sum_{s=1}^{n} R\,(1+i)^{n-(s-1)} = R\,(1+i)^{n+1}\sum_{s=1}^{n}(1+i)^{-s} = R\,(1+i)\,s_{\overline{n}|i}$$

- per il valore alla data intermedia k (con k intero e $0 \le k \le n$), si ha

$$V_k = R\cdot(1+i)\,s_{\overline{k}|i} + R\cdot(1+i)\,a_{\overline{n-k}|i}$$

Osservazione 3.38 Valgono le seguenti relazioni

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i} := (1+i)\cdot s_{\overline{n}|i} \qquad \text{e} \qquad \ddot{a}_{\overline{n}|i} := (1+i)\cdot a_{\overline{n}|i}$$

dove $\ddot{s}_{\overline{n}|i}$ si legge "s anticipato figurato n al tasso i" e $\ddot{a}_{\overline{n}|i}$ si legge "a anticipato figurato n al tasso i".

Esempio 3.39 Consideriamo la seguente rendita anticipata con rate annue costanti

Anni	0	1	2	3	4	5
Importi	800	800	800	800	800	800

Il valore attuale della rendita al tasso annuo d'interesse composto $i = 5\%$ vale

$$V_0 = 800 \cdot \ddot{a}_{\overline{6}|0.05} = 800 \cdot 1.05 \cdot a_{\overline{6}|0.05} = 800 \cdot 1.05 \cdot \frac{1 - 1.05^{-6}}{0.05} \approx 4263.58$$

mentre il montante, con lo stesso tasso, risulta

$$M = 800 \cdot \ddot{s}_{\overline{6}|0.05} = 800 \cdot 1.05 \cdot s_{\overline{6}|0.05} = 800 \cdot 1.05 \cdot \frac{1.05^6 - 1}{0.05} \approx 5713.61$$

1.5.4 Valutazione d'una rendita perpetua

Consideriamo una rendita finanziaria perpetua con rate annue costanti, cioè del tipo

Scadenze	1	2	3	$\cdots$	n	$\cdots$
Importi	R	R	R	$\cdots$	R	$\cdots$

ossia quando il flusso di cassa descritto dalla rendita non si arresta mai. Il montante di questa rendita non si può definire (infatti fissando qualsiasi scadenza per la valutazione avremo sempre successivi flussi di cassa), mentre il valore attuale, utilizzando il tasso annuo d'interesse composto i, risulta

$$V_0 = \frac{R}{i}$$

formula che trova una forte applicazione nella valutazione di titoli azionari sotto l'ipotesi che paghino dividendi costanti e illimitati nel tempo.

Esempio 3.40 Si vuole calcolare il valore oggi di una azione (di una società non quotata) sapendo che:

1. tra un anno pagherà un dividendo di 0.12 € per ogni azione;

2. il dividendo verrà pagato per un numero illimitato di anni.

Utilizzando nella valutazione il tasso annuo d'interesse composto del 2.5%, si ha

$$V_0 = \frac{0.12}{0.025} = 4.8$$

che rappresenta il valore oggi dell'azione in caso di vendita. Chiaramente se siamo in possesso di 1500 azioni il valore di cessione del pacchetto azionario risulterà

$$V = 1500 \cdot 4.8 = 6300$$

In caso di rendita perpetua a rata annua anticipata, cioè del tipo

Scadenze	0	1	2	$\cdots$	n	$\cdots$
Importi	R	R	R	$\cdots$	R	$\cdots$

il valore attuale risulterà

$$V_0 = \frac{R}{i} \cdot (1 + i)$$

1. Consideriamo la rendita finanziaria

Anni	1	2	3	4	5
Importi	200	200	200	200	200

Capitolo 2

Rimborso di un prestito

2.1 Forme di rimborso di un prestito

Consideriamo un'azienda che si finanzia per un'ammontare S per la durata n (in anni). Esistono tre forme diverse per rimborsare un prestito, che sono:

1. Rimborso globale alla scadenza n: in questo caso alla scadenza finale viene restituito il capitale preso a prestito e saranno pagati gli interessi maturati, cioè si verserà il montante del prestito.

2. Rimborso globale alla scadenza n del capitale e pagamento periodico degli interessi: in questo caso l'ammontare prestato viene rimborsato alla scadenza n, mentre gli interessi vengono pagati periodicamente come da contratto (alla fine di ogni mese, di ogni semestre e così via).

3. Rimborso periodico del capitale prestato e degli interessi: in questo caso si pagano periodicamente, come da contratto, parte del capitale prestato e parte degli interessi, attraverso il pagamento di rate di rimborso. Indicanco con C_s la quota per il rimborso della parte di capitale e con I_s la quota per il pagamento degli interessi, la rata di rimborso (posticipata o anticipata) alla data s risulta

$$R_s = C_s + I_s$$

con $s = 1, 2, ..., n$.

Esempio 4.1 Un'azienda si finanzia per un ammontare di 24000 € per una durata di 4 anni al tasso annuo d'interesse composto del 4.5%. Guardiamo all'operazione dal punto di vista della banca. Per il rimborso si possono presentare i seguenti casi:

- rimborso alla fine del quarto anno del capitale e degli interessi dovuti

$$M = 24000 \cdot f\,(4) = 24000 \cdot 1.045^4 = 28620.45$$

  quindi i flussi di cassa associati all'operazione sono

Anni	0	4
Importi	-24000	28620.45

- rimborso alla fine del quarto anno dell'ammontare prestato e pagamento alla fine di ogni anno degli interessi dovuti, cioè $I = 24000 \cdot 0.045 = 1080$, generado i seguenti flussi di cassa di rimborso

Anni	0	1	2	3	4
Importi	-24000	1080	1080	1080	25080

- pagamento periodico di parte del capitale finanziato e degli interessi maturati, per esempio

Anni	0	1	2	3	4
Importi	-24000	5080	8900	8540	4180

Solo la terza forma di rimborso, cioè il pagamento periodico sia di parte del capitale e sia degli interessi dovuti, si dice *ammortamento graduale di un prestito*. Nel prossimo paragrafo affronteremo le regole di base di ogni ammortamento e tratteremo alcuni ammortamenti di uso comune.

2.2 Ammortamento di un prestito

2.2.1 Generalità

Un'azienda si finanzia per un ammontare S per una durata di n anni al tasso annuo d'interesse i. Gli elementi di base che entrano in giuoco nell'ammortamento d'un capitale sono:

- C_s *quota di capitale* alla data s (con $s = 1, 2, ..., n$);
- I_s *quota di interessi* alla data s (con $s = 1, 2, ..., n$);
- R_s *rata d'ammortamento* alla data s (con $s = 1, 2, ..., n$), che risulta

$$R_s = C_s + I_s$$

- D_s *debito residuo* alla data s (con $s = 0, 1, 2, ..., n$), che rappresenta l'ammontare di capitale ancora da rimborsare alla data s, cioè

$$D_s = C_{s+1} + C_{s+2} + \cdots + C_n = \sum_{k=s+1}^{n} C_k$$

  con $D_0 = S$ e $D_n = 0$.

- E_s *debito estinto* alla data s (con $s = 0, 1, 2, ..., n$), che rappresenta l'ammontare di capitale rimborsato alla data s, cioè

$$E_s = C_1 + C_2 + \cdots + C_s = \sum_{k=1}^{s} E_k$$

  con $E_0 = 0$ e $E_n = S$.

Valgono le seguenti relazioni:

1. il debito residuo alla data s s'ottiene sottraendo dal debito residuo alla data $s - 1$ la quota di capitale alla data s (con $s = 1, 2, ..., n$), cioè

$$\begin{cases} D_0 = S \\ D_s = D_{s-1} - C_s \end{cases}$$

2. la somma del debito residuo e del debito estinto alla data s coincide sempre con l'ammontare finanziato (con $s = 0, 1, 2, ..., n$), cioè

$$D_s + E_s = S$$

3. la quota interessi alla data s si ottiene moltiplicando il debito residuo alla data $s-1$ per il tasso annuo d'interesse (con $s = 1, 2, ..., n$), cioè

$$I_s = D_{s-1} \cdot i$$

Osservazione 4.2 Possiamo esprimere la rata R_s usando i debiti residui, infatti da $D_s = D_{s-1} - C_s$ e ricordando che

$$C_s = R_s - I_s = R_s - i \cdot D_{s-1}$$

e, pertanto, si ottiene

$$D_s = D_{s-1} - (R_s - i \cdot D_{s-1}) \quad \Rightarrow \quad R_s = D_{s-1}(1+i) - D_s \tag{2.1}$$

Per ogni tipo di ammortamento devono valere le seguenti condizioni di chiusura, tra loro equivalenti:

- condizione di *chiusura elementare*

$$C_1 + C_2 + \cdots + C_n = S \tag{2.2}$$

  ossia la somma delle quote di capitale deve essere uguale all'ammontare finanziato.

- condizione di *chiusura finanziaria iniziale*

$$S = R_1 \cdot \phi(t_1) + R_2 \cdot \phi(t_2) + \cdots + R_n \cdot \phi(t_n) \tag{2.3}$$

  cioè che la somma dei valori attuali delle rate di rimborso, con fattore di sconto $\phi(t)$, deve coincidere con l'ammontare finanziato.

- condizione di *chiusura finanziaria finale*

$$S \cdot f(n) = R_1 \cdot f(n-t_1) + R_2 \cdot f(n-t_2) + \cdots + R_n \cdot f(n-t_n) \tag{2.4}$$

  cioè che la somma dei montanti delle rate di rimborso alla scadenza n, con fattore di montante $f(t)$, deve coincidere con l'ammontare finanziato capitalizzato a scadenza.

Utilizzando il simbolo di sommatoria e i regimi finanziari dell'interesse e dello sconto composto, le tre condizioni di chiusura si possono scrivere

$$\sum_{s=1}^{n} C_s = S \qquad S = \sum_{s=1}^{n} R_s (1+i)^{-s} \qquad S(1+i)^n = \sum_{s=1}^{n} R_s (1+i)^{n-s}$$

Osservazione 4.3 Usando i fattori finanziari $f(t) = (1+i)^t$ e $\phi(t) = (1+i)^{-t}$, con $t \geq 0$, possiamo mostrare che le condizioni finanziarie di chiusura iniziale e finale e la condizione di chiusura elementare sono equivalenti, cioè:

- moltiplicando per $(1+i)^n$ ambo i membri della condizione di chiusura finanziaria iniziale s'ottiene

  $$S(1+i)^n = (1+i)^n \sum_{s=1}^{n} R_s (1+i)^{-s} \;\Rightarrow\; S(1+i)^n = \sum_{s=1}^{n} R_s (1+i)^{n-s}$$

  che rappresenta la condizione di chiusura finanziaria finale.

- utilizzando la (4.1) possiamo scrivere la condizione di chiusura finanziaria iniziale come segue

  $$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{n} R_s (1+i)^{-s} &= \sum_{s=1}^{n} \left[D_{s-1}(1+i) - D_s\right](1+i)^{-s} = \\ &= \sum_{s=1}^{n} D_{s-1}(1+i)^{-(s-1)} - \sum_{s=1}^{n} D_s (1+i)^{-s} \end{aligned}$$

  ma utilizzando alcune proprietà della sommatoria abbiamo

  $$\sum_{s=1}^{n} D_{s-1}(1+i)^{-(s-1)} = D_0 + \sum_{s=2}^{n} D_{s-1}(1+i)^{-(s-1)}$$

  e

  $$\sum_{s=1}^{n} D_s (1+i)^{-s} = \sum_{s=2}^{n} D_{s-1}(1+i)^{-(s-1)} + D_n$$

da cui, con una semplice sostituzione e rammentando che $D_n = 0$, si ottiene

$$\sum_{s=1}^{n} R_s (1+i)^{-s} = D_0 - D_n = S = \sum_{s=1}^{n} C_s$$

e, pertanto, l'equivalenza è provata.

Esiste una relazione (ricorsiva) che lega i debiti residui D_{s-1} (in data t_{s-1}) e D_s (in data t_s) con la rata R_s, cioè

$$\begin{cases} D_0 = S \\ \\ D_s = D_{s-1} \cdot (1+i)^{t_s - t_{s-1}} - R_s \end{cases}$$

con $s = 1, 2, ..., n$.

Per costruire il piano d'ammortamento d'un prestito possiamo usare due impostazioni:

- elementare;
- finanziaria.

2.2.2 Impostazione elementare

La costruzione di un ammortamento con impostazione elementare parte dalla condizione di chiusura elementare, sancita dalla (4.2). In questo caso sono fissate le quote di capitale C_s, con $s = 1, 2, ..., n$, con l'unico vincolo che la loro somma sia uguale all'ammontare finanziato S. La scelta degli ammontari delle quote di capitale dipende solo dalle controparti che intervengono nel contratto di finanziamento. Per esempio, per una *start-up* (o per un'azienda in difficoltà finanziarie) si possono prevedere quote di capitale all'inizio molto basse e alla fine più alte, mentre per un'azienda ben avviata di solito le quote di capitale sono costanti.
Per costruire un piano di ammortamento con l'impostazione elementare si procede come segue:

- si fissano gli ammontari delle quote di capitale C_s (con $s = 1, 2, ..., n$) rispettando il vincolo (4.2) della condizione di chiusura elementare;
- si usano le relazioni di base per determinare le quote interessi I_s, le rate R_s, i debiti residui D_s e i debiti estinti E_s (con $s = 1, 2, ..., n$);
- ci costruisce una tabella dove si riportano tutti gli elementi dell'ammortamento (detto *piano d'ammortamento finanziario*).

Esempio 4.4 Un'azienda di nuova costituzione ottiene un finanziamento di 30000 € da rimborsare attraverso il pagamento di 5 rate annue posticipate al tasso annuo d'interesse del 5%. Le quote di capitale sono

$$C_1 = 3000 \qquad C_2 = 3000 \qquad C_3 = 8000 \qquad C_4 = 8000 \qquad C_5 = 8000$$

Costruiamo il piano d'ammortamento, utilizzando le relazioni viste in precedenza, anno per anno:

- la quota interessi I_1 e la rata R_1 alla fine del primo anno saranno

$$I_1 = 0.05 \cdot 30000 = 1500 \qquad R_1 = 3000 + 1500 = 4500$$

  mentre il debito residuo e il debito estinto risultano

$$D_1 = 30000 - 3000 = 27000 \qquad E_1 = C_1 = 3000$$

  e, quindi, il piano di ammortamento alla fine del primo anno sarà

Anni	$\mathbf{R}_t$	$\mathbf{C}_t$	$\mathbf{I}_t$	$\mathbf{D}_t$	$\mathbf{E}_t$
0	–	–	–	30000	0
1	4500	3000	1500	27000	3000

- la quota interessi I_2 e la rata R_2 alla fine del secondo anno saranno

$$I_2 = 0.05 \cdot 27000 = 1350 \qquad R_2 = 3000 + 1350 = 4350$$

  mentre il debito residuo e il debito estinto risultano

$$D_2 = 27000 - 3000 = 24000 \qquad E_2 = 3000 + 3000 = 6000$$

e, quindi, il piano di ammortamento alla fine del secondo anno sarà

Anni	$\mathbf{R}_t$	$\mathbf{C}_t$	$\mathbf{I}_t$	$\mathbf{D}_t$	$\mathbf{E}_t$
0	–	–	–	30000	0
1	4500	3000	1500	27000	3000
2	4350	3000	1350	24000	6000

- la quota interessi I_3 e la rata R_3 alla fine del terzo anno saranno

$$I_3 = 0.05 \cdot 24000 = 1200 \qquad R_3 = 8000 + 1200 = 9200$$

mentre il debito residuo e il debito estinto risultano

$$D_3 = 24000 - 8000 = 16000 \qquad E_3 = 6000 + 8000 = 14000$$

e, quindi, il piano di ammortamento alla fine del terzo anno sarà

Anni	$\mathbf{R}_t$	$\mathbf{C}_t$	$\mathbf{I}_t$	$\mathbf{D}_t$	$\mathbf{E}_t$
0	–	–	–	30000	0
1	4500	3000	1500	27000	3000
2	4350	3000	1350	24000	6000
3	9200	8000	1200	16000	14000

- la quota interessi I_4 e la rata R_4 alla fine del quarto anno saranno

$$I_4 = 0.05 \cdot 16000 = 800 \qquad R_4 = 8000 + 800 = 8800$$

mentre il debito residuo e il debito estinto risultano

$$D_4 = 16000 - 8000 = 8000 \qquad E_4 = 14000 + 8000 = 22000$$

e, quindi, il piano di ammortamento alla fine del quarto anno sarà

Anni	$\mathbf{R}_t$	$\mathbf{C}_t$	$\mathbf{I}_t$	$\mathbf{D}_t$	$\mathbf{E}_t$
0	–	–	–	30000	0
1	4500	3000	1500	27000	3000
2	4350	3000	1350	24000	6000
3	9200	8000	1200	16000	14000
4	8800	8000	800	8000	22000

- la quota interessi I_5 e la rata R_5 alla fine del quinto anno saranno

$$I_4 = 0.05 \cdot 8000 = 400 \qquad R_4 = 8000 + 400 = 8400$$

mentre il debito residuo e il debito estinto risultano

$$D_4 = 8000 - 8000 = 0 \qquad E_4 = 22000 + 8000 = 30000$$

e, quindi, il piano di ammortamento alla fine del quinto anno sarà

Anni	$\mathbf{R}_t$	$\mathbf{C}_t$	$\mathbf{I}_t$	$\mathbf{D}_t$	$\mathbf{E}_t$
0	–	–	–	30000	0
1	4500	3000	1500	27000	3000
2	4350	3000	1350	24000	6000
3	9200	8000	1200	16000	14000
4	8800	8000	800	8000	22000
5	8400	8000	400	0	30000

Il *monte interessi* dell'ammortamento, cioè la somma di tutte le quote interessi generate dall'ammortamento, risulta

$$\sum_{s=1}^{5} I_s = 1500 + 1350 + 1200 + 800 + 400 = 5250$$

Nell'ipotesi in cui tutte le quote di capitale C_s siano uguali, cioè $C_s = C$ per ogni s, dalla condizione di chiusura elementare (4.2) si ha

$$C + C + \cdots + C = \sum_{s=1}^{n} C = S \qquad \text{ossia} \qquad n \cdot C = S$$

dalla quale possiamo ricavare l'ammontare della quota costante di capitale

$$C = \frac{\text{Ammontare finanziato}}{\text{Numero di quote di capitale}} = \frac{S}{n}$$

Definizione 4.5 Un ammortamento con quota costante di capitale si dice ammortamento di tipo *uniforme* o *italiano*.

Possiamo osservare che le rate e le quote interessi decrescono costantemente ogni anno per un ammontare pari a $-iC$, infatti

$$R_{s+1} - R_s = I_{s+1} - I_s = i\,(D_s - D_{s-1}) = -iC$$

con $s = 1, 2, ..., n$ (rammentando che $C_s = D_{s-1} - D_s$).

Esempio 4.6 Riprendiamo i dati dell'esempio precedente: finanziamento di 30000 € da rimborsare attraverso il pagamento di 5 rate annue posticipate al tasso annuo d'interesse del 5%. Se si usa l'ammortamento di tipo uniforme allora l'ammontare costante della quota di capitale è

$$C = \frac{30000}{5} = 6000$$

da cui, utilizzando la stessa procedura dell'esempio precedente, si ottiene il seguente piano d'ammortamento finanziario

Anni	$\mathbf{R}_t$	$\mathbf{C}_t$	$\mathbf{I}_t$	$\mathbf{D}_t$	$\mathbf{E}_t$
0	–	–	–	30000	0
1	7500	6000	1500	24000	6000
2	7200	6000	1200	18000	12000
3	6900	6000	900	12000	18000
4	6600	6000	600	6000	24000
5	6300	6000	300	0	30000

con monte-interessi pari a 4500 €.

2.2.3 Impostazione finanziaria

La costruzione di un ammortamento con l'impostazione finanziaria parte dalla condizione di chiusura finanziaria iniziale di un ammortamento, cioè dalla (4.3). Consideriamo un finanziamento d'ammontare S da restituire in n anni mediante rate posticipate a tasso annuo d'interesse composto i.
Per costruire un piano di ammortamento con l'impostazione finanziaria si procede come segue:

- si fissano le rate R_s in modo coerente il vincolo (4.3);

- si usano le relazioni di base per determinare le quote interessi I_s, le quote di capitale C_s, i debiti residui D_s e i debiti estinti E_s (con $s = 1, 2, ..., n$).
- si costruisce una tabella dove si riportano tutti gli elementi dell'ammortamento (che si dice *piano d'ammortamento finanziario*).

Esempio 4.7 Un'azienda ottiene un finanziamento per un ammontare di 24000 €, al tasso annuo d'interesse composto del 7%, da rimborsare mediante il pagamento di tre rate annue costanti posticipate. La seconda rata è maggiore del 10% rispetto la prima, mentre la terza rata è maggiore del 20% rispetto alla prima. Indicando con R_1 l'ammontare della prima rata possiamo esprimere gli ammontari della seconda e terza rata in funzione della prima, cioè

$$R_2 = (1 + 0.1) \cdot R_1 = 1.1R_1 \qquad R_3 = (1 + 0.2) \cdot R_1 = 1.2R_1$$

Tenendo conto del profilo delle rate di rimborso, possiamo scrivere la condizione di chiusura finanziaria iniziale dell'ammortamento

$$24000 = \frac{R_1}{1 + 0.07} + \frac{1.1R_1}{(1 + 0.07)^2} + \frac{1.2R_1}{(1 + 0.07)^3}$$

da cui il minimo comune multiplo e il raccoglimento a fattore comune della rata R_1 a secondo membro portano

$$24000 \cdot 1.07^3 = R_1 \cdot \left[1.07^2 + 1.1 \cdot 1.07 + 1.2\right]$$

e, quindi, l'ammontare della prima rata risulta

$$R_1 = \frac{24000 \cdot 1.07^3}{1.07^2 + 1.1 \cdot 1.07 + 1.2} \approx 8348.06$$

Pertanto, le tre rate annue posticipate valgono

$$R_1 = 8348.06 \qquad R_2 = 1.1 \cdot R_1 = 9182.87 \qquad R_3 = 1.1 \cdot R_2 = 10017.67$$

Costruiamo il piano di ammortamento, utilizzando le relazioni viste in precedenza, anno per anno:

- la quota interessi I_1 e la quota di capitale C_1 alla fine del primo anno saranno

$$I_1 = 0.07 \cdot 24000 = 1680 \qquad C_1 = 8348.06 - 1680 = 6668.06$$

mentre il debito residuo e il debito estinto risultano

$$D_1 = 24000 - 6668.06 = 17331.94 \qquad E_1 = C_1 = 6668.06$$

e, quindi, il piano di ammortamento alla fine del primo anno sarà

Anni	$\mathbf{R}_t$	$\mathbf{C}_t$	$\mathbf{I}_t$	$\mathbf{D}_t$	$\mathbf{E}_t$
0	–	–	–	24000.00	0.00
1	8348.06	6668.06	1680	17331.94	6668.06

- la quota interessi I_2 e la quota di capitale C_2 alla fine del secondo anno saranno

$$I_2 = 0.07 \cdot 17331.94 = 1213.24 \qquad C_2 = 9182.87 - 1213.24 = 7969.63$$

mentre il debito residuo e il debito estinto risultano

$$D_2 = 17331.94 - 7969.63 = 9362.31 \; ; \; E_2 = 6668.06 + 7969.63 = 14637.69$$

e, quindi, il piano di ammortamento alla fine del secondo anno sarà

Anni	$\mathbf{R}_t$	$\mathbf{C}_t$	$\mathbf{I}_t$	$\mathbf{D}_t$	$\mathbf{E}_t$
0	–	–	–	24000.00	0.00
1	8348.06	6668.06	1680	17331.94	6668.06
2	9182.87	7969.63	1213.24	9362.31	14637.69

- affinché il piano di ammortamento "chiuda" poniamo la quota di capitale C_3 esattamente uguale al debito residuo D_2 e ricaviamo per differenza la quota interessi

$$C_3 = D_2 = 9362.31 \qquad I_3 = R_3 - C_3 = 10017.67 - 9362.31 = 655.36$$

mentre il debito residuo e il debito estinto risultano

$$D_3 = 9362.31 - 9362.31 = 0 \qquad E_3 = 14637.69 + 9362.31 = 24000$$

e, quindi, il piano di ammortamento alla fine dell'ultimo anno sarà

Anni	$\mathbf{R}_t$	$\mathbf{C}_t$	$\mathbf{I}_t$	$\mathbf{D}_t$	$\mathbf{E}_t$
0	–	–	–	24000.00	0.00
1	8348.06	6668.06	1680.00	17331.94	6668.06
2	9182.87	7969.63	1213.24	9362.31	14637.69
3	10017.67	9362.31	655.36	0.00	24000.00

da cui il monte interessi del finanziamento risulta 3548.60.

Nell'ipotesi che tutte le rate R_s siano uguali, cioè $R_s = R$ per ogni s, dalla condizione di chiusura finanziaria iniziale si ha

$$S = \sum_{s=1}^{n} R\,(1+i)^{-s} \qquad \Rightarrow \qquad R = \frac{S}{\sum_{s=1}^{n}(1+i)^{-s}}$$

da cui s'ottiene[1]

$$R = \frac{S}{\dfrac{(1+i)^{-1} - (1+i)^{-(n+1)}}{1-(1+i)^{-1}}} = \frac{S}{\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}} = \frac{i \cdot S}{1-(1+i)^{-n}} \tag{2.5}$$

Osservazione 4.8 Utilizzando il simbolo finanziario $a_{\overline{n}|i}$, la (4.5) si può scrivere

$$R = \frac{S}{a_{\overline{n}|i}}$$

Definizione 4.9 Un ammortamento con rate costanti si dice ammortamento *progressivo* o *francese*.

In questo tipo di ammortamento si osserva che:

[1] Si rammenta che la somma di n termini in progressione geometrica di ragione $q \neq 1$ risulta:

$$q + q^2 + \cdots + q^n = \sum_{s=1}^{n} q^s = \frac{q - q^{n+1}}{1-q}$$

- le quote interessi descrescono ogni anno d'un ammontare pari a iC_s, con $s = 1, 2, ..., n$, infatti

$$I_{s+1} - I_s = i\,(D_s - D_{s-1}) = -iC_s$$

- le quote di capitale crescono in progressione geometrica di ragione $1+i$, infatti da

$$C_{s+1} - C_s = I_s - I_{s+1} = iC_s$$

  s'ottiene

$$C_{s+1} = (1+i)\,C_s \qquad \Rightarrow \qquad \frac{C_{s+1}}{C_s} = 1 + i$$

  e, pertanto, la quota di capitale alla data s si può trovare con le seguenti formule

$$C_s = C_1\,(1+i)^{s-1} \quad \text{oppure} \quad C_s = C_n\,(1+i)^{-(n-s)}$$

  con $s = 1, 2, ..., n$.

Esempio 4.10 Riprendendo i dati dell'esercizio 4.7 e costruiamo il piano d'ammortamento finanziario a rata costante. L'ammontare della rata risulta

$$R = \frac{24000}{a_{\overline{3}|0.07}} = \frac{24000 \cdot 0.07}{1 - 1.07^{-3}} \approx 9145.24$$

e il piano d'ammortamento finanziario è

Anni	$\mathbf{R}_t$	$\mathbf{C}_t$	$\mathbf{I}_t$	$\mathbf{D}_t$	$\mathbf{E}_t$
0	–	–	–	24000.00	0.00
1	9145.24	7465.24	1680.00	16534.76	7465.24
2	9145.24	7987.81	1157.43	8546.95	15453.05
3	9145.24	8546.95	598.29	0.00	24000.00

2.3 Leasing finanziario e credito al consumo

2.3.1 Leasing finanziario

Tra i diversi modi che un'azienda dispone per dotarsi di beni (macchine, *computer*, impianti di produzione, immobili e così via) necessari alla sua attività d'impresa c'è il contratto di *leasing finanziario*. Un'azienda, che chiameremo *società utilizzatrice*, decide di prendere attraverso un contratto di *leasing* finanziario un certo bene (mobile o immobile) da un'altra società, che diremo *concedente*. Quindi, nel contratto di *leasing* la società utilizzatrice dispone del bene senza averne la proprietà.
Gli elementi del contratto sono:

- A prezzo di acquisto del bene (concesso in *leasing finanziario* da una società di *leasing* o concedente);

- B anticipo in contanti, corrisposto al momento della stipulazione del contratto (cioè alla data $t_0 = 0$);

- C_s, con $s = 1, 2, ..., n$, canoni di *leasing* posticipati da pagare alle scadenze $t_1, t_2, ..., t_n$;

- C_{s+n}, con $s = 1, 2, ...r$, canoni di *leasing* anticipati, formalmente riferiti alle scadenze $t_{n+1}, t_{n+2}, ..., t_{n+r}$, ma, di fatto, versati alla stipulazione del contratto (questo ammontare si pone in alternativa all'anticipo in contanti);

- E prezzo di riscatto del bene oggetto del contratto di *leasing*, di solito è una piccola percentuale del prezzo del bene, da pagare alla scadenza del contratto;

- i tasso annuo d'interesse composto del contratto di *leasing* (si dice anche tasso contrattuale).

- durata del contratto di *leasing* $T = m/12$ (con $t_{r+n} \leq T$).

Attraverso la condizione di chiusura finanziaria iniziale (4.3) possiamo stabilire un equilibrio finanziario tra gli elementi che entrano in gioco nel contratto di *leasing*, cioè

$$A = B + \sum_{s=1}^{r} C_{n+s} + \sum_{s=1}^{n} C_s \left(1+i\right)^{-t_s} + E\left(1+i\right)^{-m/12} \tag{2.6}$$

Facendo l'ipotesi che l'azienda alla stipulazione del contratto versi un anticipo in contanti, quindi gli ammontari C_{s+n} (per $s = 1, 2, ..., r$) sono tutti nulli, la (4.6) diventa

$$A = B + \sum_{s=1}^{n} C_s \left(1+i\right)^{-t_s} + E\left(1+i\right)^{-m/12} \tag{2.7}$$

I canoni di *leasing* che l'azienda deve pagare possono essere variabili o costanti. La differenza tra il prezzo d'acquisto del bene oggetto del contratto di *leasing* A e l'anticipo in contanti B (o la somma dei canoni anticipati) si dice anche *ammontare netto finanziato*.

Canoni di *leasing* variabili

La procedura che permette di costruire la successione dei canoni di *leasing* è quella di stabilire dei coefficienti, indicati con ρ_s, che stabiliscono il rapporto tra il primo canone di *leasing* C_1 e il canone di *leasing* s-esimo C_s (si dice anche che si stabilisce il *profilo temporale dei canoni di leasing)*, ossia

$$\rho_s = \frac{C_s}{C_1} \qquad \text{con } s = 1, 2, ..., n \tag{2.8}$$

con $\rho_1 = 1$.
Dalla (4.8) si ottiene $C_s = \rho_s C_1$, che sostituita nella condizione di chiusura (4.7), permette di scrivere

$$A = B + \sum_{s=1}^{n} \left(C_1 \rho_s\right) \left(1+i\right)^{-t_s} + E\left(1+i\right)^{-m/12}$$

onde

$$\sum_{s=1}^{n} \left(C_1 \rho_s\right) \left(1+i\right)^{-t_s} = A - B - E\left(1+i\right)^{-m/12}$$

e da quest'ultima possiamo ricavare il primo canone di *leasing* C_1, che risulta

$$C_1 = \frac{A - B - E\,(1+i)^{-m/12}}{\sum_{s=1}^{n} \rho_s\,(1+i)^{-t_s}} \tag{2.9}$$

Una vota noto il primo canone di *leasing* possiamo ricavare tutti gli altri utilizzando la seguente formula $C_s = C_1 \cdot \rho_s$, con $s = 1, 2, ..., n$.

Esempio 4.11 Un'azienda prende attraverso un contratto di *leasing* finanziario un macchinario per un costo di 25000 €. Il contratto di *leasing* prevede: (1) durata 2 anni e 6 mesi (quindi $T = 2.5$ anni); (2) canoni di *leasing* semestrali posticipati (variabili); (3) prezzo di riscatto, da pagare un semestre dopo l'ultimo canone, pari al 5% del costo del macchinario; (4) anticipo in contanti pari al 10% del costo del macchinario; (5) tasso annuo nominale 12%.
Il profilo dei canoni di *leasing* è stabilito attraverso i seguenti coefficienti (rammentando che $\rho_1 = 1$):

- $\rho_2 = \rho_3 = 1.2$ (cioè vuol dire che C_2 e C_3 sono maggiori di C_1 del 20%);
- $\rho_4 = 0.9$ (C_4 è minore del 10% rispetto a C_1).

L'anticipo in contanti risulta $B = 0.1 \cdot 25000 = 2500$, il prezzo di riscatto vale $E = 25000 \cdot 0.05 = 1250$ e, infine, dal TAN possiamo ricavare il tasso se me stra le d'interesse composto (effettivo) che risulta $i_2 = 0.06$. Dalla condizione di chiusura finanziaria iniziale si ha

$$25000 = 2500 + \sum_{s=1}^{4} (C_1 \rho_s)\, 1.06^{-s} + 1250 \cdot 1.06^{-5}$$

da cui possiamo determinare il primo canone di *leasing*, che risulta

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{25000 - 2500 - 1250 \cdot 1.06^{-5}}{\rho_1 \cdot 1.06^{-1} + \rho_2 \cdot 1.06^{-2} + \rho_3 \cdot 1.06^{-3} + \rho_4 \cdot 1.06^{-4}} \\ &= \frac{25000 - 2500 - 1250 \cdot 1.06^{-5}}{1.06^{-1} + 1.2 \cdot 1.06^{-2} + 1.2 \cdot 1.06^{-3} + 0.9 \cdot 1.06^{-4}} \approx 5778.93 \end{aligned}$$

Gli altri canoni di *leasing*, in coerenza con il profilo stabilito, risultano

$$C_2 = \rho_2 \cdot C_1 = 1.2 \cdot 5778.93 \approx 6934.72$$

$$C_3 = \rho_3 \cdot C_1 = 1.2 \cdot 5778.93 \approx 6934.72$$

$$C_4 = \rho_4 \cdot C_1 = 0.9 \cdot 5778.93 \approx 5201.04$$

I flussi di cassa generati dal *leasing* finanziario (sotto l'ipotesi di riscattare il macchinario a fine contratto) sono descritti nella seguente tabella

Semestri	0	1	2	3	4	5
Importi	22500	−5778.93	−6934.72	−6934.72	−5201.04	−1250

Canoni di *leasing* costanti

Sostituendo nella condizione di chiusura finanziaria iniziale (4.7) la condizione $C_s = C$ per ogni scadenza s, che statuisce l'uguaglianza tra tutti i canoni di *leasing*, si ottiene

$$A = B + \sum_{s=1}^{n} C\,(1+i)^{-t_s} + E\,(1+i)^{-m/12}$$

onde

$$\sum_{s=1}^{n} C\,(1+i)^{-t_s} = A - B - E\,(1+i)^{-m/12}$$

e da quest'ultima possiamo ricavare l'ammontare del canone costante di *leasing* C, che risulta

$$C = \frac{A - B - E\,(1+i)^{-m/12}}{\sum_{s=1}^{n} (1+i)^{-t_s}} \tag{2.10}$$

Osservazione 4.12 Se $t_s = s$ (cioè in presenza di scadenze regolari) e ricordando che $\sum_{s=1}^{n} (1+i)^{-s} = a_{\overline{n}|i}$ la (4.10) si può anche scrivere come segue

$$C = \frac{A - B - E\,(1+i)^{-m/12}}{a_{\overline{n}|i}} = \frac{\left[A - B - E\,(1+i)^{-m/12}\right] \cdot i}{1 - (1+i)^{-n}}$$

Esempio 4.13 Un'azienda prende attraverso un contratto di *leasing* finanziario una macchina aziendale del costo di 12000 €. Il contratto di *leasing* prevede: (1) durata del contratto 2 anni e 4 mesi; (2) canoni costanti di *leasing* quadrimestrali posticipati; (3) prezzo di riscatto, da pagare un quadrimestre dopo l'ultimo canone, pari al 10% del costo della macchina; (4) anticipo in contanti pari al 10% del prezzo della macchina; (5) tasso annuo nominale 9%.
L'ammontare in contanti da versare alla stipulazione del contratto di *leasing* è $B = 12000 \cdot 10\% = 1200$ €, mentre il prezzo di riscatto è $E = 12000 \cdot 0.10 = 1200$ € e, infine, il tasso quadrimestrale d'interesse composto (effettivo) da utilizzare nel calcolo dei canoni di competenza per l'azienda è $i_3 = 3\%$.
Leghiamo tutti questi elementi attraverso la condizione di chiusura (4.7), ottenendo

$$12000 = 1200 + \sum_{s=1}^{6} C \cdot 1.03^{-s} + 1200 \cdot 1.03^{-7}$$

e, pertanto, il canone costante di *leasing* risulta

$$\begin{aligned} C &= \frac{12000 - 1200 - 1200 \cdot 1.03^{-7}}{a_{\overline{6}|0.03}} = \frac{[10800 - 1200 \cdot 1.03^{-7}] \cdot 0.03}{1 - 1.03^{-6}} \\ &= \frac{9824.290186 \cdot 0.03}{1 - 1.03^{-6}} \approx 1813.54 \end{aligned}$$

Il piano d'ammortamento finanziario del *leasing* risulta

Anni	$\mathbf{R}_t$	$\mathbf{C}_t$	$\mathbf{I}_t$	$\mathbf{D}_t$	$\mathbf{E}_t$
0	1200.00	1200.00	–	10800.00	1200.00
1	1813.54	1489.54	324.00	9310.46	2689.54
2	1813.54	1534.23	279.31	7776.23	4223.77
3	1813.54	1580.25	233.29	6195.98	5804.02
4	1813.54	1627.66	185.88	4568.32	7431.68
5	1813.54	1676.49	137.05	2891.83	9108.17
6	1813.54	1726.79	86.75	1165.04	10834.96
7	1200.00	1165.04	34.96	0.00	12000.00

Per finire facciamo alcune osservazioni sul piano di ammortamento finanziario del *leasing* prendendo spunto dall'ultimo esempio:

- nella prima riga si colloca l'anticipo in contanti o la somma dei canoni di *leasing* anticipati (come quota di capitale alla data 0), quindi l'ammontare della rata alla data 0 vale

$$R_0 = B \qquad \text{oppure} \qquad R_0 = \sum_{s=1}^{r} C_{n+s}$$

  e, pertanto, la differenza $A - R_0 = D_0$ identifica il netto finanziato del contratto di *leasing*;

- nell'ultima riga la rata alla data n coincide con il valore di riscatto (cioè $R_n = E$), e sapendo che $C_n = D_{n-1}$, l'ultima quota interessi risulta

$$I_n = E - D_{n-1}$$

2.3.2 Rateazioni

Le *rateazioni* o *vendite rateali* fanno riferimento all'acquisto di bene (normalmente sono beni di consumo) che viene pagato attraverso delle rate in un certo arco di tempo. Un soggetto decide di acquistare un bene e di pagarlo attraverso rate dilazionate nel tempo. Gli elementi del contratto sono:

- A prezzo d'acquisto del bene;

- B anticipo in contanti, versato al momento della stipulazione del contratto, di solito una percetnuale del prezzo d'acquisto del bene;

- R_s, con $s = 1, 2, ..., n$, rate periodali (variabili o costanti) di rimborso posticipati da pagare alle scadenze $t_1, t_2, ..., t_n$;

Come nel *leasing finanziario*, la differenza tra A e B rappresenta il netto finanziato. Indicando con $\phi(t)$ il fattore di sconto, possiamo stabilire un'equivalenza finanziaria in 0 tra A, B e R_s sempre sfruttando la condizione di chiusura finanziaria iniziale

$$A = B + \sum_{s=1}^{n} R_s \cdot \phi(t_s) \tag{2.11}$$

Possiamo utilizzare due regimi finanziari di sconto per costruire queste tipologie di contratti di vendite a rate: (1) il regime finanziario dello sconto composto e (2) il regime finanziario dello sconto commerciale.

Rateazioni e sconto composto

Sostituendo nella (4.11) il fattore di sconto che caratterizza il regime finanziario dello sconto composto si ottiene

$$A = B + \sum_{s=1}^{n} R_s \cdot (1+i)^{-t_s} \tag{2.12}$$

Le rate di rimborso R_s possono essere variabili o costanti, quindi:

- se le rate sono variabili, seguendo la stessa procedura vista per il *leasing* con canoni variabili, indichiamo con $\rho_s = R_s/R_1$ (con $s = 1, 2, ..., n$ e $\rho_1 = 1$) e dalla (4.12) possiamo scrivere

  $$A = B + \sum_{s=1}^{n} (R_1\rho_s) \cdot (1+i)^{-t_s} \quad \Rightarrow \quad R_1 = \frac{A-B}{\sum_{s=1}^{n} \rho_s \cdot (1+i)^{-t_s}} \tag{2.13}$$

  determinando la prima rata R_1 e, successivamente, si potranno calcolare tutte le altre utilizzando l'espressione $R_s = \rho_s R_1$;

- se le rate sono costanti, quindi $R_s = R$ per ogni s, allora la (4.12) si trasforma in

  $$A = B + \sum_{s=1}^{n} R \cdot (1+i)^{-t_s} \Rightarrow \quad R = \frac{A-B}{\sum_{s=1}^{n} (1+i)^{-t_s}} \tag{2.14}$$

Esempio 4.14 Un soggetto acquista un bene di consumo con pagamento rateale. Gli elementi del contratto sono: (1) prezzo del bene 1600 €; (2) anticipo in contanti 100 €; (3) durata del contratto 6 mesi; (4) pagamento di sei rate costanti mensili posticipate; (5) tasso annuo nominale $j_{12} = 12\%$. Il tasso mensile d'interesse composto $i_{12} = 1\%$, quindi applicando la condizione di chiusura (4.14) si ha

$$1600 = 100 + \sum_{s=1}^{6} R \cdot 1.01^{-s} \quad \Rightarrow \quad 1500 = R \sum_{s=1}^{6} 1.01^{-s}$$

e, quindi, la rata mensile costante vale

$$R = \frac{1500}{\sum_{s=1}^{6} 1.01^{-s}} = \frac{1500}{a_{\overline{6}|0.01}} = \frac{1500 \cdot 0.01}{1 - 1.01^{-6}} \approx 258.82$$

Rateazioni e sconto commerciale

Sostituendo nella (4.11) il fattore di sconto che caratterizza il regime finanziario dello sconto commerciale si ottiene

$$A = B + \sum_{s=1}^{n} R_s \cdot (1 - dt_s) \tag{2.15}$$

Le rate di rimborso R_s possono essere variabili o costanti, quindi:

- se le rate sono variabili, come visto prima, indichiamo con $\rho_s = R_s/R_1$ (con $s = 1, 2, ..., n$ e $\rho_1 = 1$) e dalla (4.15) possiamo scrivere

  $$A = B + \sum_{s=1}^{n} (R_1\rho_s) \cdot (1 - dt_s) \quad \Rightarrow \quad R_1 = \frac{A - B}{\sum_{s=1}^{n} \rho_s \cdot (1 - dt_s)} \tag{2.16}$$

  determinando la prima rata R_1 e, successivamente, si potranno calcolare tutte le altre utilizzando l'espressione $R_s = \rho_s R_1$;

- se le rate sono costanti, quindi $R_s = R$ per ogni s, allora la (4.15) si trasforma in

  $$A = B + \sum_{s=1}^{n} R \cdot (1 - dt_s) \quad \Rightarrow \quad R = \frac{A - B}{\sum_{s=1}^{n} (1 - dt_s)} \tag{2.17}$$

Esempio 4.15 Un soggetto acquista un bene di consumo con pagamento rateale attraverso un finanziamento. Prezzo del bene 2200 €. Gli elementi del contratto di finanziamento sono: (1) importo finanziato 2200 €; (2) anticipo in contanti 200 €; (3) durata del contratto 6 mesi; (4) pagamento di sei rate costanti mensili posticipate; (5) tasso mensile di sconto $d_{12} = 0.01$.
Utilizzando la condizione di chiusura (4.17) si ha

$$2200 = 200 + \sum_{s=1}^{6} R \cdot (1 - 0.01s) \quad \Rightarrow \quad 2000 = R \sum_{s=1}^{6} (1 - 0.01s)$$

e, quindi, la rata mensile costante risulta

$$R = \frac{2000}{\sum_{s=1}^{6} (1 - 0.01s)} = \frac{2000}{6 - 0.01 \sum_{s=1}^{6} s} = \frac{2000}{5.79} \approx 345.42$$

Capitolo 3

Scelte finanziarie

3.1 Discounted Cash Flow e valore attuale netto

Prima di affrontare il paragrafo dedicato al problema delle scelte finanziarie occorre introdurre alcuni strumenti di analisi finanziaria che sono: il *Discounted Cash Flow*, il valore attuale netto e il tasso interno di rendimento.

Definizione 6.1 Si dice *Disconunted Cash Flow* (*DCF*) di un'operazione finanziaria $\{(t_s, a_s)\}$ (con $s = 0, 1, 2, ..., n$), indicato con G, la somma algebrica dei valori attuali, calcolati a tasso annuo d'interesse composto x, dei movimenti di cassa a_s, cioè

$$G(x) := a_0 + \frac{a_1}{(1+x)^{t_1}} + \frac{a_2}{(1+x)^{t_2}} + \cdots + \frac{a_n}{(1+x)^{t_n}} \tag{3.1}$$

Il *DCF* è funzione del tasso annuo d'interesse composto x definita per valori che appartengono all'intervallo $(-1, +\infty)$ e a valori in $\mathbb{R}$, quindi utilizzando la notazione vista per le funzioni, possiamo anche scrivere $G : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Con gli strumenti del primo capitolo possiamo agevolmente tracciare il grafico della funzione *DCF* per un'operazione finanziaria, come mostreremo nell'esempio che segue.

Esempio 6.2 Un'operazione finanziaria a fronte di un'esborso immediato di 1000 € genera un incasso di 610 € tra un anno e un successivo incasso di 440

€ tra due anni. Il *DCF* a tasso annuo d'interesse composto $x > -1$ risulta

$$G(x) = \sum_{s=0}^{2} \frac{a_s}{(1+x)^s} = -1000 + \frac{610}{1+x} + \frac{440}{(1+x)^2}$$

Si osserva che:

- per x molto vicino a -1 da destra la funzione assumerà valori positivi molto grandi, possiamo scrivere $G(-1) = +\infty$;
- per x che prende valori molto grandi la funzione si avvicinerà sempre di più al primo flusso di cassa a_0, da cui la scrittura $G(+\infty) = -1000$.

La derivata prima di G risulta

$$G'(x) = -\frac{610}{(1+x)^2} - \frac{880}{(1+x)^3}$$

che è sempre negativa per ogni valore di x, quindi si evince che G è strettamente decrescente; la derivata seconda di G vale

$$G''(x) = \frac{1220}{(1+x)^3} + \frac{2640}{(1+x)^3}$$

sempre positiva per qualsiasi valore di x, perciò G è strettamente convessa. Con queste informazioni siamo in grado di tracciare nel piano un grafico qualitativo del *DCF* (vedi figura 6.1).

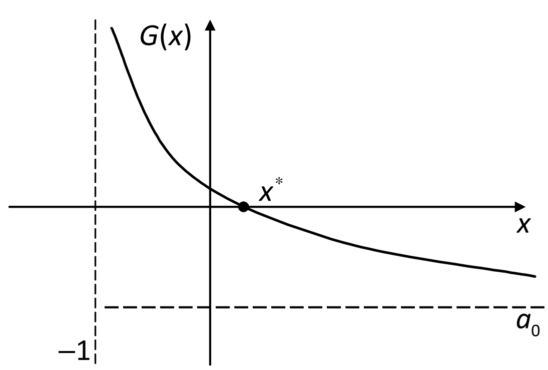

Figura 6.1 - Grafico del *DCF*

Sempre dal grafico possiamo osservare la presenza di un tasso annuo d'interesse composto, indicato con x^*, che divide la zona dove il *DCF* è positivo (per ogni $-1 < x < x^*$) dalla zona dove il *DCF* è negativo (per ogni $x > x^*$). Vedremo nel paragrafo seguente il nome e le caratteristiche di questo tasso particolare.

In alcuni casi particolari possiamo tracciare immediatamente l'andamento grafico del *DCF* al variare di x, questi sono:

- se $a_0 < 0$ e $a_s \geq 0$, con $s = 1, 2, ..., n$, (con almeno un flusso di cassa non nullo) allora $G(x)$ sarà una funzione strettamente descrescente e convessa, interseca l'asse delle x in un punto e quando x assume valori molto grandi (cioè per $x \to +\infty$) il *DCF* si avvicina sempre più al primo flusso di cassa a_0 (vedi figura 6.2.(a));

- se $a_0 > 0$ e $a_s \leq 0$, con $s = 1, 2, ..., n$, (con almeno un flusso di cassa non nullo) allora $G(x)$ sarà una funzione strettamente crescente e concava, interseca l'asse delle x in un punto e quando x assume valori molto grandi (cioè per $x \to +\infty$) il *DCF* si avvicina sempre più al primo flusso di cassa a_0 (vedi figura 6.2.(b));

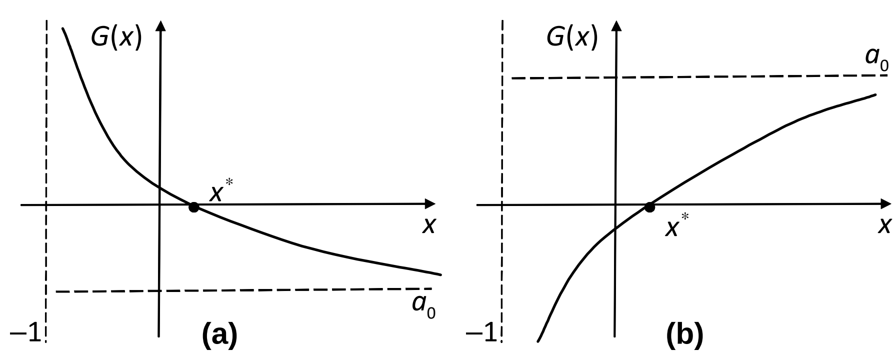

Figura 6.2 - Grafici di DCF

Consideriamo due operazioni finanziarie $A = \{(t_s, a_s)\}$ e $B = \{(t_s, b_s)\}$, con $s = 0, 1, 2, ..., n$, con *DCF* rispettivamente $G_A(x)$ e $G_B(x)$. È possibile costruire una nuova operazione finanziaria, che indicheremo con C, combinando le operazioni finanziarie A e B, generata semplicemente addizionando i flussi di cassa di A e B premoltiplicati per dei coefficienti $\alpha, \beta \in [0,1]$ che rappresentano le *scale di attivazione* delle operazioni, rispettivamente, A e B, cioè

$$C = \{(t_s, \alpha a_s + \beta b_s)\} \qquad \text{con } s = 0, 1, 2, ..., n$$

Esempio 6.3 Consideriamo le seguenti due operazioni finanziarie biennali

A

Anni	0	1	2
Importi	-1000	700	600

B

Anni	0	1	2
Importi	-2000	1200	1100

Possiamo costruire una nuova operazione finanziaria a due anni con flussi di cassa pari a $0.5a_s + 0.5b_s$ (prendendo come scale di attivazione dei due impieghi i pesi $\alpha = \beta = 0.5$, ciò vuol dire che di ogni operazione prendiamo solo il 50% dei flussi di cassa), ottenendo in tal modo l'impiego

C

Anni	0	1	2
Importi	-1500	950	850

Allora il *DCF* di questa combinazione di operazioni finanziarie con pesi $\alpha, \beta \in [0,1]$ risulta

$$G_C(x) = \alpha \cdot G_A(x) + \beta \cdot G_B(x) \tag{3.2}$$

cioè è sufficiente moltiplicare i *DCF* delle due operazioni finanziarie per le rispettive scale di attivazione e poi calcolarne la somma (in modo più formale si dice anche che il *DCF* è un operatore di tipo *lineare*). Il risultato della (6.2) si può agevolmente generalizzare per un numero finito di operazioni finanziarie.

3.2 TAEG e normativa antiusura

3.2.1 Tasso annuo effettivo globale

Nei contratti di credito al consumo e di *leasing* finanziario le rate oggetto dei contratti si calcolano utilizzando un tasso d'interesse composto effettivo

(annuale, semestrale e cosi via). Occorre tenere conto che questo tasso non misura il costo effettivo (o reale) dei due contratti di finanziamento in quanto non tiene in considerazione dei costi accessori che normalmente vengono aggiunti nella costruzione di questi contratti.
Il costo effettivo (o reale) di un finanziamento (con costi accessori) si stabilisce attraverso il calcolo di un particolare parametro che si chiama "Tasso Annuo Effettivo Globale (TAEG). Questo indicatore corrisponde al tasso interno (o implicito) di un contratto di finanziamento comprensivo dei costi accessori quali le spese d'istruzione e di apertura della pratica di finanziamento, imposta di bollo, commissioni d'incasso delle rate di rimborso e dei costi di assicurazione (obbligatoria).
Consideriamo un contratto di finanziamento per un ammontare S da rimborsare attraverso il pagamento di n rate annue posticipate R_s, con $s = 1, 2, ..., n$, che possiamo descrivere con la seguente tabella

Scadenze	$t_0 = 0$	t_1	$\cdots$	t_s	$\cdots$	t_n
Importi	S	$-R_1$	$\cdots$	$-R_s$	$\cdots$	$-R_n$

con tasso interno di rendimento esattamente uguale tasso annuo d'interesse del contratto di finanziamento.
I costi accessori relativi al finanziamento sono:

- *spese d'istruzione* della pratica di finanziamento (da decurtare all'ammontare finanziato): queste possono essere un ammontare fisso, che indicheremo con α, o parametrate in base all'ammontare finanziato S, in tal caso scriveremo βS;

- *spese d'incasso* delle rate di rimborso (da aggiungere alle rate di rimborso): queste possono essere un ammontare fisso, che indicheremo con γ, o proporzionali alle rate di rimborso R_s (con $s = 1, 2, ..., n$), e scriveremo δR_s.

- *spese a titolo d'imposta*: queste vengono decurtate dall'ammontare iniziale finanziato per un ammontare pari a τ_0 e aggiunte alle rate di rimborso per un ammontare pari a τ_s (con $s = 1, 2, ..., n$).

I flussi di cassa generati da un contratto di finanziamento (per entrambi le parti del contratto) con costi accessori sono

Scadenze	**Importi (Finanziato)**	**Importi (Finanziatore)**
$t_0 = 0$	$S - \alpha - \beta S - \tau_0$	$-S + \alpha + \beta S + \tau_0$
t_1	$-(1+\delta) R_1 - \gamma - \tau_1$	$(1+\delta) R_1 + \gamma + \tau_1$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
t_n	$-(1+\delta) R_n - \gamma - \tau_n$	$(1+\delta) R_n + \gamma + \tau_n$

(3.3)

Il *DCF*, calcolato a tasso annuo d'interesse composto $x > -1$, di questa operazione di finanziamento (per il soggetto finanziato) risulta

$$G(x) = [(1-\beta) S - \alpha - \tau_0] - \sum_{s=1}^{n} [(1+\delta) R_s + \gamma + \tau_s] (1+x)^{-t_s} \qquad (3.4)$$

La struttura dell'operazione finanziaria prevede un'entrata iniziale seguita da tutte uscite, quindi esiste un unico tasso interno (o implicito) x^* che è la soluzione dell'equazione $G(x) = 0$, cioè

$$[(1-\beta) S - \alpha - \tau_0] - \sum_{s=1}^{n} [(1+\delta) R_s + \gamma + \tau_s] (1+x^*)^{-t_s} = 0$$

che rappresenta il tasso annuo effettivo globale (TAEG) del finanziamento.

Esempio 6.15 Si acquista un bene con pagamento rateale con le seguenti caratteristiche: (1) prezzo d'acquisto 4500 € e anticipo in contanti 500 €; (2) pagamento di due rate semestrale costanti posticipate; (3) tasso annuo nominale (TAN) 14%.
Il tasso semestrale d'interesse composto risulta $i_2 = 0.07$ e quindi l'ammontare costante di ogni rata semestrale è

$$4000 = \sum_{s=1}^{2} R \cdot 1.07^{-s} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{4000 \cdot 0.07}{1 - 1.07^{-2}} \approx 2212.37$$

I costi accessori al finanziamento sono: (a) spese d'istruzione della pratica di finanziamento, da versare al stipulazione del contratto, nella misura del 10%

del netto finanziato e quindi pari a 40 €; (b) commissioni d'incasso e altri costi minori per un ammontare pari a 3 € da aggiungere a ogni rata.
I flussi di cassa del contratto di finanziamento con i costi accessori sono descritti dalla seguente tabella

Scadenze	0	1	2
Importi	3960	-2215.37	-2215.37

L'equazione che permette di determinare il tasso interno del finanziamento è

$$3960 - \frac{2215.37}{1+x} - \frac{2215.37}{(1+x)^2} = 0$$

La precedente equazione è equivalente alla seguente

$$3960\,(1+x)^2 - 2215.37\,(1+x) - 2215.37 = 0$$

Dividendo, ambo i membri, per 3960 e ponendo $1 + x = y$, si ottiene l'equazione di secondo grado

$$y^2 - 0.5594y - 0.5594 = 0$$

le cui radici risultano

$$y_{1,2} = \frac{0.5594 \mp \sqrt{0.5594^2 + 4 \cdot 0.5594}}{2} = \begin{cases} y_1 = -0.5188 \\ y_2 = 1.0782 \end{cases}$$

Si osserva che:

- la prima radice non è maggiore di -1, infatti

  $$y_1 = -0.5188 \quad \Rightarrow \quad 1 + x_1 = -0.5188 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1.5188 \ngtr -1$$

  quindi non si può accettare in quanto non ha significato finanziario.

- la seconda radice è maggiore di -1, infatti

  $$y_2 = 1.0782 \quad \Rightarrow \quad 1 + x_2 = 1.0782 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 0.0782 \quad > -1$$

  quindi si può accettare in quanto ha significato finanziario.

Si conclude che il tasso interno del finanziamento con costi accessori è

$$x^* = (1.0782)^2 - 1 = 16.25\%$$

che rappresenta il tasso annuo effettivo globale (TAEG) del contratto e, quindi, fornisce il costo effettivo del finanziamento per il cliente.

3.2.2 Normativa antiusura

Con la legge 7 marzo 1996 n. 108 (Disposizioni in materia di usura) il legislatore italiano ha introdotto delle novità importanti per quanto riguarda la lotta all'usura, sia sotto il profilo penale (art. 644 c.p.) e sia sotto il profilo civile, introducendo dei confini ben precisi oltre i quali i tassi di interesse praticati da un qualsiasi soggetto (banca, società finanziaria, privato) nel concedere credito diventino usurari.
Infatti, questa legge stabilisce dei criteri certi per l'individuazione di particolari tassi di interesse oltre i quali si verifica il fenomeno dell'usura (li possiamo chiamare anche *tassi soglia* al di sopra dei quali scatta automaticamente il reato d'usura).
Per riconosce se una operazione creditizia è stata costruita a interessi usurari si procede in questo modo:

- si deve calcolare il tasso interno dell'operazione creditizia tenendo conto di tutti i costi accessori escludendo soltanto le imposte e tasse;

- si confronta il tasso interno con un tasso soglia che si determina attraverso una formula fornita dalla normativa antiusura.

Il Ministero dell'Economia e delle Finanze pubblica, con cadenza trimestrale, apposite tabelle nelle quali sono indicati i *tassi effettivi globali medi* (TEGM), su base annuale, applicati in un determinato periodo dalle banche e da altri soggetti finanziari per determinate operazioni creditizie e per classi di importo:

1. aperture di credito in conto corrente;

2. scoperti senza affidamento;

3. anticipi e sconti commerciali;

4. *factoring*;

5. crediti personali

6. altri finanziamenti alle famiglie e alle imprese;

7. prestiti contro cessione del quinto dello stipendio e della pensione;
8. *leasing* autoveicoli e aeronavali;
9. *leasing* immobiliare (a tasso fisso e a tasso variabile);
10. *leasing* strumentale;
11. credito finalizzato all'acquisto rateale;
12. credito *revolving*;
13. mutuo con garanzia ipotecaria: a tasso fisso e a tasso variabile.

Le formule che ci permettono di calcolare il tasso soglia di una operazione creditizia (art. 2, comma 4, della legge 108/1996, modificato dalla legge del 12 luglio 2011, n.106) sono

$$\begin{cases} \text{Tasso soglia} = 1.25 \cdot \text{TEGM} + 4\% \\ \text{Tasso soglia} \ - \ \text{TEGM} \leq 8\% \end{cases}$$

qualora la differenza tra il tasso soglia e il TEGM risulti maggiore dell'8% allora il tasso soglia risulta

$$\text{Tasso soglia} \ = \ \text{TEGM} + 8\%$$

Esempio 6.16 Dalla tabella pubblicata dal Ministero dell'Economia e delle Finanze il 25 marzo 2013 consideriamo i TEGM per alcune operazioni creditizie (rilevati ai sensi della legge 108/96 e relativi al periodo di applicazione dal 1^{o} aprile 2013 fino al 30 giugno 2013)

Op. Creditizia	**Importi**	**Tassi medi**	**Tassi soglia**
Crediti personali	-	12.10%	19.1250%
Leasing strumentale	fino a 25000 €	9.03%	15.2875%
Leasing strumentale	oltre 25000 €	6.75%	12.4375%
Credito *revolving*	fino a 5000 €	17.20%	25.2000%

dove i tassi medi e i tassi soglia (con quattro decimali) sono annuali.
Controlliamo usando le formule precendenti la correttezza dei tassi soglia.

- Per la categoria dei "Crediti personali", si ha

$$\begin{cases} \text{Tasso soglia} = 1.25 \cdot 12.10\% + 4\% = 19.1250\% \\ 19.1250\% \ - \ 12.10\% = 7.025\% \leq 8\% \end{cases}$$

quindi il tasso soglia calcolato coincide con quello nella tabella.

- Per la categoria del "*Leasing* strumentale fino a 25000 €", si ha:

$$\begin{cases} \text{Tasso soglia} = 1.25 \cdot 9.03\% + 4\% = 15.2875\% \\ 15.2875\% \ - \ 9.03\% = 6.2575\% \leq 8\% \end{cases}$$

quindi il tasso soglia calcolato coincide con quello nella tabella.

- Per la categoria del "*Leasing* strumentale oltre 25000 €", si ha:

$$\begin{cases} \text{Tasso soglia} = 1.25 \cdot 6.75\% + 4\% = 12.4375\% \\ 12.4375\% \ - \ 6.75\% = 5.6875\% \leq 8\% \end{cases}$$

quindi il tasso soglia calcolato coincide con quello nella tabella.

- Per la categoria del "Credito *revolving* fino a 5000 €", si ha:

$$\begin{cases} \text{Tasso soglia} = 1.25 \cdot 17.20\% + 4\% = 25.5000\% \\ 25.5000\% \ - \ 17.20\% = 8.3\% \not\leq 8\% \end{cases}$$

quindi il tasso soglia per questa categoria di operazioni risulta

$$\text{Tasso soglia} = \ \text{TEGM} + 8\% = 17.20\% + 8\% = 25.2000\%$$

come riporta correttamente la tabella del Ministero.

Il tasso soglia si può anche calcolare utilizzando la seguente formula

$$\text{Tasso soglia} = \min\left(1.25 \cdot \text{TEGM} + 4\% \ , \ \text{TEGM} + 8\%\right) \tag{3.5}$$

Esempio 6.17 Utilizziamo la formula (6.6) per controllare la correttezza del tasso soglia riportato nella tabella dell'esempio 6.16 per la categoria dei "Crediti personali" dove il TEGM è 12.10%. Risulta

$$\begin{aligned}\text{Tasso soglia} &= \min\left(1.25 \cdot \text{TEGM} + 4\% \ , \ \text{TEGM} + 8\%\right) \\ &= \min\left(1.25 \cdot 12.10\% + 4\% \ , \ 12.10\% + 8\%\right) \\ &= \min(19.1250\% \ , \ 20,10\%) = 19.1250\%\end{aligned}$$

che coincide con quello calcolato in precedenza e indicato nella tabella ministeriale.

Dal confronto tra il tasso interno di un'operazione creditizia (per esempio un contratto di credito al consumo o di *leasing* finanziario) e il tasso soglia si possono presentare due situazioni:

1. il tasso interno $\leq$ tasso soglia, allora il contratto non è a interessi usurari;

2. il tasso interno $>$ tasso soglia, allora il contratto è a interessi usurari.

Esempio 6.18 Il 4 maggio 2013 si acquista un bene con pagamento rateale dove: (1) prezzo d'acquisto 2800 € e anticipo in contanti 300 €; (2) pagamento di due rate mensili costanti posticipate; (3) tasso annuo nominale 12%.
Dal TAN passiamo al tasso mensile d'interesse composto $i_{12} = 0.01$ e quindi calcoliamo l'ammontare di ogni rata, che risulta

$$2500 = \sum_{s=1}^{2} R \cdot 1.01^{-s} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{2500 \cdot 0.01}{1 - 1.01^{-2}} \approx 1268.78$$

I costi accessori al finanziamento sono: (a) spese d'istruzione pratica 100 € da versare alla stipulazione del contratto; (b) commissioni d'incasso e altri costi per un ammontare pari a 4 € da aggiungere ad ogni rata.

Il finanziamento con costi accessori produce flussi di cassa che sono descritti dalla seguente tabella

Scadenze	0	1	2
Importi	2400	-1272.78	-1272.78

L'equazione che permette di determinare il tasso interno del finanziamento con costi è

$$2400 - \frac{1272.78}{1+x} - \frac{1272.78}{(1+x)^2} = 0$$

Facendo il minimo comune multiplo e semplificando, l'equazione precedente risulta equivalente alla seguente

$$2\,400\,(1+x)^2 - 1272.78\,(1+x) - 1272.78 = 0$$

Dividendo, ambo i membri, per $2\,400$ e ponendo $1 + x = y$, si ottiene l'equazione di secondo grado

$$y^2 - 0.5303y - 0.5303 = 0$$

le cui radici risultano

$$y_{1,2} = \frac{0.5303 \mp \sqrt{0.5303^2 + 4 \cdot 0.5303}}{2} = \begin{cases} y_1 = -0.5099 \\ y_2 = 1.0402 \end{cases}$$

Si osserva che:

- la prima radice non è maggiore di -1, infatti

  $$y_1 = -0.5099 \quad \Rightarrow \quad 1 + x_1 = -0.5099 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1.5099 \not> -1$$

  quindi non si può accettare in quanto non ha significato finanziario.

- la seconda radice è maggiore di -1, infatti

  $$y_2 = 1.0402 \quad \Rightarrow \quad 1 + x_2 = 1.0402 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 0.0402 > -1$$

  quindi si può accettare in quanto ha significato finanziario.

Si conclude che il tasso implicito del finanziamento con costi accessori (TAEG) è

$$x^* = (1.0402)^{12} - 1 = 60.47\%$$

Dalla tabella pubblicata dal Ministero dell'Economia e delle Finanze il 25 marzo 2013 si legge che per le categorie di operazioni che riguardono "il credito finalizzato all'acquisto rateale per classi di importo fino a 5000 €" (infatti l'ammontare del credito del finanziamento oggetto di controllo è pari a 2400 €) il tasso effettivo globale medio (TEGM) è del 12.29% (su base annua) per operazioni costruite nel trimestre aprile - giugno 2013. Quindi, il tasso soglia per il confronto è

$$\text{Tasso soglia} = 1.25 \cdot 12.29\% + 4\% = 19.3625\%$$

dato che rispetta il differenziale normativo previsto dalla legge antiusura

$$\text{Tasso soglia} \ - \ \text{TEGM} = 19.3625\% - 12.29\% = 7.0725\% \leq 8\%$$

Si evince con chiarezza che il tasso implicito del finanziamento con costi pari al 60.47% è di gran lunga più alto del tasso soglia 19.3625% richiesto dalla normativa antiusura, quindi si conclude che il contratto è a interessi usurari.

Osservazione 6.18 La legge 108/96 all'art. 1 stabilisce una condizione sufficiente per stabilire se una operazione creditizia è a interessi usurari (attraverso il confronto tra tasso interno dell'operazione creditizia e il tasso soglia fissato dal Ministero dell'Economia e delle Finanze, sulla base delle formule viste in precedenza). Ciò non toglie che una operazione creditizia, nel rispetto dei criteri previsti dalla legge 108/96, può considerarsi a interessi usurari quando si verificano entrambe le seguenti condizioni:

1. gli interessi generati dall'operazione creditizia siano "sproporzionati" rispetto all'ammontare monetario oggetto del credito;
2. il soggetto passivo dell'operazione creditizia (ossia colui che è tenuto a pagare gli interessi) si trovi in condizioni di difficoltà economica e finanziaria.