Daniele Colistra

Fondamenti e Applicazioni di Geometria Descrittiva

Appunti ed Esercizi

Ottobre 2019

CAPITOLO 1
GEOMETRIA PROIETTIVA. ELEMENTI GEOMETRICI E CONCETTI FONDAMENTALI

1.1. Gli enti geometrici fondamentali

La **Geometria** è quella parte della matematica che studia la forma e la dimensione degli oggetti sul piano e nello spazio. In particolare, la *Geometria proiettiva* studia le proprietà delle figure rispetto alle *trasformazioni proiettive*. Le trasformazioni proiettive si ottengono sottoponendo le figure ad operazioni di proiezione da un punto e sezione con un piano (vedi oltre, paragrafo 1.2).

Il **punto** è un'entità priva di dimensione, indivisibile. Nella pratica del disegno, tuttavia, il punto avrà una dimensione affinché possa essere visualizzato. Materializzazioni di un punto: la punta di uno spillo, l'incontro di due bordi di un foglio, l'incontro di tre spigoli di un cubo.

La **retta** può essere intesa come un insieme di infiniti punti allineati. Materializzazioni di una retta: il bordo di un foglio (segmento), delimitato da due punti (che si definiscono *estremi* del segmento), è una *porzione di retta*. Prolungando tale porzione all'infinito nelle due direzioni otterremo la retta nella sua interezza. Una retta è priva di spessore, ha lunghezza infinita e individua una *direzione* nello spazio. La direzione è la caratteristica comune a un gruppo di rette parallele.

La *distanza fra due punti* è la misura del segmento che ha per estremi i due punti.

La *distanza di un punto da una retta* è la distanza minima fra il punto e la retta, ottenuta tracciando la perpendicolare dal punto alla retta.

Il **piano** si può definire come un insieme di rette che si intersecano vicendevolmente. Il piano è un elemento geometrico di dimensioni illimitate e privo di spessore. Lo possiamo anche considerare come l'insieme di infiniti punti che gli appartengono (piano punteggiato) o delle infinite rette che gli appartengono (piano rigato). Materializzazioni di un piano: un foglio di carta, delimitato da rette che si intersecano vicendevolmente e che generano quattro segmenti (i bordi del foglio), è una porzione di piano. Il piano definisce una *giacitura*, rappresentata dalla sua posizione nello spazio rispetto a un sistema di riferimento (p. es., una terna cartesiana).

Postulati (da verificare empiricamente con oggetti come fogli di carta, bacchette di legno, spilli, ecc.):

- per tre punti non allineati passa un piano (*solo un piano*);

- una retta e un punto esterno ad essa definiscono un piano (*solo un piano*);

- due rette incidenti definiscono un piano (*solo un piano*);

- per una retta passano infiniti piani;

- due rette appartenenti ad uno stesso piano individuano sempre un punto. Esso si definirà *punto proprio*, se le rette non sono parallele, *punto improprio* (ossia all'infinito) se le rette sono parallele. Il concetto di punto improprio, caratteristico della Geometria proiettiva, permette di ampliare il 5° postulato di Euclide, che espresso con parole semplici asserisce: "rette parallele non si incontrano mai". Grazie alla Geometria proiettiva, che amplia i contenuti della Geometria euclidea, possiamo affermare che *rette appartenenti a un piano si incontrano sempre: in un punto proprio, se incidenti; in un punto improprio, se parallele*.

Soffermiamoci sul concetto di elemento improprio. Consideriamo una retta r e un punto S non appartenente ad essa (fig. 1). Facciamo passare per S una retta s, che intersechi r nel punto P. Facciamo ruotare la retta s intorno al punto S. Il punto di intersezione fra le due rette r ed s si sposterà da P in P_1, P_2, ecc. Nel momento in cui le due rette r ed s saranno parallele, il punto di intersezione P_∞ sarà all'infinito.

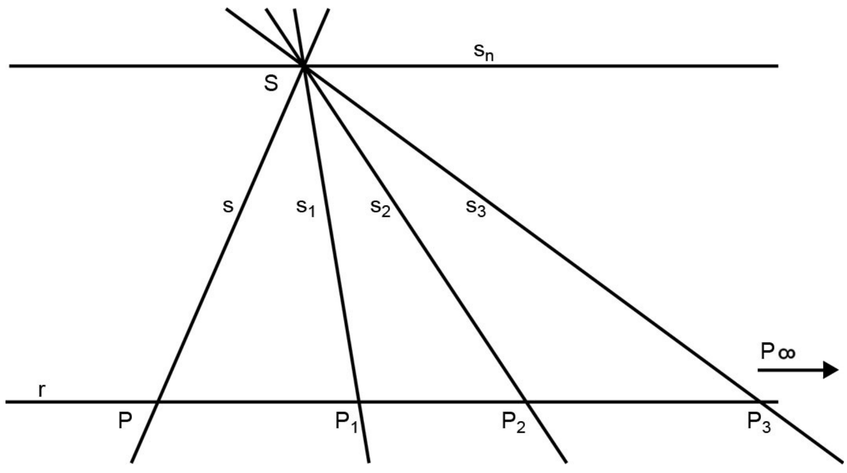


Fig. 1

Rette parallele, quindi, si incontrano in un punto all'infinito (punto improprio) ed hanno in comune, oltre al punto improprio, anche la direzione, in quanto il punto improprio assumerà anche il significato di direzione.

Analogamente, ogni piano si estende fino all'infinito e ha una retta in comune a tutti i piani ad esso paralleli.

1.2. Proiezione e Sezione

Le operazioni di *proiezione* e *sezione*, indispensabili per applicare le proprietà della Geometria proiettiva (trasformazioni proiettive), si realizzano attraverso tre elementi fondamentali:

- un *centro di proiezione* (detto anche *punto di vista*), dal quale fuoriescono i raggi proiettanti. Si noti che il centro di proiezione è sempre un punto e si indica con una lettera maiuscola dell'alfabeto latino;

- un *oggetto* da rappresentare (può essere qualsiasi oggetto, ente geometrico o figura piana e/o solida);

- un *piano di proiezione* (detto anche *quadro*), su cui si costruisce l'immagine dell'oggetto; si indica sempre con una lettera minuscola dell'alfabeto greco.

1.3. Relazioni fra gli elementi di una proiezione

Fra le posizioni che i tre elementi fondamentali (centro di proiezione, oggetto, piano di proiezione) possono assumere, consideriamo:

- oggetto da rappresentare (in questo caso, il punto P) interposto fra il piano di proiezione π e il centro di proiezione. Costruendo la retta che passa dai punti P ed S realizzeremo un'operazione di *proiezione* del punto P sul piano π. La proiezione (ossia l'immagine) di P sul piano π si indicherà con P' (fig. 2);

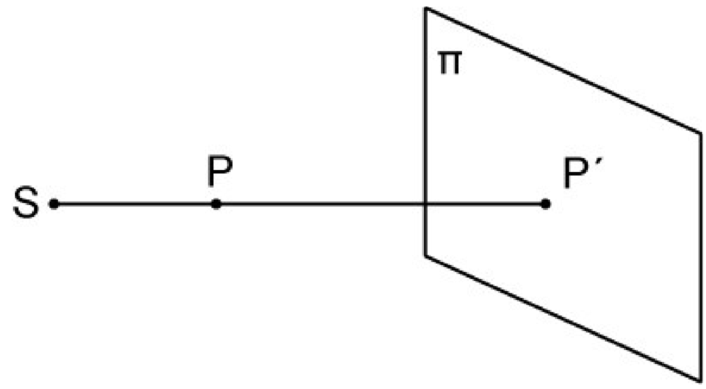


Fig. 2

- piano di proiezione π interposto fra il centro di proiezione S e l'oggetto P. In tal caso, costruendo la retta che passa dai punti P ed S, realizzeremo un'operazione di *sezione* (fig. 3).

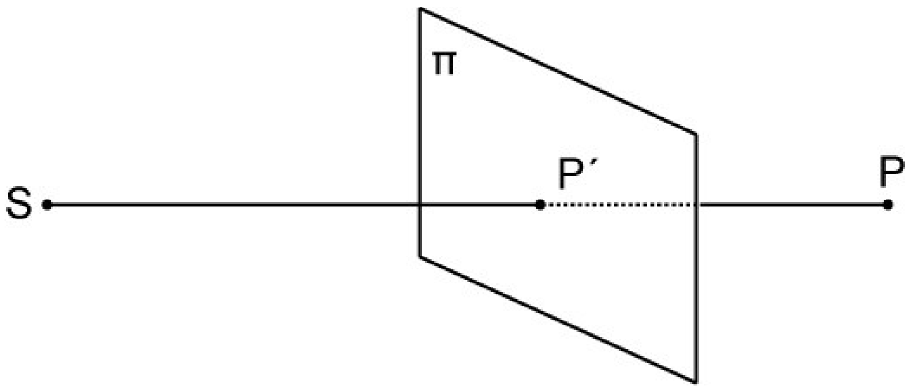


Fig. 3

1.4. Proiezioni coniche e proiezioni cilindriche

Fra le infinite posizioni spaziali che il centro di proiezione può assumere, individuiamo due posizioni fondamentali:

- centro di proiezione S a distanza *finita* (individuabile, misurabile, tangibile, in altre parole: centro di proiezione posizionato in un punto *proprio*);

- centro di proiezione S a distanza *infinita* (ossia: in un punto *improprio*).

Da queste due posizioni derivano i due *sistemi proiettivi fondamentali*:

- il sistema delle *proiezioni coniche* (dette anche *proiezioni centrali),* utilizzato nella prospettiva (fig. 4);

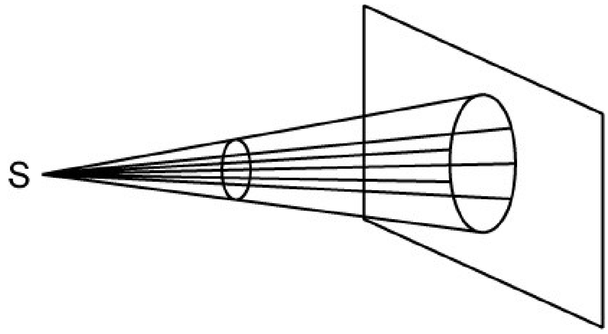


Fig. 4

- il sistema delle *proiezioni cilindriche* (dette anche *proiezioni parallele*), utilizzato nelle proiezioni ortogonali e nelle proiezioni assonometriche (fig. 5).

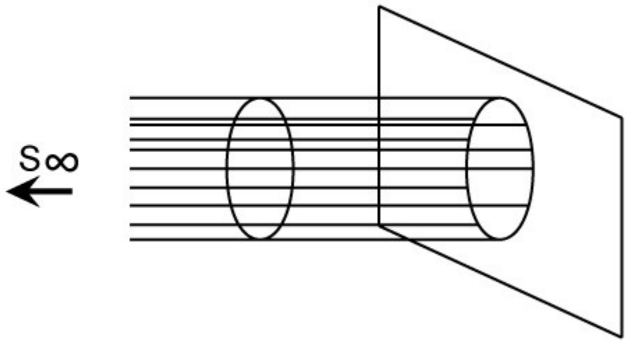


Fig. 5

Come si vede (fig. 4), nelle proiezioni coniche i raggi proiettanti convergono tutti nel centro di proiezione S. Anche nelle proiezioni cilindriche i raggi proiettanti convergono tutti nel centro di proiezione S; ma essendo S posto all'infinito, i raggi proiettanti saranno paralleli fra di loro. Il motivo per cui vengano denominate proiezioni coniche (centrali) o cilindriche (parallele) è facilmente intuibile.

1.5. Parallelismo e perpendicolarità fra gli enti geometrici fondamentali

Sia dato un piano e una retta non appartenente ad esso. Se i punti della retta hanno tutti la stessa distanza dal piano, la retta è parallela al piano. Se i punti della retta hanno distanze diverse dal piano, ci sarà un punto a distanza zero; quest'ultimo si definisce punto di *intersezione* fra la retta e il piano.

Una retta è perpendicolare a un piano se è perpendicolare a due rette non parallele del piano.

La distanza di un punto dal piano è la misura del segmento appartenente alla perpendicolare condotta dal punto al piano.

La distanza fra due rette parallele è la misura di un segmento perpendicolare alle due rette.

CAPITOLO 2
IL METODO DI MONGE O METODO DELLA DOPPIA PROIEZIONE ORTOGONALE

2.1. Generalità

Le proiezioni ortogonali, codificate dal matematico francese Gaspard Monge (1746-1818), permettono di rappresentare con esattezza su un piano (bidimensionale) gli oggetti tridimensionali. Il passaggio dalle tre dimensioni dello spazio alle due dimensioni del piano implica inevitabilmente una perdita di alcune informazioni. Per questo motivo una sola proiezione, di solito, è insufficiente a rappresentare la spazialità di un oggetto; ne occorrono almeno due (e in alcuni casi anche tre). Le singole proiezioni ortogonali, quindi, devono essere considerate come vedute parziali dell'oggetto.

Come già detto nel paragrafo 1.4, le proiezioni ortogonali si realizzano mediante proiezioni *cilindriche*. Il centro di proiezione quindi, è posto all'infinito, in direzione tale che i raggi proiettanti siano *perpendicolari rispetto al piano di proiezione*. Questa è una condizione fondamentale: nelle proiezioni ortogonali, *i raggi proiettanti sono sempre perpendicolari al piano di proiezione*. Da questa condizione fondamentale deriva il nome del metodo proiettivo.

La proiezione ortogonale di un punto, quindi, avviene tramite una retta proiettante che interseca ortogonalmente il piano di proiezione e fissa sul piano stesso, in modo univoco, l'immagine del punto.

Se dobbiamo rappresentare un punto, o una figura bidimensionale disposta parallelamente al piano di proiezione (per esempio, un quadrato), una sola proiezione può essere sufficiente. Ma in generale, una sola proiezione ortogonale è *insufficiente* a descrivere un oggetto tridimensionale, per cui è necessario usarne due in modo da rappresentare gli oggetti in modo inequivocabile.

2.1.1. I piani fondamentali di proiezione

Per l'applicazione del metodo che porta il suo nome, Monge individuò *due piani fondamentali di proiezione*: un piano *orizzontale*, chiamato P.O. (detto anche π_1 o primo piano di proiezione), intersecato ortogonalmente da un piano *verticale*, chiamato P.V. (detto anche π_2 o secondo piano di proiezione) (fig. 6).

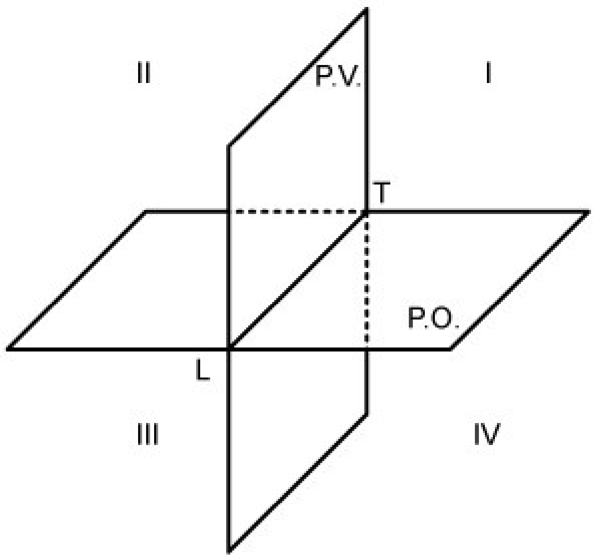


Fig. 6

L'intersecazione dei due piani fondamentali definisce una retta, chiamata *linea di terra* (L.T.). I due piani fondamentali dividono lo spazio infinito in 4 *diedri* aventi un'unica origine di riferimento: la linea di terra. Per convenzione, denominiamo:

- I diedro, lo spazio compreso fra il semipiano orizzontale anteriore e il semipiano verticale superiore;
- II diedro, lo spazio compreso fra il semipiano orizzontale posteriore e il semipiano verticale superiore;
- III diedro, lo spazio compreso fra il semipiano orizzontale posteriore e il semipiano verticale inferiore;
- IV diedro, lo spazio compreso fra il semipiano orizzontale anteriore e il semipiano verticale inferiore.

Per facilitare la proiezione degli oggetti, di norma essi vengono interamente posizionali all'interno di uno dei quattro diedri (solitamente il primo), evitando che siano intersecati da uno dei piani fondamentali. Visto che nella pratica operativa, salvo casi particolari, tutti gli oggetti da rappresentare saranno posizionati nel primo diedro, essi saranno proiettati sul semipiano orizzontale anteriore e sul semipiano verticale superiore. Per semplificare ulteriormente la costruzione grafica Gaspard Monge stabilì che il piano verticale ruotasse attorno alla L.T. di 90°, fino a coincidere con il piano orizzontale. In questo modo, i due semipiani del diedro che contiene l'oggetto da rappresentare giaceranno su un unico piano, coincidente con il foglio da disegno (fig. 7).

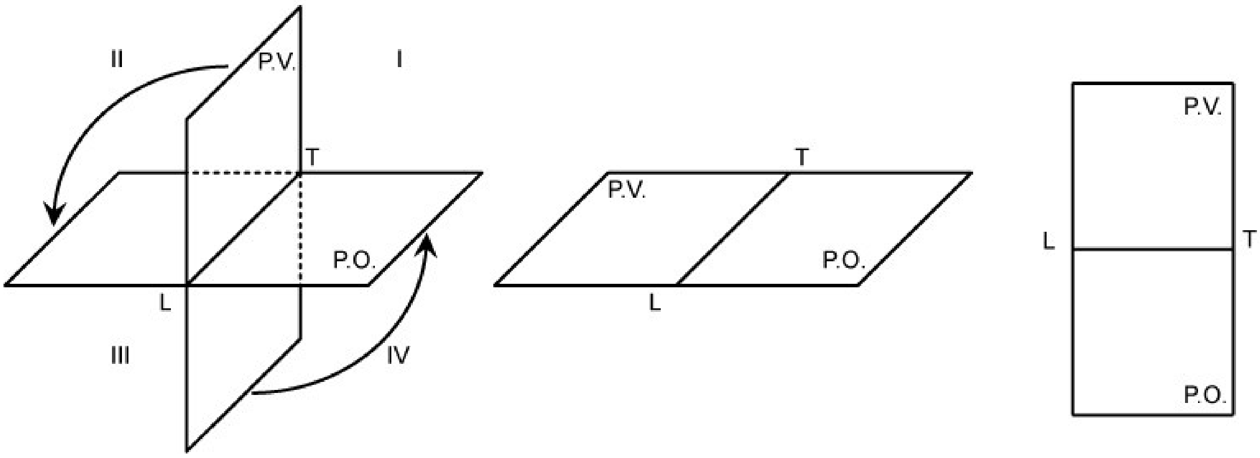


Fig. 7

A volte, per la rappresentazione di figure particolarmente complesse, ai piani fondamentali viene aggiunto un *piano laterale*, (denominato anche P.L. o π_3) in modo da formare un *triedro* che consenta l'esecuzione di una terza proiezione (fig. 8).

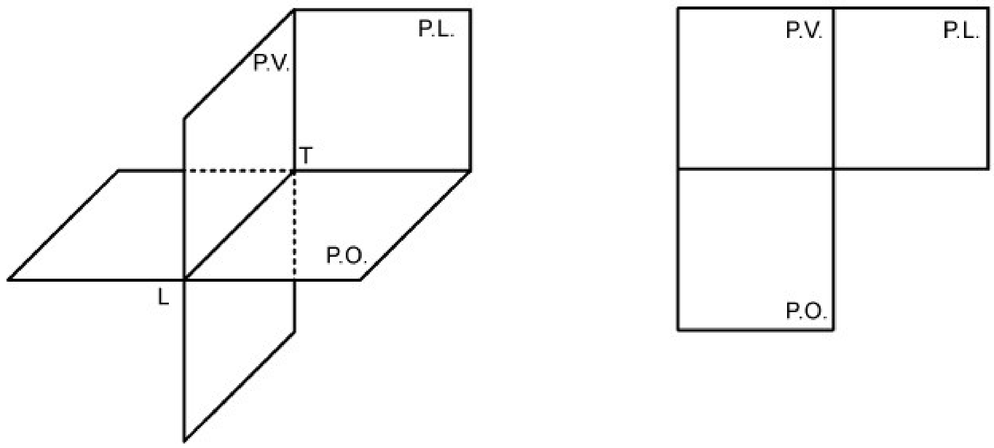


Fig. 8

2.1.2. Procedimento proiettivo

Eseguire le proiezioni ortogonali di una figura dello spazio significa *costruire sui piani fondamentali di proiezione le immagini geometriche della figura stessa*. Ciò si ottiene proiettando ortogonalmente, da un centro di proiezione all'infinito, sui due piani π_1 e π_2 *punti significativi* della figura oggettiva. In questo modo si descrive la figura stessa due volte: dall'alto (sul P.O., o π_1), in modo da ottenere la *pianta*, e di fronte (sul P.V., o π_2), in modo da ottenere il *prospetto*.

2.1.3. Simbologia

- i punti *oggettivi* si indicano sempre con *lettere maiuscole dell'alfabeto latino*: A, B, C, D, ...
- le rette *oggettive* si indicano sempre con *lettere minuscole dell'alfabeto latino*: r, s, t, u, …
- i piani *oggettivi* si indicano sempre con *lettere minuscole dell'alfabeto greco*: α, β, γ, δ, …

Per non confondere le figure oggettive (cioè gli elementi che vogliamo rappresentare) con le immagini proiettate, si usano per queste ultime degli esponenti che indicano a quale piano si riferisce la proiezione.

L'esponente ' (primo) si utilizza per le proiezioni su π_1; L'esponente '' (secondo) si utilizza per le proiezioni su π_2.

Da ciò deriva che:

- il punto oggettivo A proiettato sul P.O. (π_1) viene contrassegnato con A';
- il punto oggettivo A proiettato sul P.V. (π_2) viene contrassegnato con A'';
- la retta oggettiva r proiettata sul P.O. (π_1) viene contrassegnata con r';
- la retta oggettiva r proiettata sul P.V. (π_2) viene contrassegnata con r'';
- il piano oggettivo α proiettato sul P.O. (π_1) viene contrassegnato con α';
- il piano oggettivo α proiettato sul P.V. (π_2) viene contrassegnato con α''.

2.2. Proiezioni ortogonali di punti

Dato un punto P posto nel primo diedro, lo si proietta una prima volta sul P.O. in P' tramite la retta r' e una seconda volta sul P.V. in P'' tramite la retta r''. Le rette passanti per P, indispensabili per ottenere le due distinte immagini del punto P, si dicono *rette proiettanti* (fig. 9) e, ovviamente, sono rispettivamente ortogonali ai piani su cui effettuano la proiezione. Nel metodo di Monge, il termine "proiettante" ha lo stesso significato di "ortogonale".

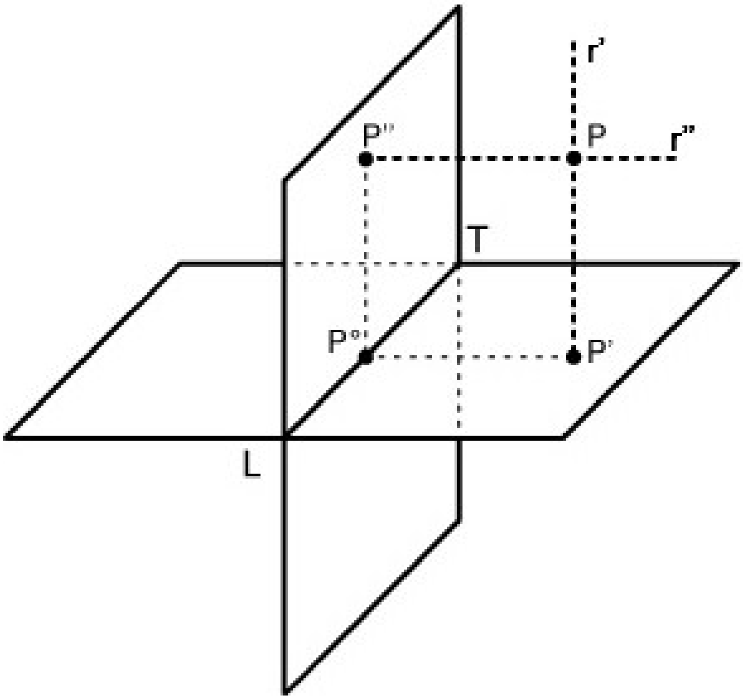


Fig. 9

È interessante osservare come dal punto P si possano ottenere le sue due proiezioni; e, al tempo stesso, come dalle proiezioni P' e P'' si possa risalire al punto P, che rappresenta il punto d'incontro delle due perpendicolari al P.O. e al P.V. tracciate da P' e P''.

La figura 9 mostra le proiezioni di P su due piani distinti, ma il metodo di Monge, come già detto, prevede che gli elementi da proiettare siano disegnati sullo stesso foglio. Occorre quindi ribaltare attorno alla linea di terra il piano verticale, in modo che si sovrapponga al piano orizzontale. In questo modo, le due proiezioni (orizzontale e verticale) si troveranno su un unico piano (fig. 10).

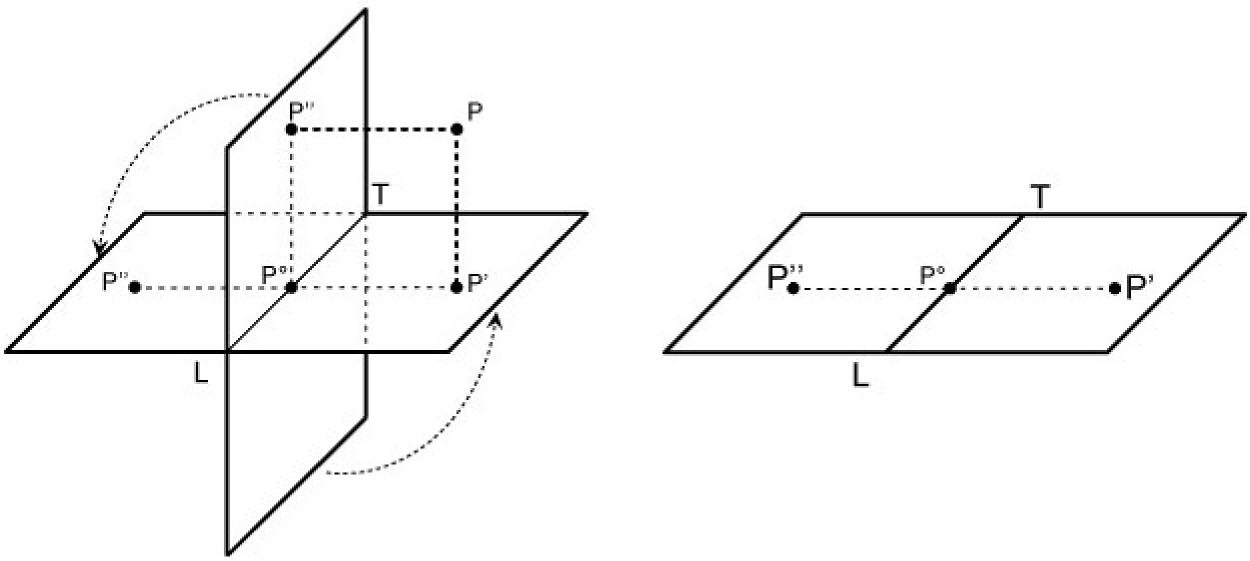


Fig. 10

Osservando la figura 10, si nota che durante il ribaltamento P'' descrive un arco di circonferenza che ha centro in P° e raggio pari alla distanza fra P°e P''. A ribaltamento avvenuto, il punto P'' giace sulla retta che contiene i punti P' e P°. Tale retta è perpendicolare alla linea di terra e si definisce "retta di richiamo".

Ricapitolando, per rappresentare un punto col metodo di Monge occorre (fig. 11):

- tracciare un tratto della linea di terra (L.T.);
- tracciare una perpendicolare ad essa (detta “retta di richiamo”);
- individuare la proiezione P’ sul P.O. e la proiezione P’’ sul P.V.

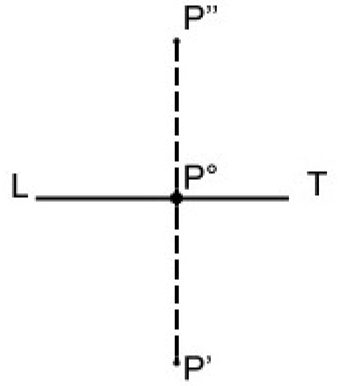


Fig. 11

La distanza da P’’ alla L.T. (ossia la distanza P''-P°) si chiama *quota*; la distanza da P’ alla L.T. (ossia la distanza P'-P°) si chiama *aggetto*.

È importante notare che P° si può considerare come la proiezione sul P.V. di P’; e naturalmente anche come la proiezione sul P.O. di P’’. Questa considerazione, come vedremo, si rivelerà fondamentale.

2.2.1. Proiezioni ortogonali di punti. Posizioni particolari

Se un punto giace sul semipiano orizzontale anteriore, la proiezione sul P.O. coincide con il punto stesso (e si dirà che il punto è “unito” sul P.O., cioè coincide con la sua immagine, mentre la proiezione sul P.V. cade sulla L.T. e coincide con P° (fig. 12).

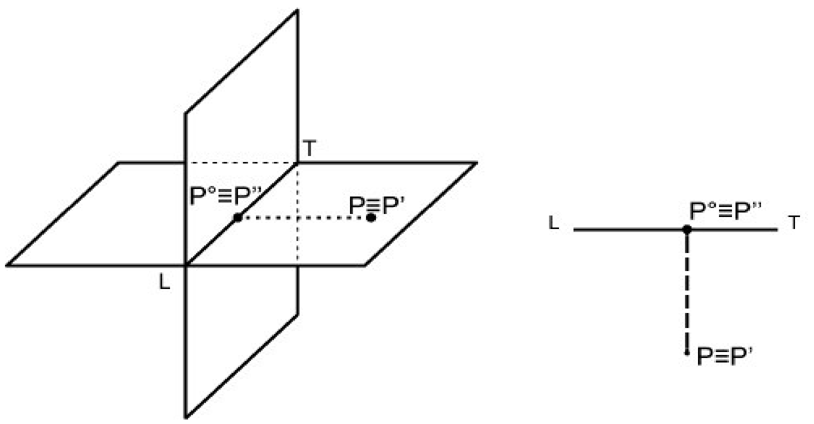


Fig. 12

Se un punto giace sul semipiano verticale superiore, la proiezione sul P.V. coincide con il punto stesso (punto “unito” sul P.V.), mentre la proiezione sul P.O. cade sulla L.T. e coincide con P°(fig. 13).

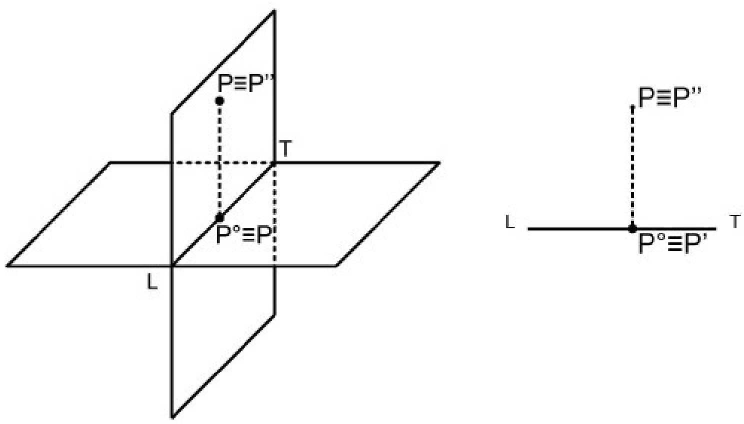


Fig. 13

Se un punto appartiene alla linea di terra, le sue proiezioni coincidono con il punto stesso (fig. 14).

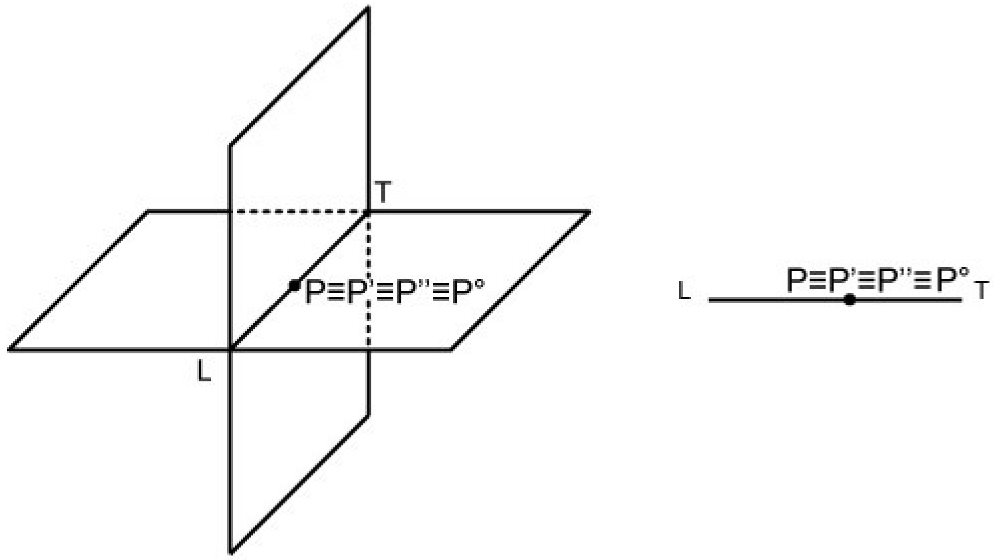


Fig. 14

2.2.2. Proiezioni ortogonali di punti. Esercizi di verifica

Proiettare un punto distante 10 cm dal P.O. (quota) e 16 cm dal P.V. (aggetto)

Proiettare un punto appartenente al P.O. e distante 14 cm dal P.V.

Proiettare un punto appartenente al P.V. e distante 11 cm dal P.O.

Proiettare un punto appartenente al piano bisettore del primo diedro.

Proiettare un punto appartenente alla L.T.

2.3. Proiezioni ortogonali di segmenti

Si definisce *segmento* una parte di retta limitata da due punti, detti *estremi* del segmento. La proiezione ortogonale di segmenti si può ricondurre alla proiezione ortogonale dei due punti che ne costituiscono le estremità.

Le innumerevoli posizioni spaziali che possono caratterizzare un segmento si riducono alle seguenti categorie:

- segmenti inclinati rispetto ai piani di proiezione;
- segmenti perpendicolari a un piano di proiezione (e, quindi, paralleli all'altro);
- segmenti paralleli a un piano di proiezione e inclinati rispetto all'altro;
- segmenti paralleli a entrambi i piani di proiezione.

2.3.1. Rappresentazione di un segmento inclinato ai due P.P.

Per rappresentare il segmento occorre ricavare le proiezioni dei due estremi. Il problema si può quindi ricondurre alla proiezione ortogonale dei punti A e B. La figura 15 mostra le proiezioni ortogonali di un segmento inclinato rispetto ai due piani di proiezione. Si noti che la distanza fra i punti A'-B' e fra i punti A"-B" non corrisponde alla distanza reale nello spazio fra i punti A-B

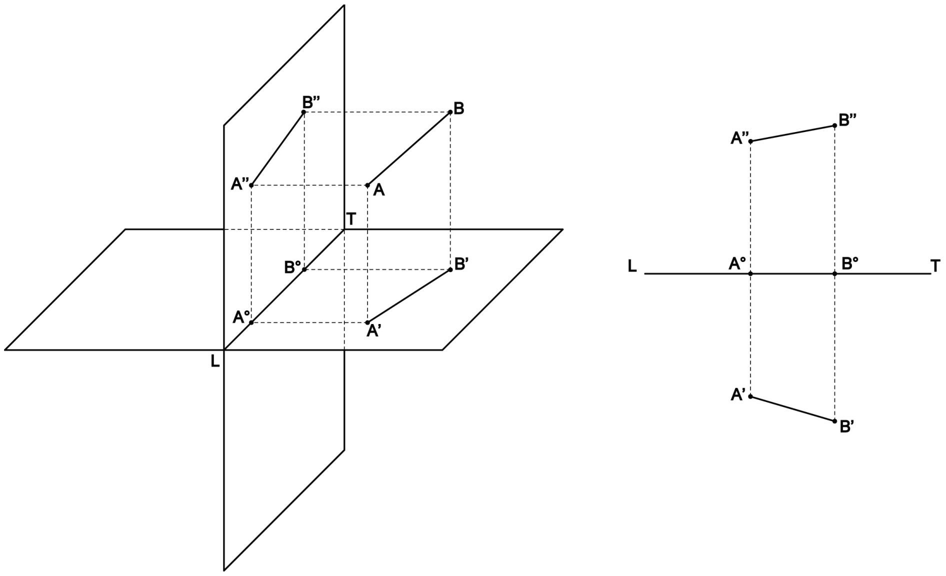


Fig. 15

2.3.2. Rappresentazione di un segmento perpendicolare al P.O.

Sul P.O. il segmento appare come un punto, costituito da A' e B' coincidenti, mentre la proiezione sul P.V. è perpendicolare alla linea di terra. In questo caso, le dimensioni del segmento proiettato sul P.V. (A"B") corrispondono alla la lunghezza reale del segmento AB poiché esso è parallelo a uno dei piani di proiezione (fig. 16).

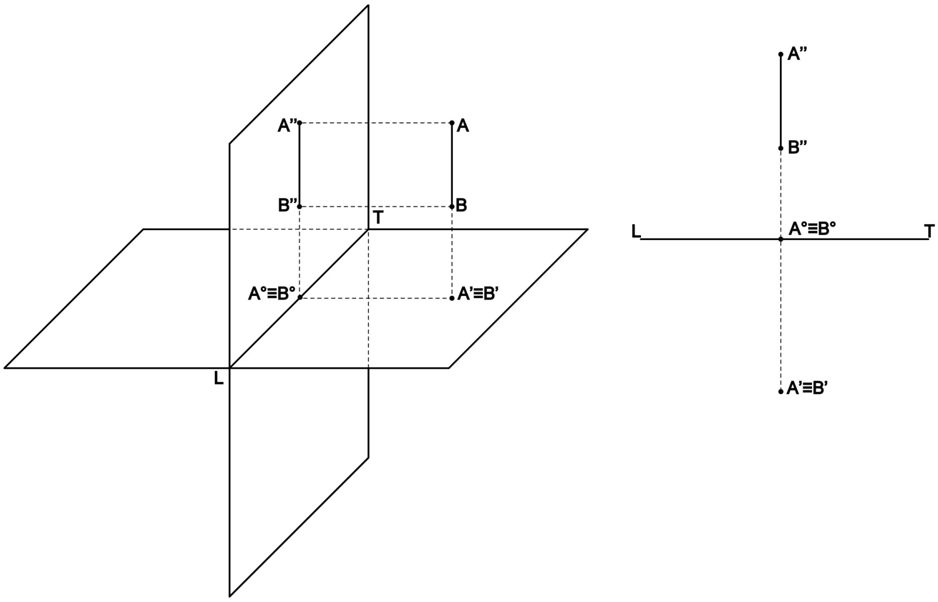


Fig. 16

2.4. Proiezioni ortogonali di rette

La proiezione ortogonale di una retta è un'altra retta. Essa si ottiene facendo passare, per gli infiniti punti che la costituiscono, infinite rette ortogonali (proiettanti) a ciascuno dei due piani di proiezione. Le rette proiettanti, nel loro insieme, definiscono un piano ortogonale al piano su cui si effettua la proiezione (fig. 17). Nella figura 17, i due piani ortogonali ai due piani di proiezione sono contrassegnati con le lettere α e β. I piani α e β sono, come già detto, *piani proiettanti*, perchè sono rispettivamente perpendicolari a uno dei due piani di proiezione. Le rette di intersezione dei piani proiettanti con i piani di proiezione costituiscono le proiezioni ortogonali della retta (r', proiezione orizzontale, r'', proiezione verticale). In questo esempio (fig. 17), la retta r è parallela sia al piano orizzontale che al piano verticale. Essendo parallela a entrambi, essa li intersecherà in punti impropri, cioè all'infinito.

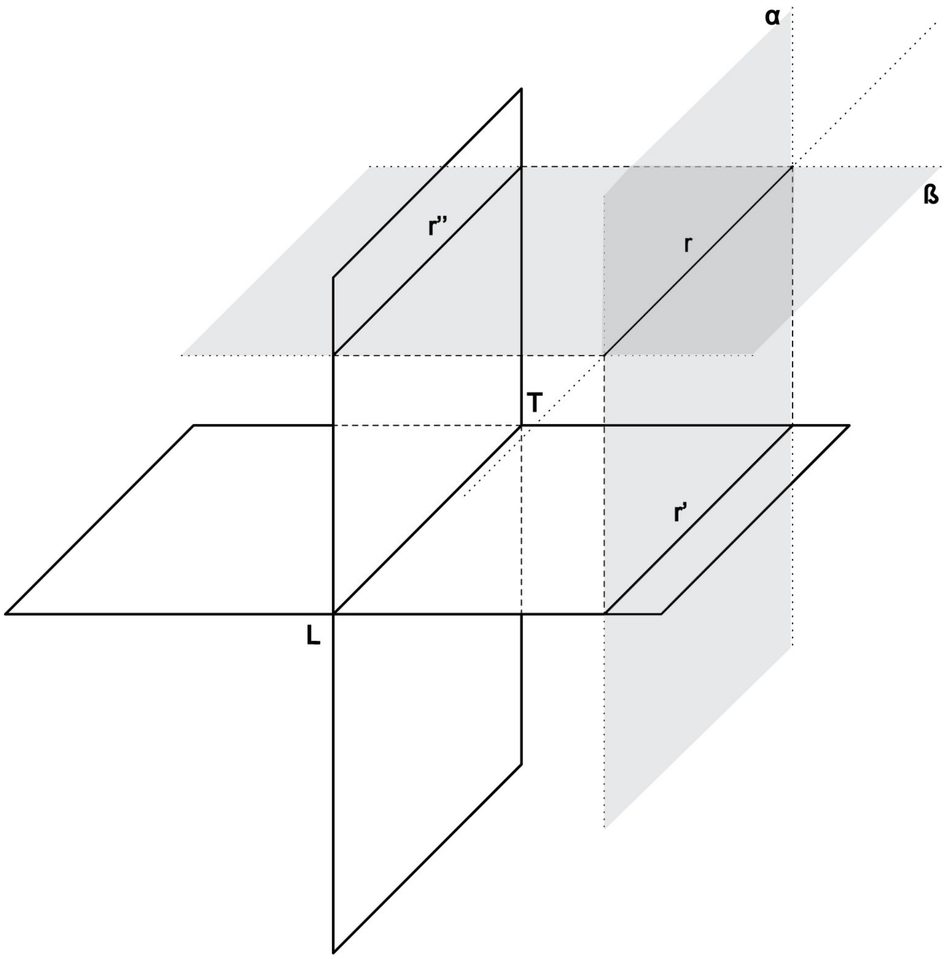


Fig. 17

Ovviamente non è possibile costruire la proiezione di una retta proiettando, uno per uno, gli infiniti punti che la compongono. Per costruire la proiezione ortogonale di una retta *è sufficiente individuare due punti di essa*. Infatti, secondo il primo postulato di Euclide, "per due punti si può condurre una e una sola retta". I due punti che utilizzeremo per ottenere le proiezioni ortogonali di una retta sono i punti di intersecazione della retta stessa con il piano orizzontale e con il piano verticale. Questi punti si chiamano *tracce della retta* e, per convenzione, si indicano con la lettera T affiancata da un numero corrispondente al piano intersecato e una lettera minuscola corrispondente al nome assegnato alla retta. Quindi, ad esempio, T_1r indicherà il punto di intersecazione della retta r con il piano orizzontale; T_2s indicherà il punto di intersecazione della retta s con il piano verticale; e così via.

Ribadiamo questo concetto fondamentale: "per due punti si può condurre una e una sola retta" e quindi, nel metodo di Monge, *una retta risulta individuata dalle sue tracce*. Le tracce sono la prima cosa che dovremo individuare quando dobbiamo effettuare la rappresentazione di una retta in proiezione ortogonale.

Dopo avere individuato le tracce della retta, occorre costruire, per ciascuna traccia, le due proiezioni ortogonali: una sul piano orizzontale (pianta) e una sul piano verticale (prospetto). Consideriamo una retta di nome r, genericamente disposta nello spazio. Essa intersecherà il piano orizzontale nel punto T_1r e il piano verticale nel punto T_2r (tracce di r). T_1r giace sul piano orizzontale; di esso dovremo costruire le sue due proiezioni ortogonali. Analogamente, T_2r giace sul piano verticale, e dovremo costruire le sue due proiezioni ortogoonali.

Quindi, per ottenere la proiezione ortogonale della retta r sul piano orizzontale (pianta) dovremo individuare T_1r eT'_2r; unendo questi due punti, otterremo la proiezione della retta sul piano orizzontale (pianta), ossia r'. Per ottenere la proiezione ortogonale della retta r sul piano verticale (prospetto) dovremo individuare T_2r eT'_1r; unendo questi due punti, otterremo la proiezione della retta sul piano verticale (prospetto), ossia r".

Ricapitolando: *le proiezioni ortogonali di una retta si ottengono individuando, su ogni piano di proiezione, la proiezione ortogonale delle due tracce e conducendo per esse, piano per piano, una linea, la quale rappresenta la retta-immagine su quel piano*.

Le innumerevoli posizioni spaziali di una retta si possono ricondurre alle seguenti categorie:

- *rette generiche*, appartenenti a piani variamente inclinati rispetto al piano orizzontale e al piano verticale (fig. 18);

- *rette parallele a uno dei due piano di proiezione* (dette “orizzontali” se parallele al piano orizzontale, “frontali” se parallele al piano verticale; figg. 19, 20);

- *rette perpendicolari a un piano di proiezione* (dette anche “rette proiettanti”; fig. 21);

- *rette di profilo* (appartenenti a un piano perpendicolare sia al piano orizzontale che al piano verticale).

2.4.1. Retta inclinata rispetto ai piani di proiezione (retta “generica”)

Sia data una retta generica r, inclinata ai piani di proiezione (fig. 18). Indichiamo con T_1r la traccia sul piano orizzontale e con T_2r la traccia sul piano verticale. Per determinare le due proiezioni, occorre considerare, come già visto nella fig. 17, due piani α e β, contenenti la retta r e perpendicolari rispettivamente al P.O e al P.V. I due piani determinano le proiezioni r’ e r’’.

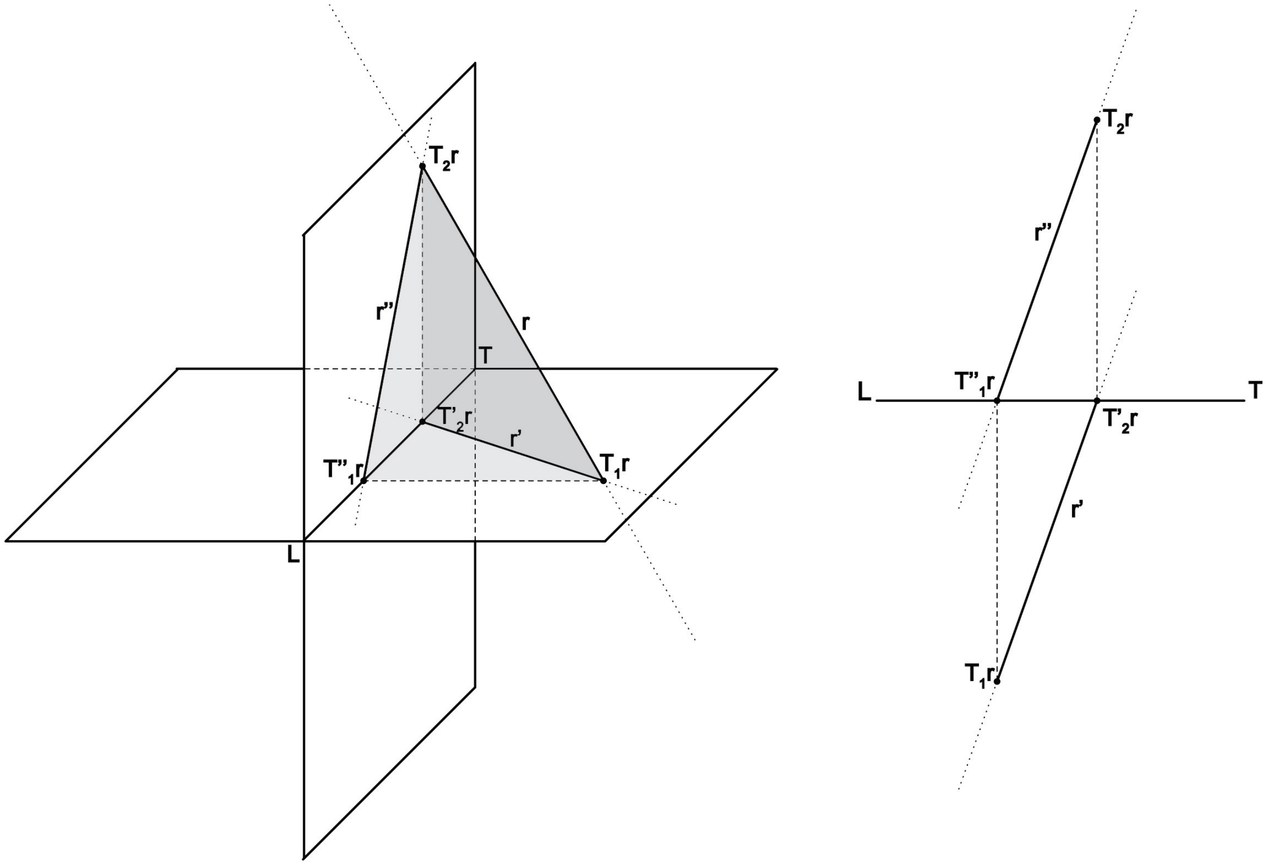


Fig. 18

Per rappresentare la retta in doppia proiezione ortogonale, si procede nel seguente modo:

- si traccia una linea orizzontale (L.T.);

- si fissa T_1r (traccia di r sul piano orizzontale) e si disegnano le sue due proiezioni ortogonali: T_1r sul P.O. (punto unito) e T''_1r sul P.V.;

- si fissa T_2r (traccia di r sul piano verticale) e si disegnano le sue due proiezioni ortogonali: T_2r sul P.V. (punto unito) e T''_2r sul P.O.;

- si congiunge T_1r con T'_2r, determinando r’, proiezione della retta r sul piano orizzontale (pianta);

- si congiunge T_2r con T''_1r, determinando r’’, proiezione della retta r sul piano verticale (prospetto).

È opportuno notare che le proiezioni ortogonali r' e r"si estendono all'infinito nelle due direzioni (parte tratteggiata); tuttavia noi rappresenteremo solo la porzione compresa nel primo diedro, ossia il segmento compreso fra la proiezione delle tracce sul piano orizzontale e sul piano verticale.

2.4.2. Retta parallela al P.O. e inclinata rispetto al P.V. (retta "orizzontale")

Sia data una retta r parallela al P.O. e inclinata al P.V. (fig. 19). La proiezione mediante piani contenenti la retta e ortogonali al P.O. e al P.V. determinerà le proiezioni r' e r''. È interessante notare il fatto che r'' sia parallela alla L.T., e che T_1r sia all'infinito.

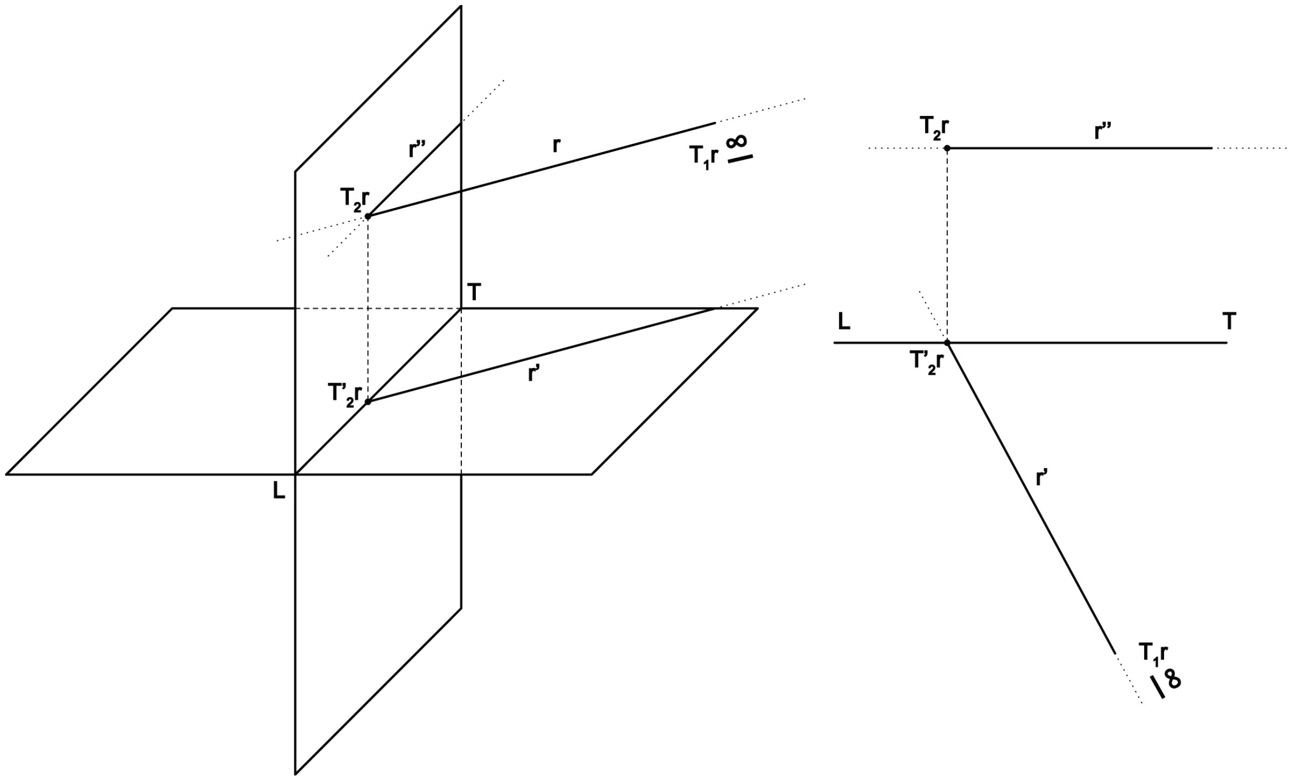


Fig. 19

Per rappresentare la retta in doppia proiezione ortogonale, si procede nel seguente modo:

- si traccia la L.T.;
- si fissa T_2r (traccia di r sul piano verticale) e si proietta sulla linea di terra, ottenendo T'_2r (proiezione di T_2r sul P.O.);
- si definisce la direzione di T_1r (traccia di r sul piano orizzontale, posta all'infinito);
- si costruisce la semiretta con estremità T'_2r in direzione di T_1r, determinando r' (pianta);
- si costruisce la semiretta con estremità T_2r in direzione parallela alla L.T. (la retta è orizzontale e tutti i suoi punti hanno uguale quota), determinando r'' (prospetto).

Anche in questo caso è opportuno ricordare che le proiezioni ortogonali r' e r''si estendono all'infinito nelle due direzioni (parte tratteggiata); tuttavia noi rappresenteremo solo la porzione compresa nel primo diedro, ossia la semiretta compresa fra la proiezione delle tracce sul piano orizzontale e sul piano verticale.

2.4.3. Retta parallela al P.V. e inclinata rispetto al P.O. (retta “frontale”)

Sia data una retta r parallela al P.V. e inclinata al P.O. (fig. 20). Si tratta di un caso analogo al precedente, solo che r’ è parallela alla L.T., mentre T_2r è all’infinito.

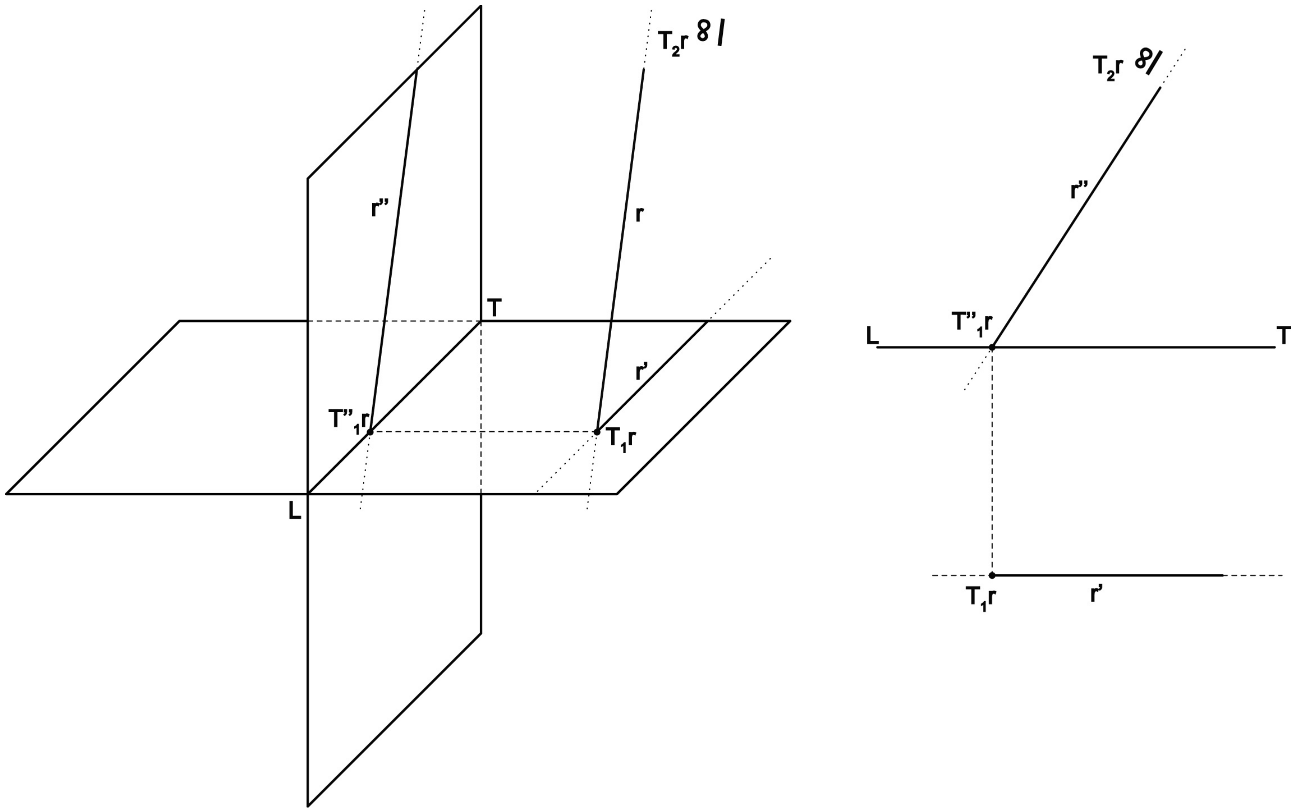


Fig. 20

Per rappresentare la retta in doppia proiezione ortogonale, si procede nel seguente modo:

- si fissa T_1r (traccia orizzontale di r) e si proietta sulla linea di terra, ottenendo T”$_1$r (proiezione di T_1r sul P.V.); ;
- si fissa la direzione di T_2r (traccia di r sul piano verticale, posta all’infinito);
- si costruisce la semiretta con estremità T”$_1$r in direzione di T_2r, determinando r”;
- si costruisce la semiretta con estremità T_1r in direzione parallela alla L.T., determinando r’.

Anche in questo caso, come nei casi precedenti, rappresenteremo solo la porzione della retta compresa nel primo diedro; è sottinteso che essa si estende all'infinito e quindi anche le sue due proiezioni ortogonali, r' e r'', si estendono all'infinito.

2.4.4. Retta perpendicolare al P.O. (retta “proiettante” in prima proiezione)

Sia data una retta r perpendicolare al P.O. (fig. 21). La proiezione mediante un unico piano ortogonale sia al P.O. che al P.V. determinerà, sul P.O., un punto che corrisponderà sia a T_1r che a r’. Sul P.V., invece, T_2r sarà all’infinito.

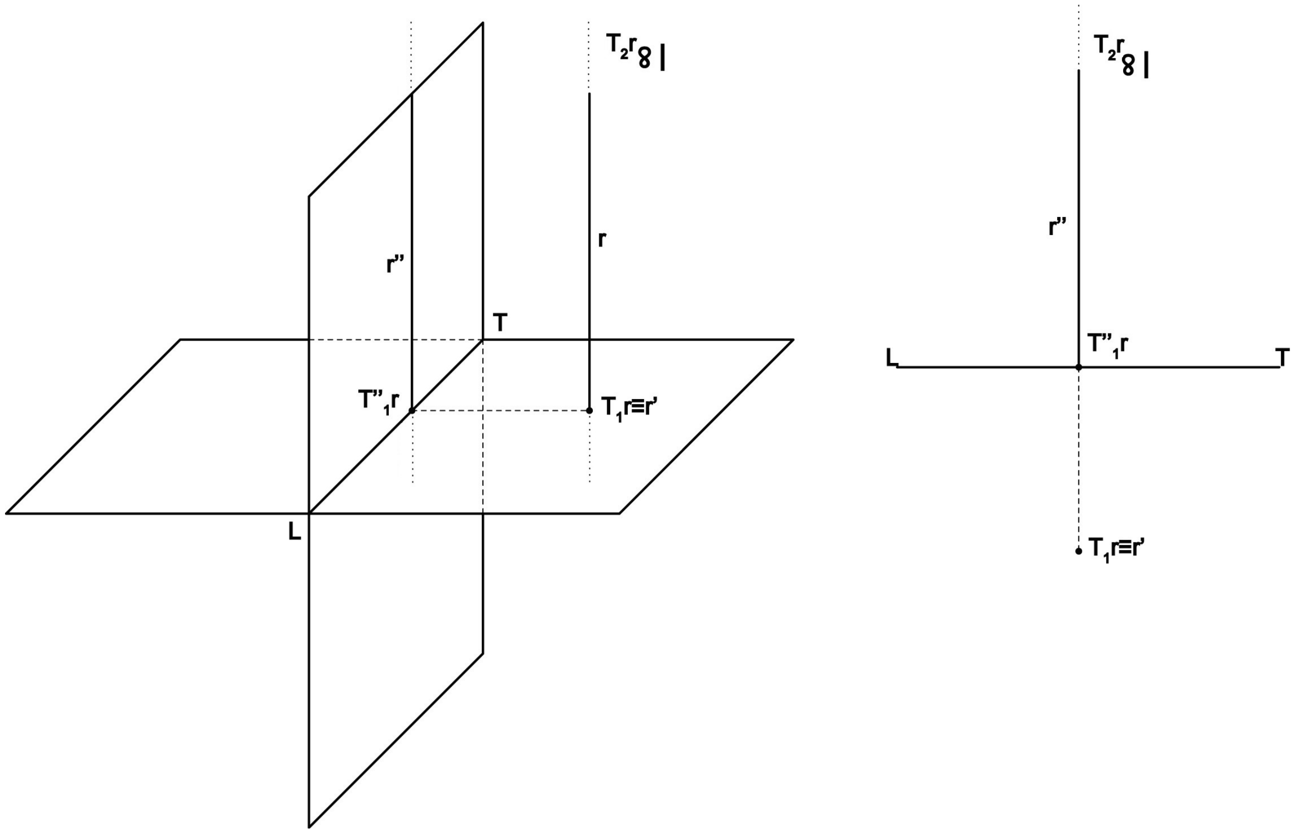


Fig. 21

Per rappresentare la retta in doppia proiezione ortgonale, si procede nel seguente modo:

- si fissa la T_1r e si proietta sulla linea di terra, ottenendo T''_1r (proiezione di T_1r sul P.V.);
- si fissa la direzione di T_2r;
- si costruisce la semiretta con vertice T''_1r in direzione di T_2r, determinando r’’ (prospetto di r);
- si rappresenta r', pianta di r (che, come già visto, è un punto coincidente con T_1r).

2.4.5. Retta passante per la linea di terra

Sia data una retta r passante per la L.T. (fig. 22). Si tratta di un caso particolare, in quanto le tracce della retta sul piano orizzontale (T_1r) e sul piano verticale (T_2r) coincideranno e, quindi, coincideranno anche le relative proiezioni T''_1r e T'_2r. Per tracciare le proiezioni della retta, occorrerà individuare un *punto ausiliario P*, ad essa appartenente. Infatti, per le *condizioni di appartenenza* (che vedremo più dettagliatamente oltre, al paragrafo 2.6.1), condizione necessaria e sufficiente perché un punto appartenga a una retta è che *le proiezioni del punto appartengano alle proiezioni omonime della retta*. Quindi, fissate le proiezioni ortogonali del punto (P' e P''), potremo ricavare anche le proiezioni ortogonali della retta (r' e r'').

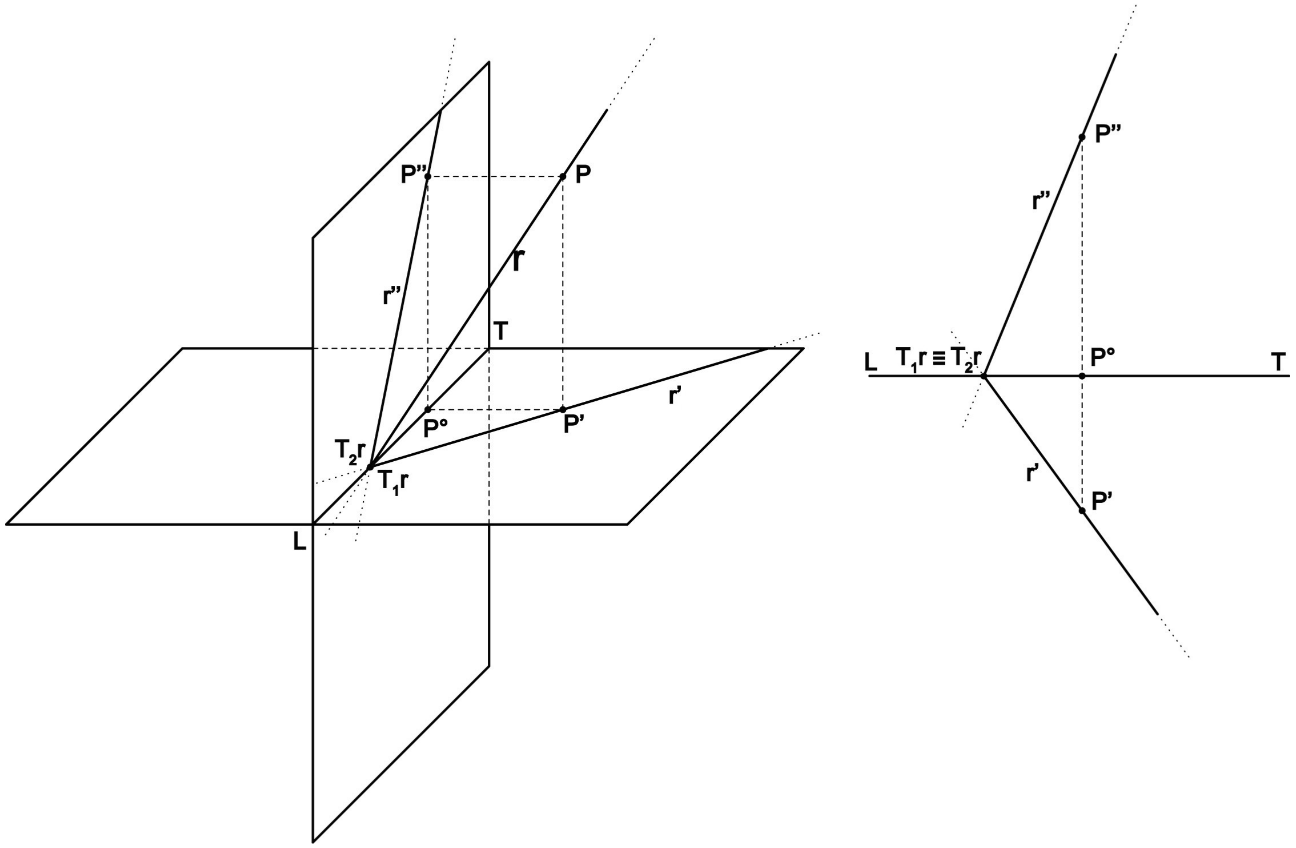


Fig. 22

Per rappresentare una retta passante per la linea di terra in doppia proiezione ortogonale, si procede nel seguente modo:

- si fissano sulla linea di terra T_1r e T_2r, coincidenti anche con T''_1r e T'_2r;
- si determinano P' e P'', proiezioni del punto ausiliario P (appartenente alla retta r);
- per le condizioni di appartenenza di un punto a una retta, le proiezioni P' e P'' apparterranno alle proiezioni omonime della retta r' ed r''; pertanto basterà congiungere si congiunge T_1r con P', T_2r con P'', determinando r' e r''.

Si specifica che nel metodo della doppia proiezione ortogonale, "omonimo" vuol dire: "relativo allo stesso piano di proiezione".

2.4.6. Rette parallele

Nel metodo della doppia proiezione ortogonale, le condizioni di parallelismo fra rette asseriscono che: “due rette sono parallele se le proiezioni omonime sono parallele” (fig. 23).

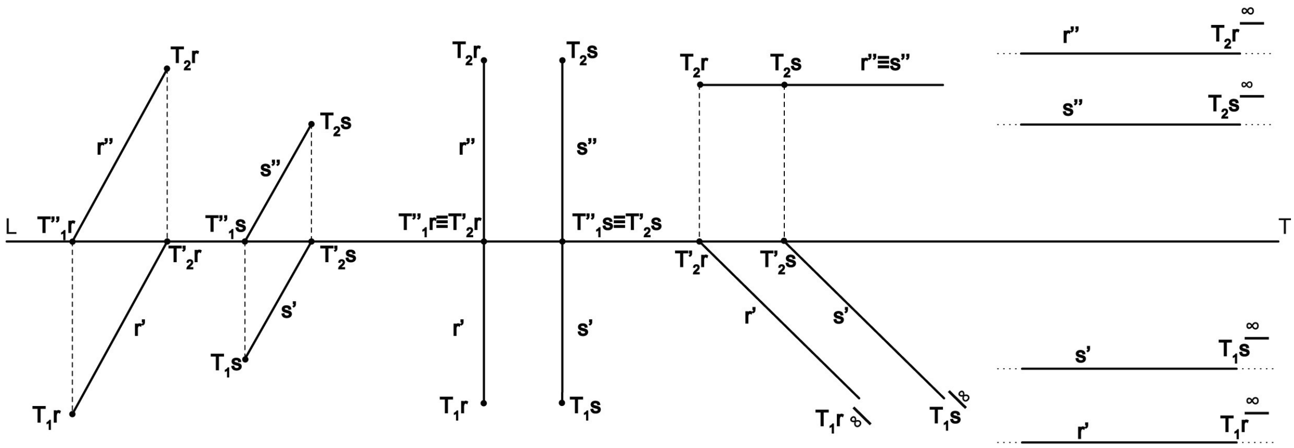


Fig. 23

2.4.7. Rette incidenti

Due rette si dicono incidenti quando hanno un punto in comune (fig. 24).

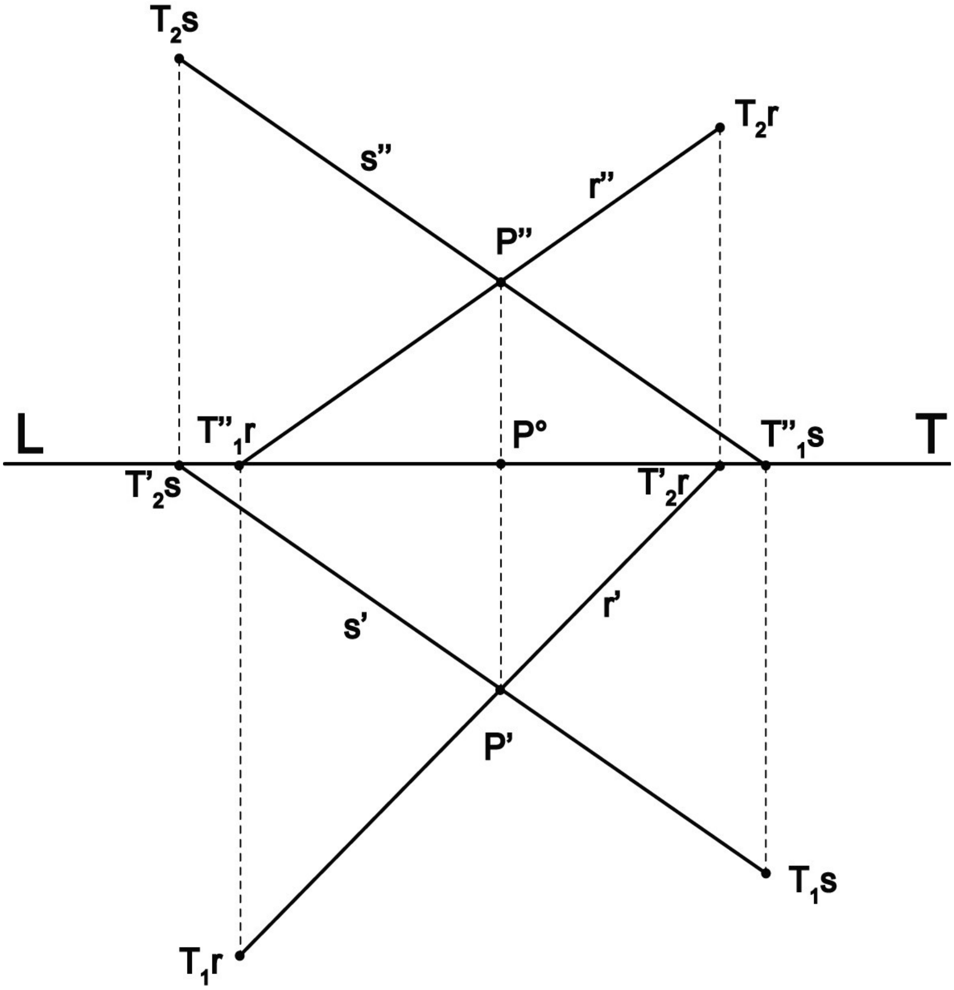


Fig. 24

Per rappresentare due rette incidenti, occorre innanzitutto determinare le proiezioni del punto in comune (P' e P"). Poi si costruiscono le proiezioni delle due rette (r' ed s', passanti per P'; r" ed s", passanti per P"). Infine si individua la posizione delle tracce.

2.4.8. Rette sghembe

Due rette si dicono sghembe quando non appartengono allo stesso piano. Non hanno nessun punto in comune e, quindi, il punto di intersezione delle loro proiezioni omonime non appartiene alla stessa retta di richiamo (fig. 25).

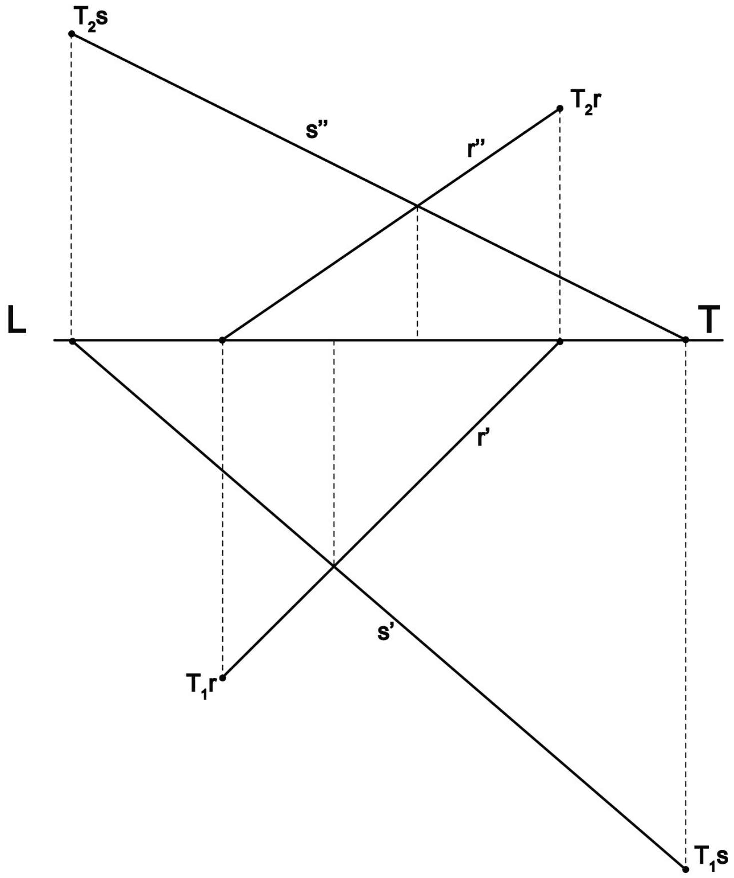


Fig. 25

Per rappresentare due rette sghembe in doppia proiezione ortogonale basta accertarsi che il punto di intersezione delle due proiezioni sul piano orizzontale (r', s') non sia sulla stessa retta di richiamo (quindi allineato) al punto di intersezione delle due proiezioni sul piano verticale (r'', s'').

2.4.9. Proiezioni ortogonali di segmenti e rette. Esercizi di verifica

Disegnare un segmento parallelo alla L.T. e ai due piani di proiezione

Disegnare un segmento parallelo al P.O. e inclinato al P.V.

Disegnare un segmento parallelo al P.V. e inclinato al P.O.

Disegnare un segmento perpendicolare al P.V.

Date due tracce T_1r e T_2r, determinare le proiezioni della retta da loro individuate

Date due proiezioni di una retta r' ed r'', determinare le proiezioni delle tracce

Disegnare una retta parallela alla linea di terra

Disegnare una retta perpendicolare al P.V. (retta proiettante in seconda proiezione)

Disegnare una retta di profilo

Disegnare due rette incidenti, determinando la prima e la seconda proiezione del loro punto di intersezione

Disegnare due rette sghembe

2.5. Proiezioni ortogonali di piani

Nel metodo della doppia proiezione ortogonale, un piano α si rappresenta mediante le sue *tracce*, cioè le rette di intersezione del piano stesso con due piani di proiezione. La retta di intersezione (traccia) del piano α con il piano orizzontale sarà chiamata $t_1\alpha$; la retta di intersezione (traccia) del piano α con il piano verticale sarà chiamata $t_2\alpha$. La proiezione dei punti del piano α sul piano orizzontale è la porzione del piano orizzontale compresa fra $t_1\alpha$ e la linea di terra. La proiezione dei punti del piano α sul piano verticale è la porzione del piano piano verticale compresa fra $t_2\alpha$ e la linea di terra.

2.5.1. Piano inclinato rispetto ai piani di proiezione (piano generico)

Sia dato un piano α, inclinato ai piani di proiezione (fig. 26). Sia sul piano orizzontale che sul piano verticale le tracce sono inclinate alla L.T.

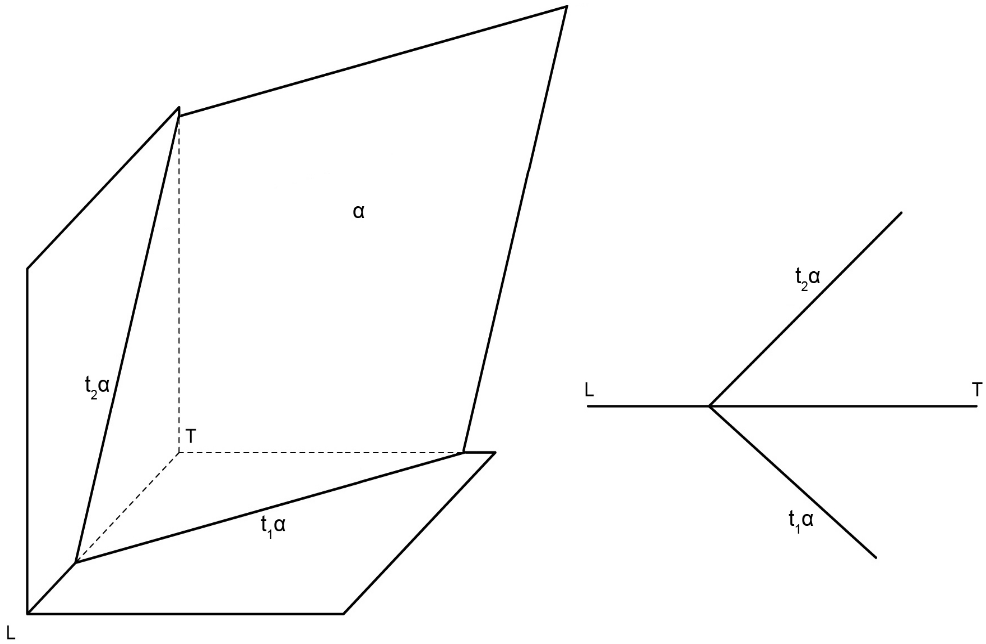


Fig. 26

2.5.2. Piano parallelo al piano verticale

Sia dato un piano α, parallelo al P.V. (fig. 27). La traccia $t_1\alpha$ è parallela alla L.T., mentre la traccia $t_2\alpha$ è all'infinito. Sul piano del disegno si rappresenta solo $t_1\alpha$.

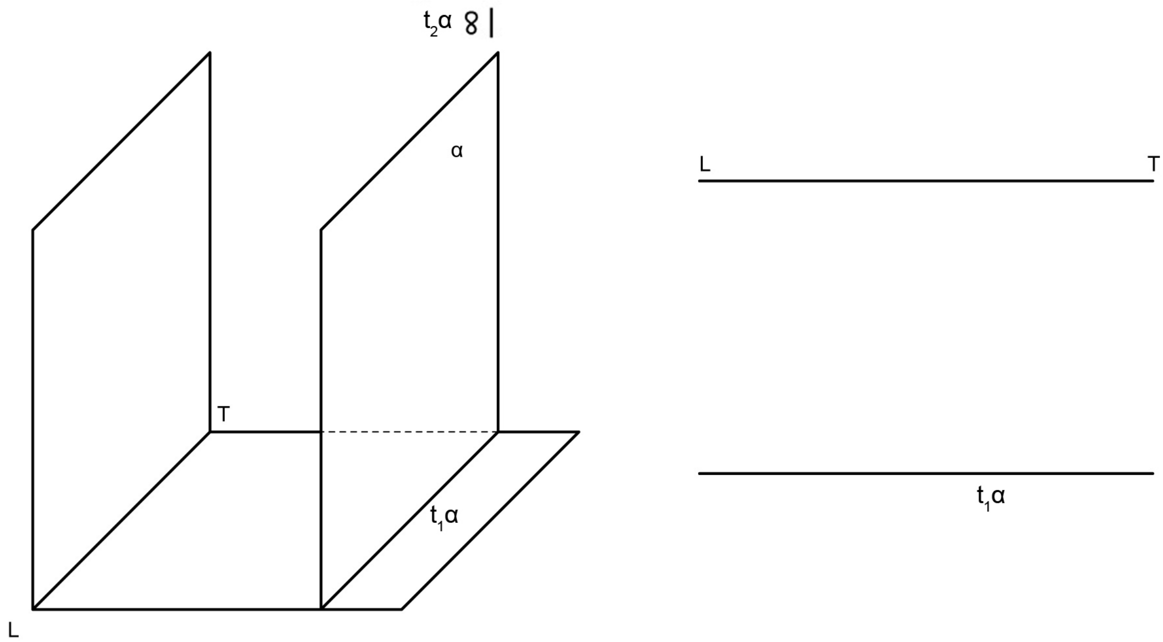


Fig. 27

2.5.3. Piano parallelo al piano orizzontale

Sia dato un piano α, parallelo al P.O. (fig. 28). Il caso è analogo al precedente. La traccia $t_2α$ è parallela alla L.T., mentre la traccia $t_1α$ è all'infinito. Sul piano del disegno si rappresenta solo $t_2α$.

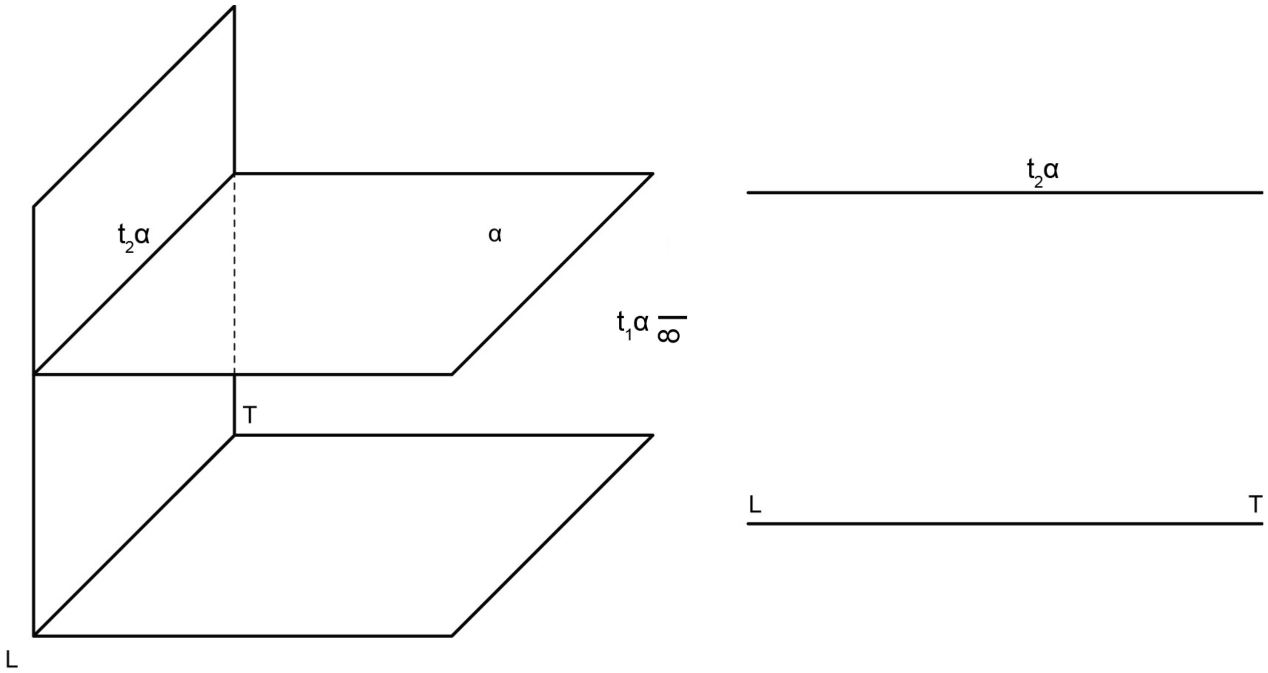


Fig. 28

2.5.4. Piano perpendicolare al piano orizzontale e inclinato rispetto al piano verticale

Sia dato un piano α, perpendicolare al piano orizzontale e inclinato al piano verticale (fig. 29). La traccia $t_1α$ è inclinata rispetto alla L.T., la traccia $t_2α$ è perpendicolare alla L.T.

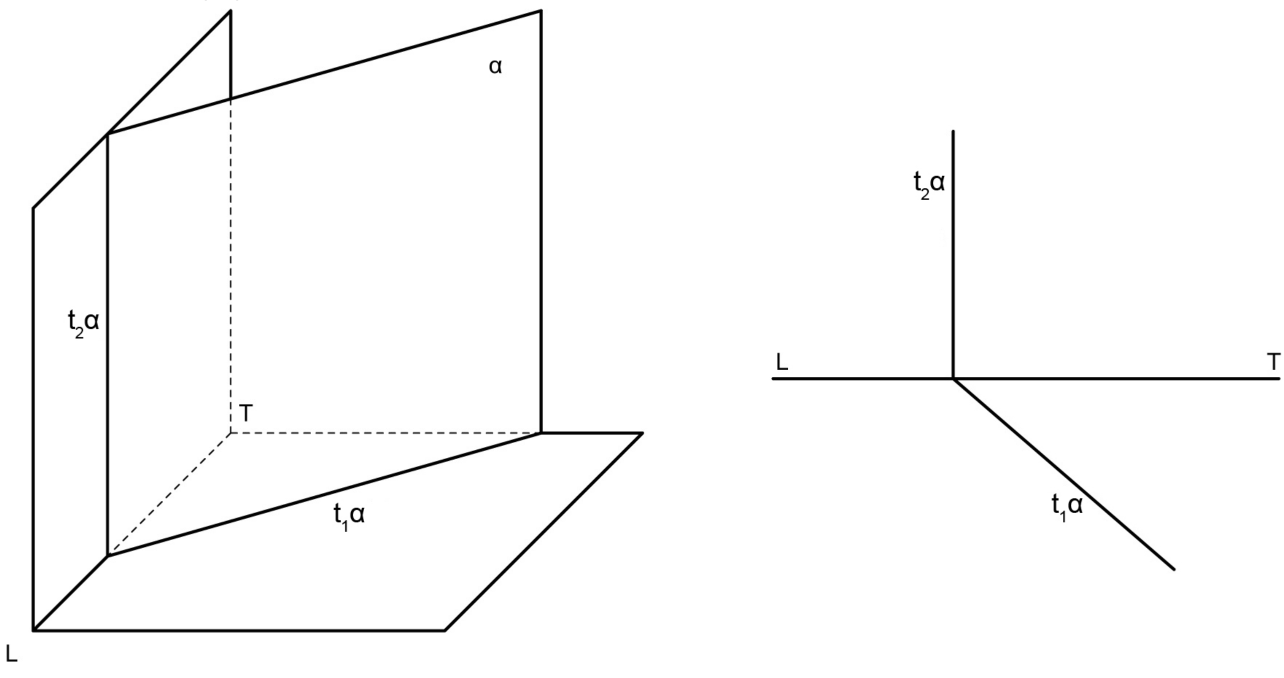
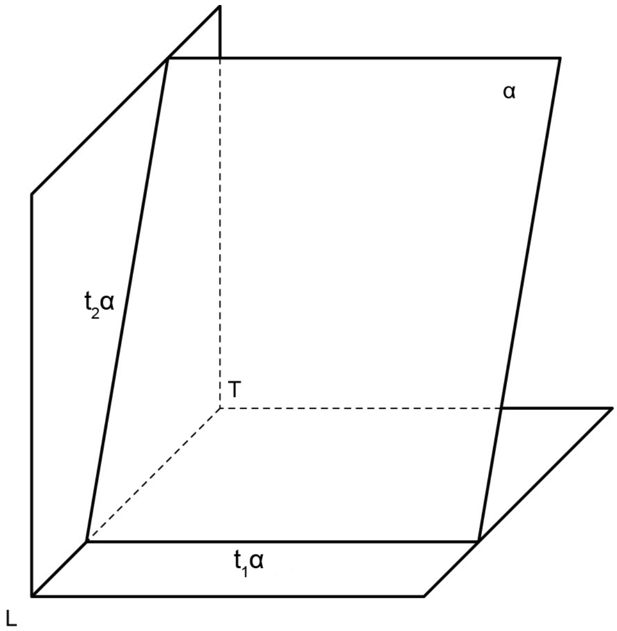


Fig. 29

2.5.5. Piano perpendicolare al piano verticale e inclinato rispetto al piano orizzontale

Sia dato un piano α, perpendicolare al piano verticale e inclinato al piano orizzontale (fig. 30). Il caso è analogo al precedente. La traccia $t_1α$ è perpendicolare rispetto alla L.T., la traccia $t_2α$ è inclinata rispetto alla L.T.



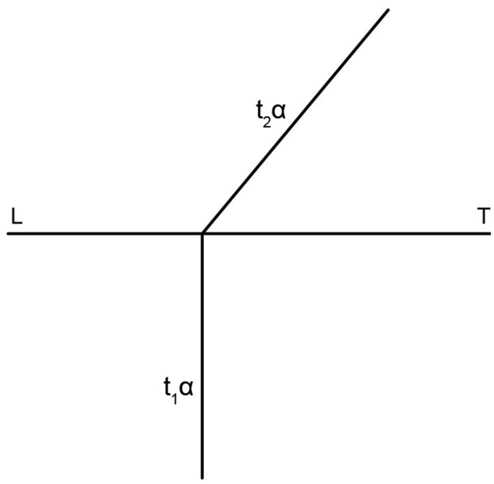
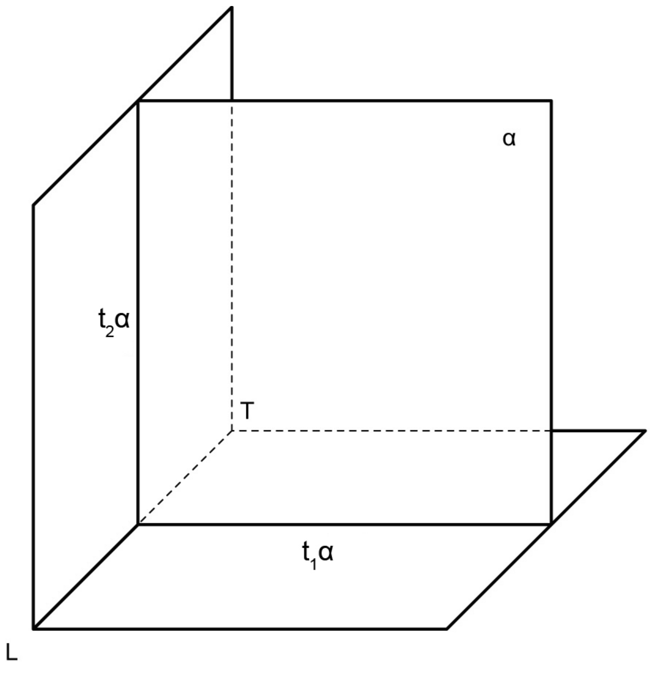


Fig. 30

2.5.6. Piano perpendicolare ai due piani di proiezione (piano di profilo)

Sia dato un piano α, perpendicolare a entrambi i piani di proiezione (fig. 31). Le tracce $t_1α$ e $t_2α$ sono entrambe perpendicolari alla L.T.



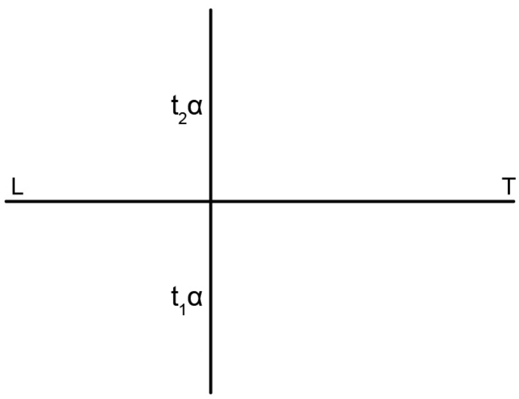


Fig. 31

2.5.7. Piano parallelo alla linea di terra e appoggiato ai due piani di proiezione

Sia dato un piano α, parallelo alla L.T. e appoggiato ai due piani di proiezione (fig. 32). Le tracce $t_1\alpha$ e $t_2\alpha$ sono entrambe parallele alla L.T.

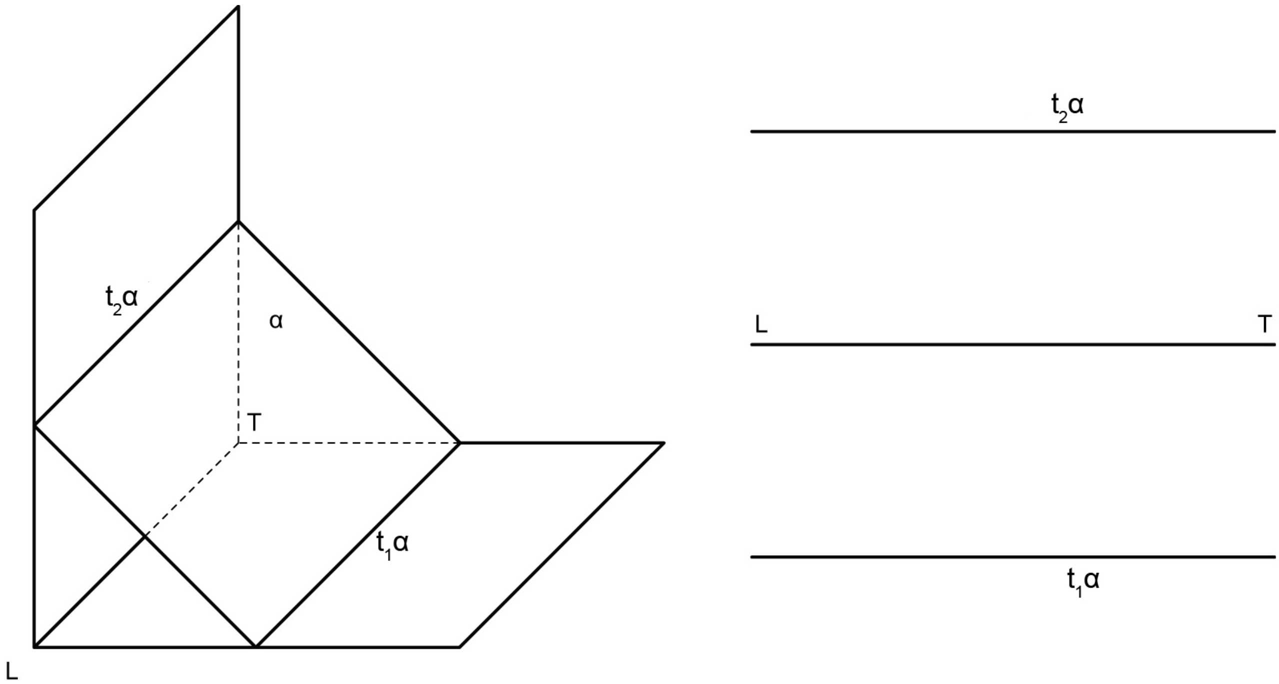


Fig. 32

2.5.8. Piano passante dalla linea di terra

Sia dato un piano α, passante dalla L.T. (fig. 33). Le tracce $t_1\alpha$ e $t_2\alpha$ coincidono con la L.T.

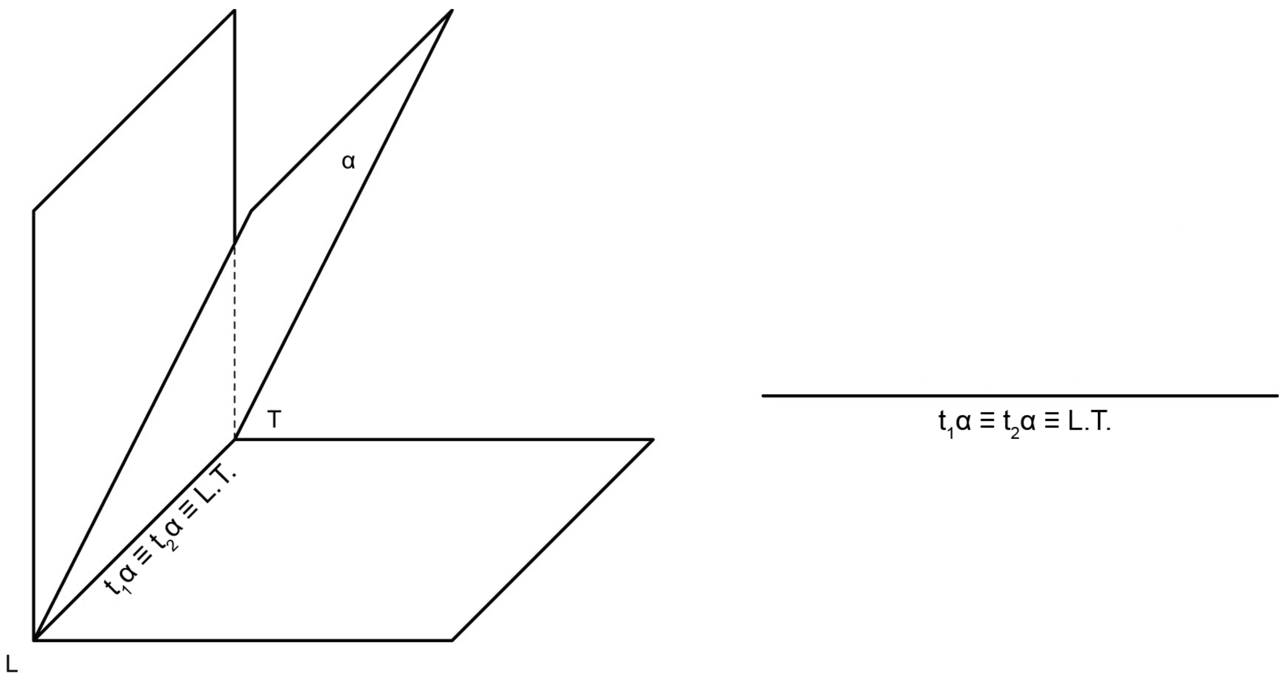


Fig. 33

Tuttavia, dal momento che dalla linea di terra passano infiniti piani, per poter individuare l'esatta posizione di α occorre fissare un punto ausiliario P, appartenente al piano α, e far passare dal punto P un terzo piano di proiezione γ (piano laterale). Poi faremo ruotare rigidamente il piano γ considerando come cerniera $t_2γ$, finché non coinciderà con il piano verticale. Grazie a questa rotazione, che si definisce più propriamente "ribaltamento", è possibile effettuare la proiezione ortogonale del punto P sui tre piani di proiezione (P.O., P.V., P.L.) determinando la traccia $t_3α$, la quota e l'aggetto del punto P e, quindi, la posizione nello spazio del piano α (fig. 34). Gli enti geometrici che avranno subito ribaltamento si indicheranno sul P.L. fra parentesi.

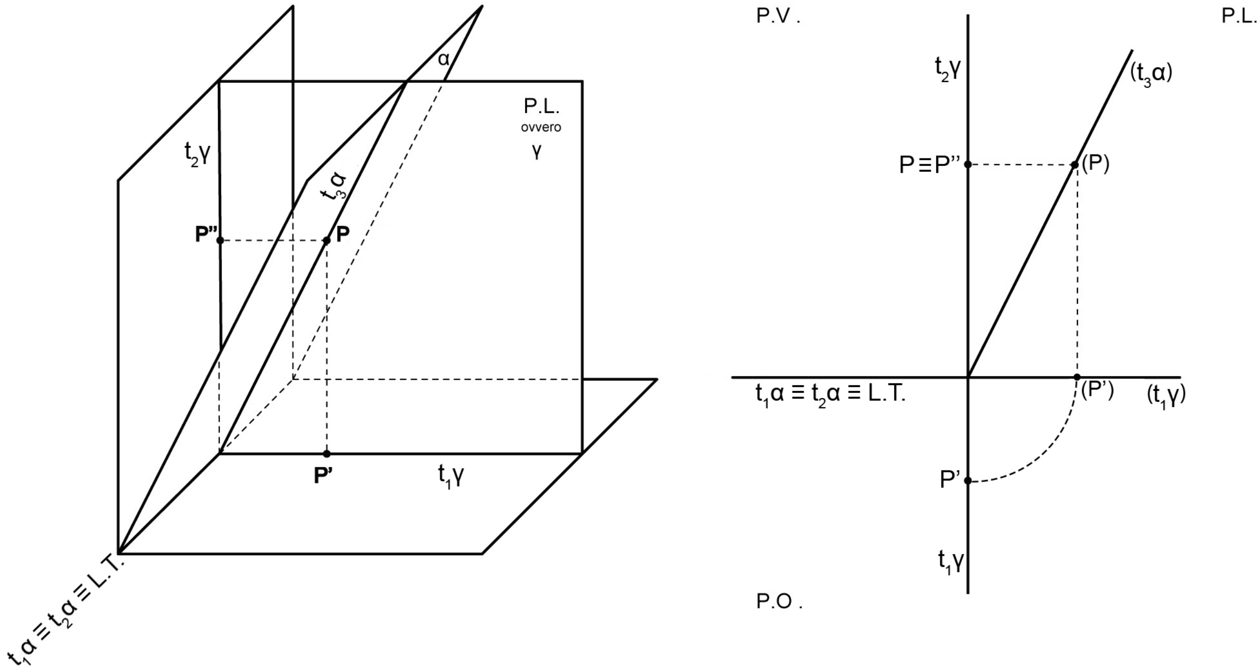


Fig. 34

2.5.9. Piani paralleli fra loro

Nel metodo della doppia proiezione ortogonale, due piani sono paralleli quando le tracce omonime sono parallele (fig. 35).

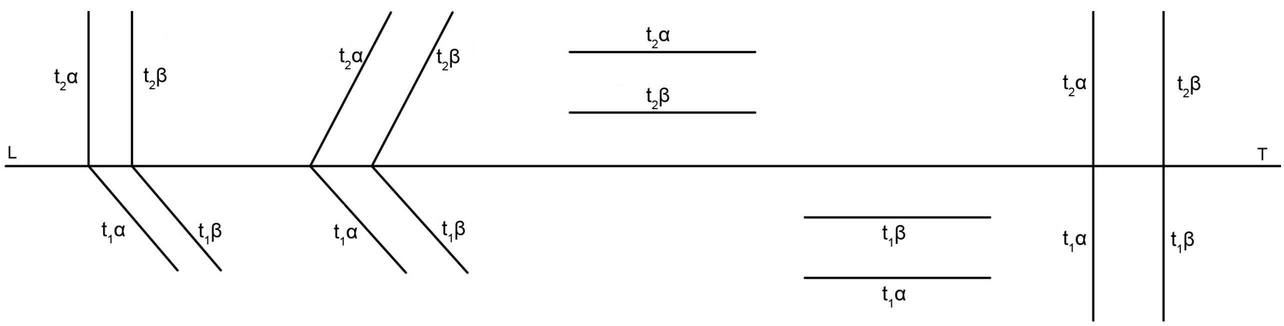


Fig. 35

2.6. Appartenenza di punti a rette, di punti e rette a piani

2.6.1. Punto appartenente a una retta

Condizione necessaria e sufficiente perché un punto appartenga a una retta è che *le proiezioni del punto appartengano alle proiezioni omonime della retta* (fig. 36). Nell'esempio, il punto P appartiene alla retta generica r.

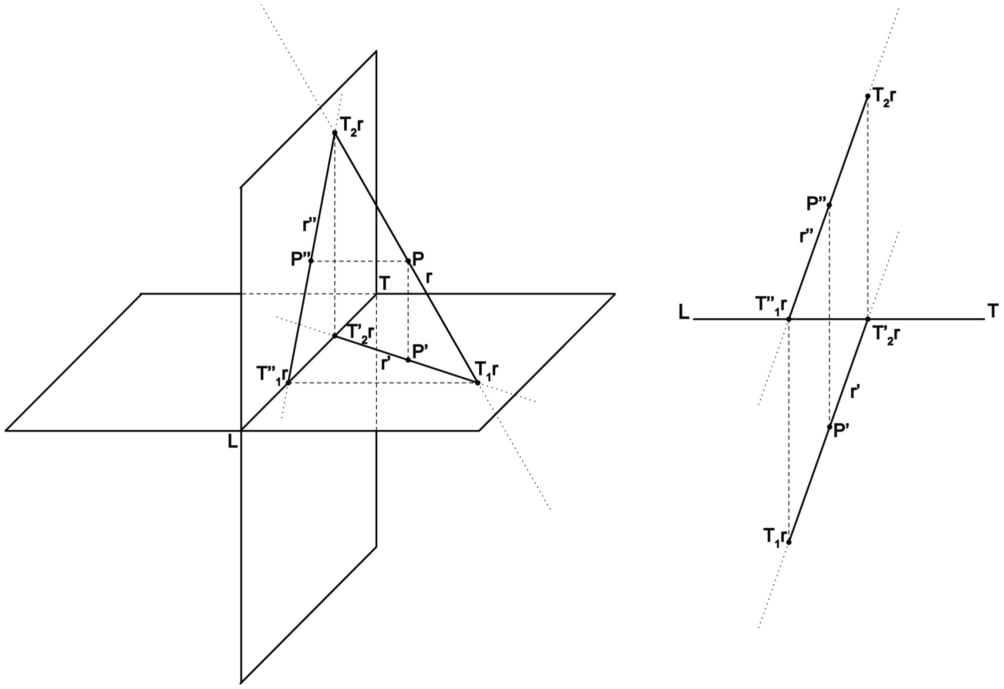


Fig. 36

2.6.2. Retta appartenente a un piano

Condizione necessaria e sufficiente affinché una retta appartenga a un piano è *che le sue tracce giacciano sulle tracce omonime del piano*. Nella costruzione grafica, di norma, prima si individuano le tracce del piano e poi quelle della retta, avendo cura che le condizioni di appartenenza siano verificate.

2.6.3. Retta generica appartenente a un piano generico (fig. 37)

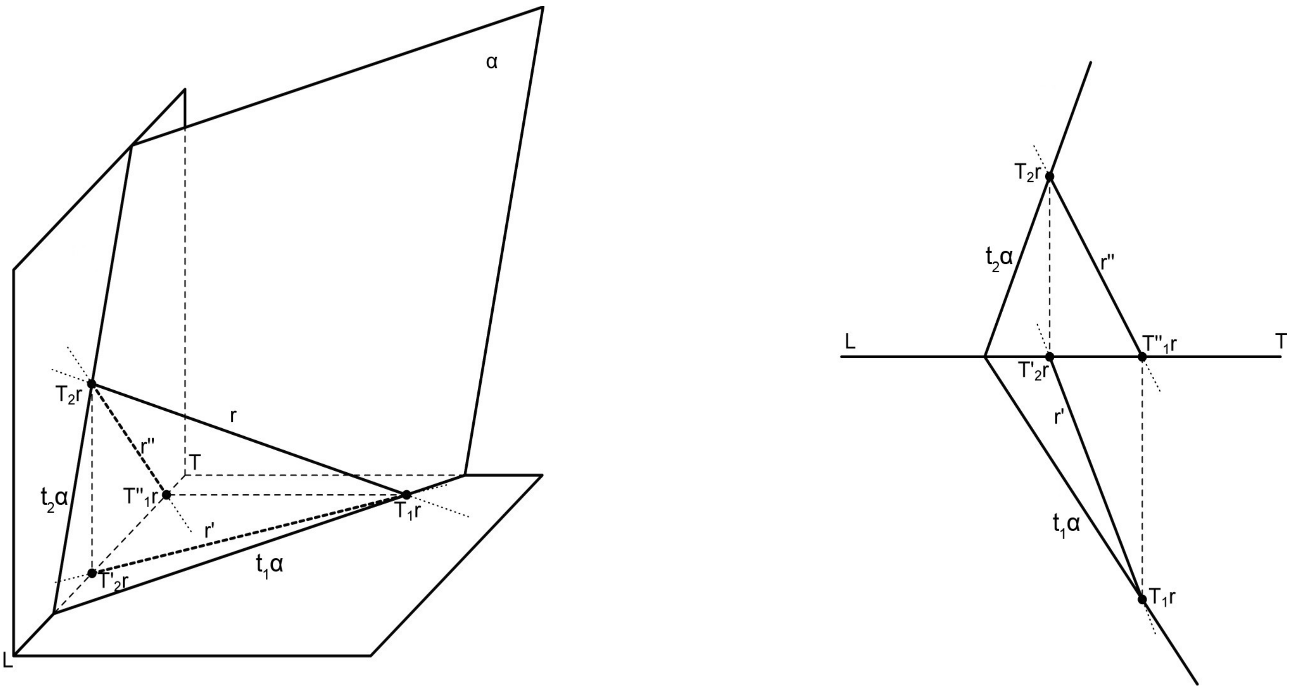


Fig. 37

2.6.4. Retta parallela al P.V. e inclinata al P.O., appartenente a un piano generico

Dopo avere disegnato le tracce del piano, si individuano T_1r e T''_1r. T_2r è all'infinito, in direzione parallela a $t_1\alpha$. La prima proiezione della retta (r') è parallela alla L.T. La proiezione r'' sarà parallela a $t_2\alpha$ (fig. 38).

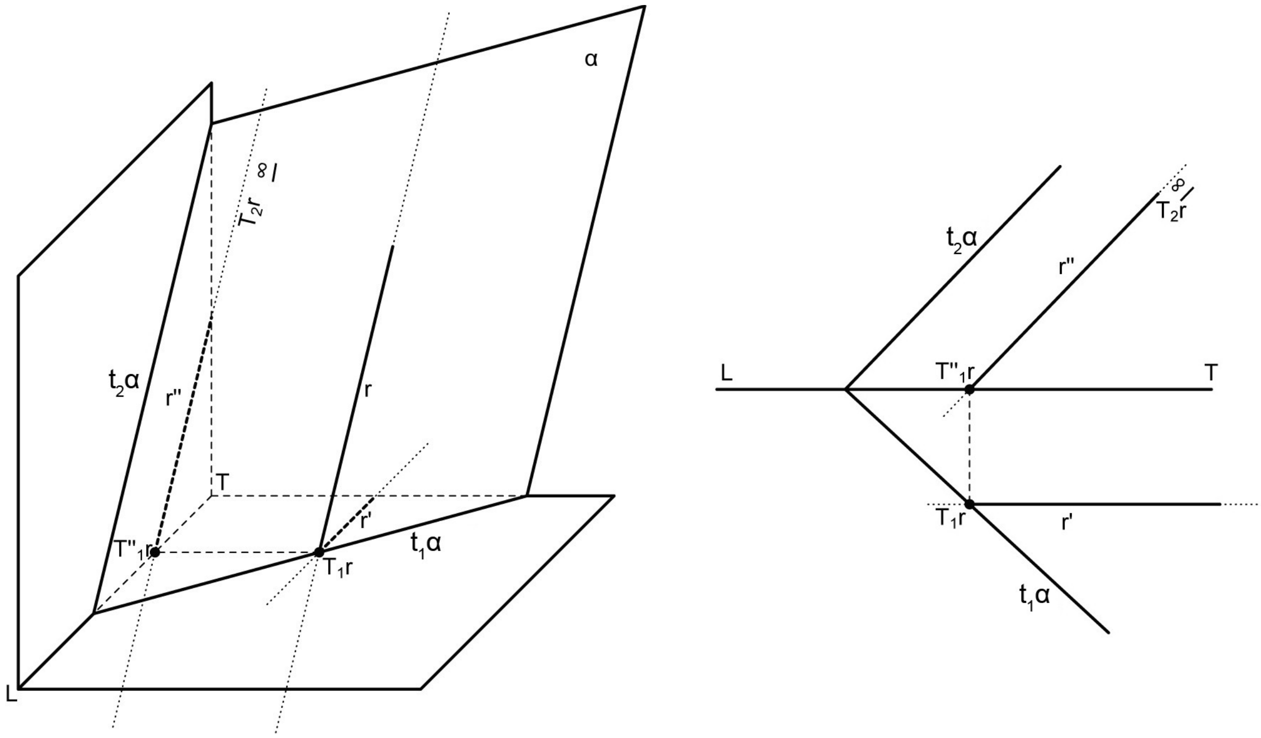


Fig. 38

2.6.5. Retta parallela al P.O. e inclinata al P.V., appartenente a un piano generico

Il caso (fig. 39) è analogo al precedente.

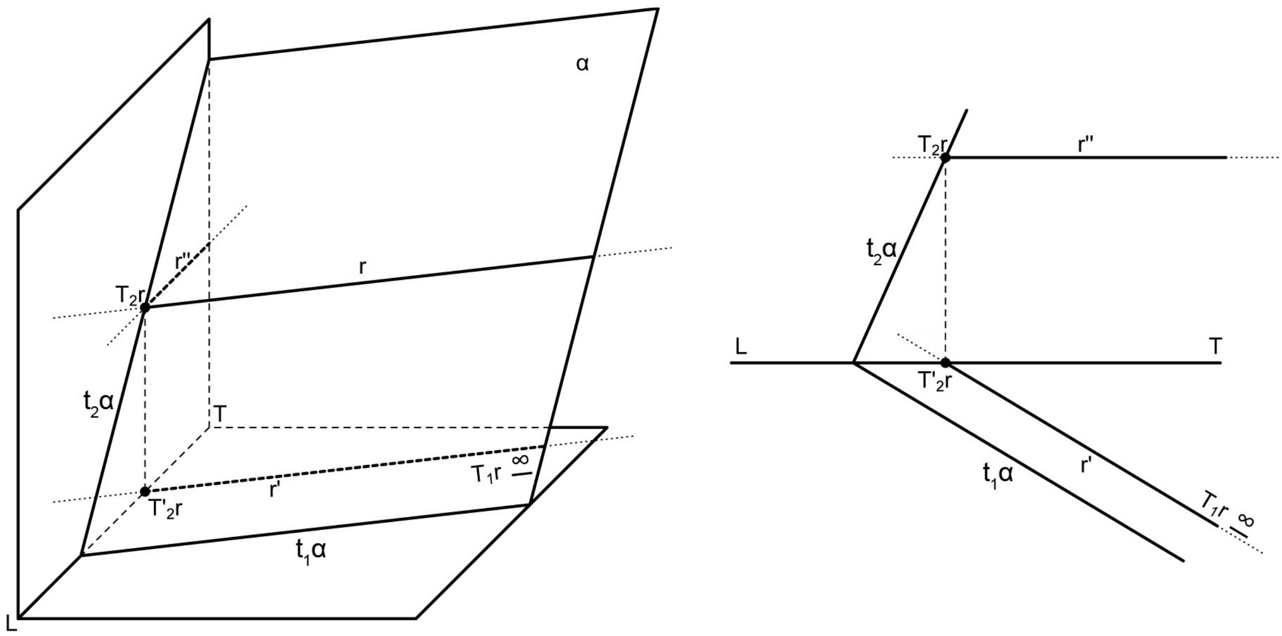


Fig. 39

2.6.6. Retta perpendicolare al P.O., appartenente a un piano perpendicolare al P.O. e inclinato al P.V.

La proiezione r' coincide con T_1r. T_2r è all'infinito. La proiezione r'' è parallela a $t_2α$ e perpendicolare alla L.T. (fig. 40).

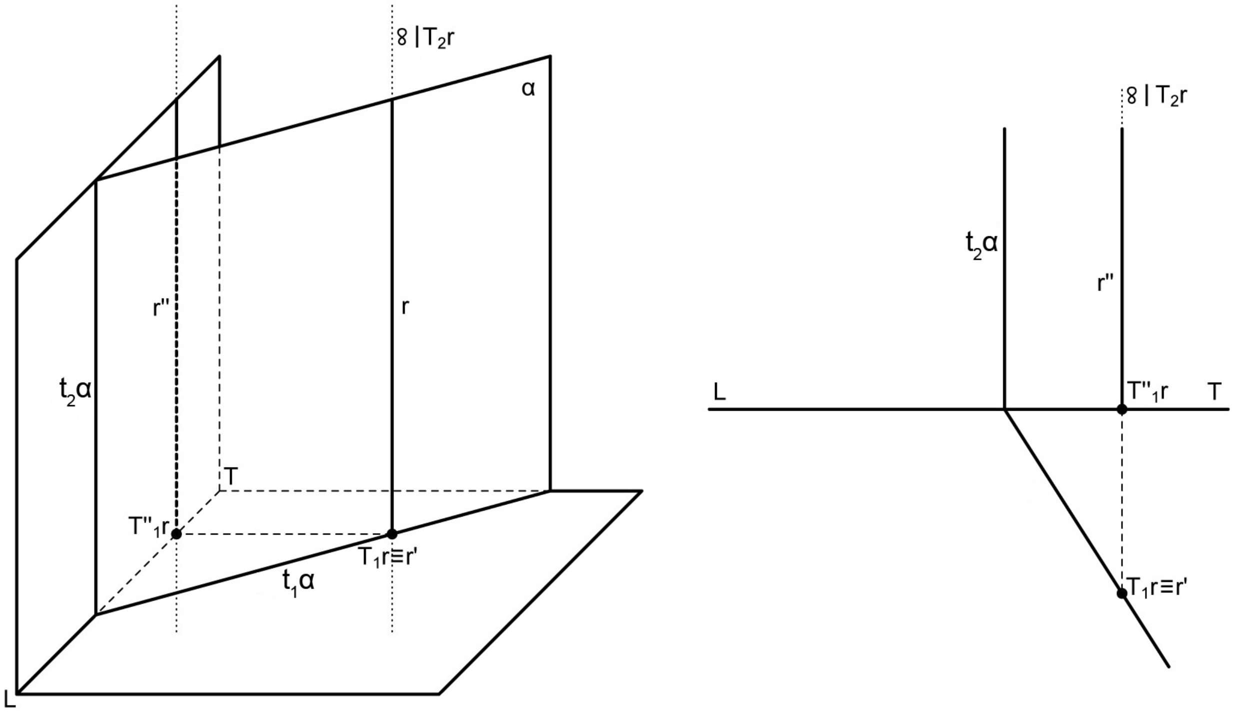


Fig. 40

2.6.7. Retta perpendicolare al P.V., appartenente a un piano perpendicolare al P.V. e inclinato rispetto al P.O.

Il caso è analogo al precedente; si omette la costruzione del disegno.

2.6.8. Retta generica, appartenente a un piano perpendicolare al P.O. e inclinato rispetto al P.V.

Si noti che la proiezione r' coincide con $t_1α$ (fig. 41).

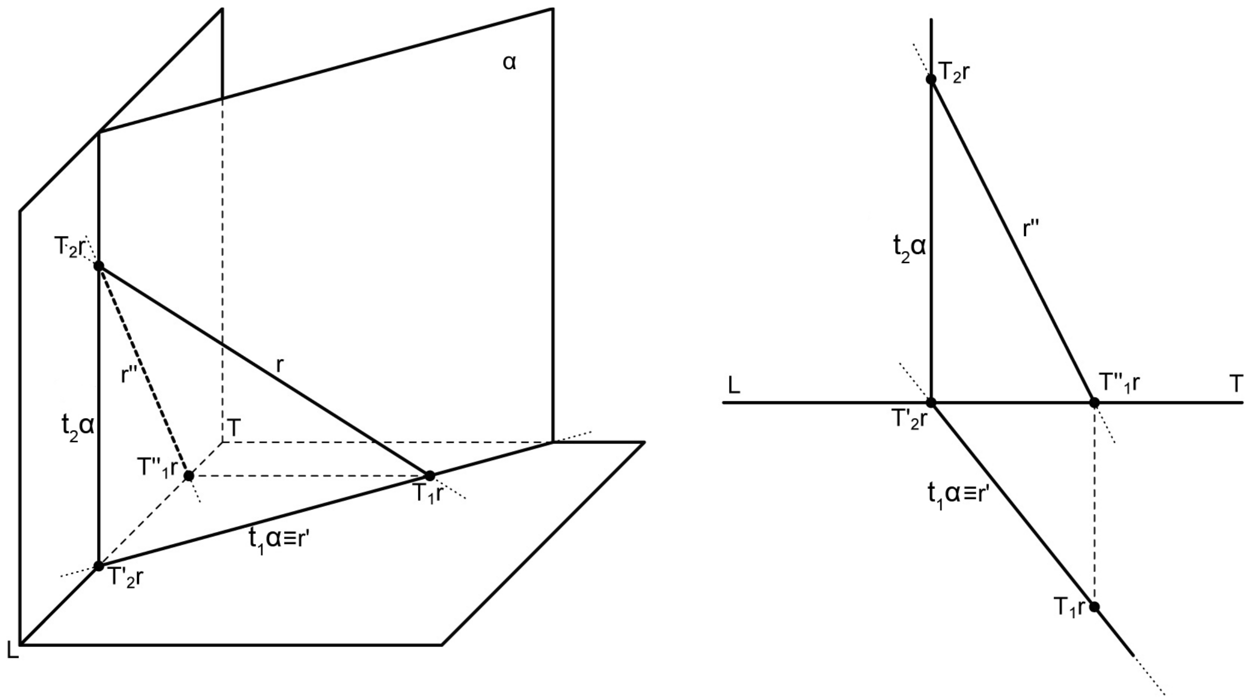


Fig. 41

2.6.9. Retta generica, appartenente a un piano perpendicolare al P.V. e inclinato al P.O.

Il caso è analogo al precedente; si omette la costruzione del disegno.

2.6.10. Punto appartenente a un piano

Un punto appartiene a un piano se appartiene a una retta del piano. Di conseguenza, un punto appartiene a un piano quando *le proiezioni del punto appartengono alle proiezioni omonime di una retta appartenente al piano*. La fig. 42 mostra un punto P appartenente a piani diversi (in alto: piano generico, piano proiettante rispetto al P.O.; in basso: piano proiettante rispetto al P.V., piano parallelo alla L.T.). In tutti i casi, esso appartiene ad una retta che a sua volta appartiene al piano. Il procedimento di costruzione del disegno prevede innanzitutto l'individuazione delle tracce del piano; poi il disegno delle tracce e quello delle proiezioni della retta; infine, l'individuazione delle proiezioni del punto.

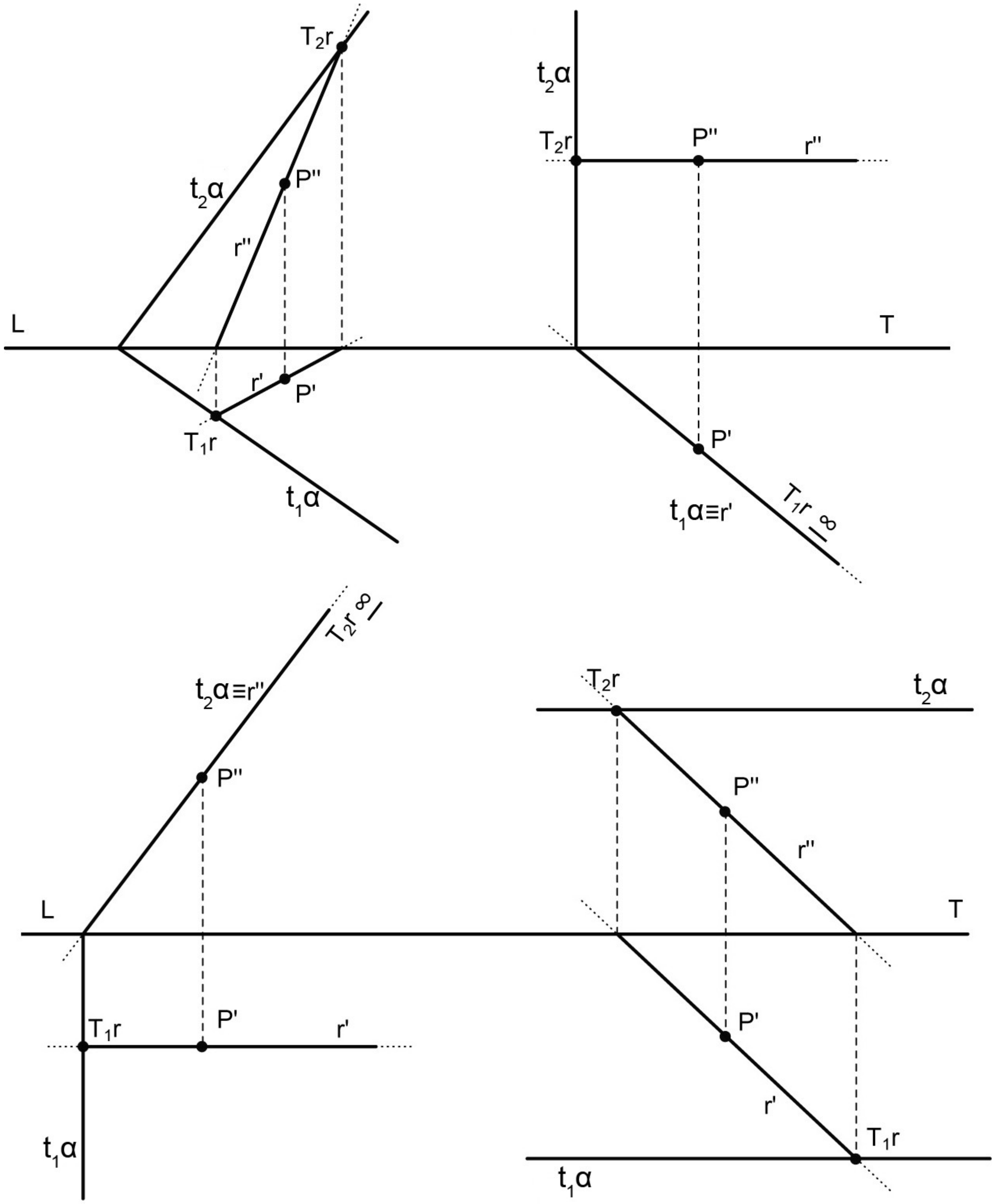


Fig. 42

2.6.11. Esercizio. Dati una retta generica r e un punto P non appartenente ad essa, determinare il piano da essi individuato

Dopo aver disegnato il punto P (mediante le sue proiezioni) e la retta r (mediante le sue tracce e le sue proiezioni – fig. 43), si disegni una retta s, passante per P e parallela ad r (fig. 44). A questo punto sarà possibile disegnare le tracce del piano α: $t_1α$ si otterrà congiungendo T_1r e T_1s, $t_2α$ si otterrà congiungendo T_2r e T_2s. Il punto P appartiene al piano α perché appartiene alla retta s, a sua volta appartenente ad α. La retta r appartiene al piano α perché le sue tracce appartengono alle tracce omonime di α.

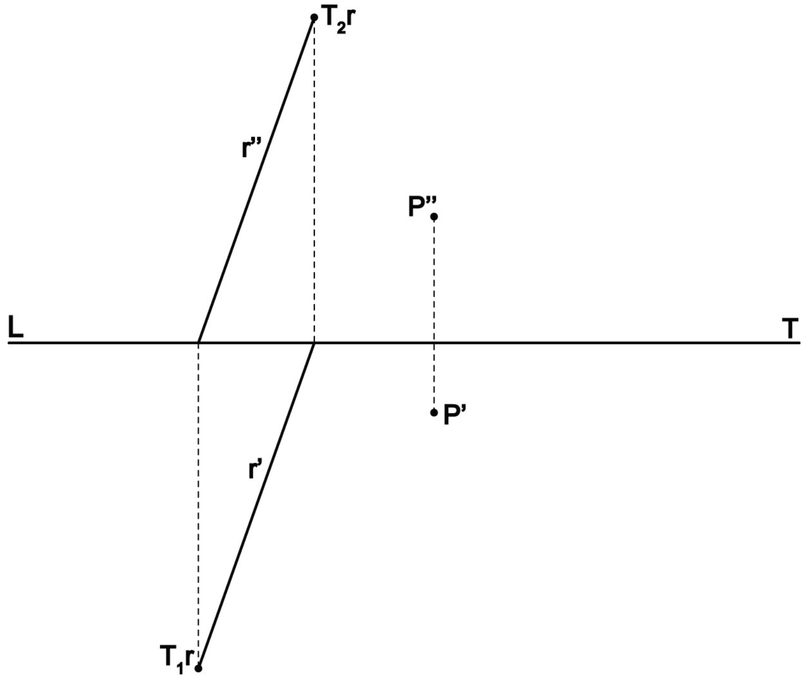


Fig. 43

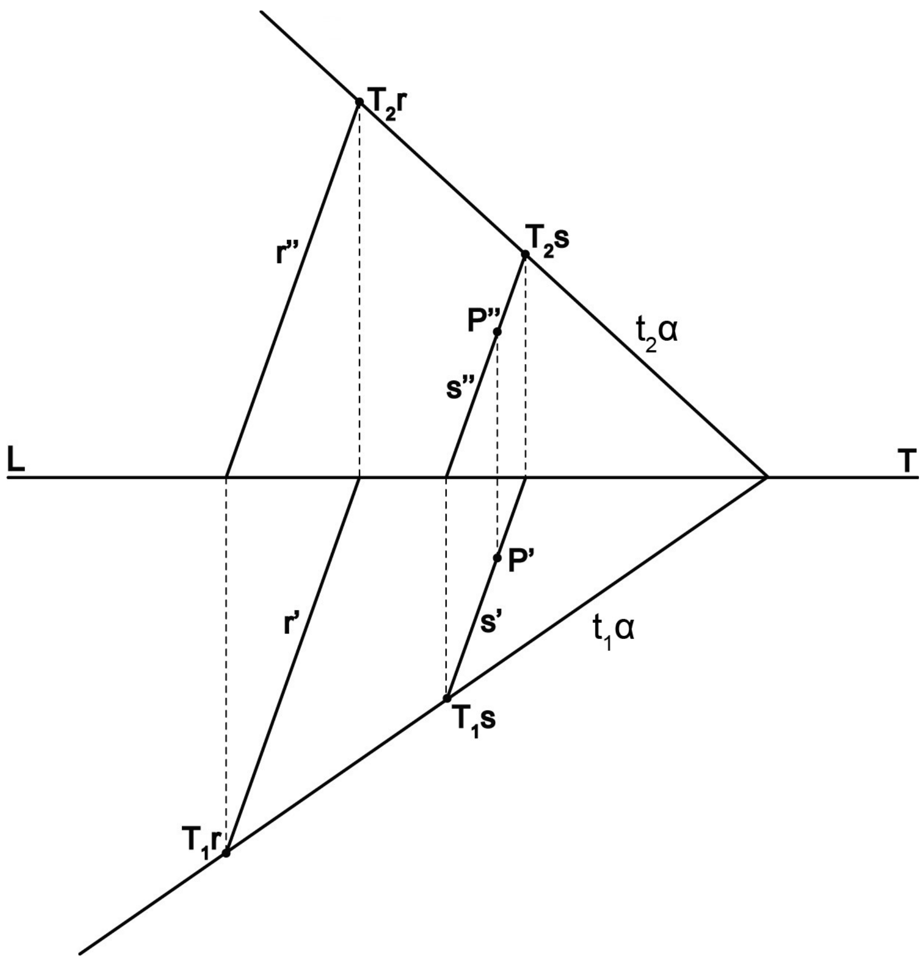


Fig. 44

2.6.12. Esercizio. Dati tre punti non allineati, determinare il piano da essi individuato

Dopo avere disegnato i tre punti P, Q e R (fig. 45), bisogna tracciare una retta che unisca due di essi; per esempio, la retta r, che unisce P e Q (fig. 46).

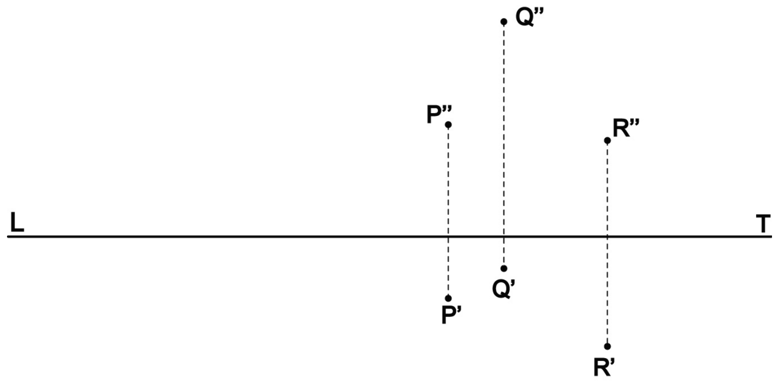


Fig. 45

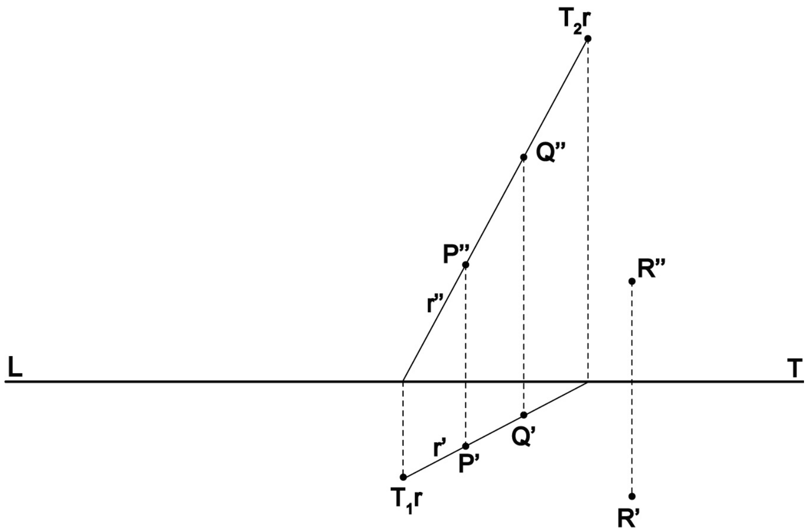


Fig. 46

Successivamente occorre disegnare un'altra retta che unisca altri due punti (per esempio, la retta s, che unisce Q con R). A questo punto sarà possibile tracciare il piano α, sulle le cui tracce, per le condizioni di appartenenza, dovranno giacere le tracce omonime delle rette r ed s (fig. 47).

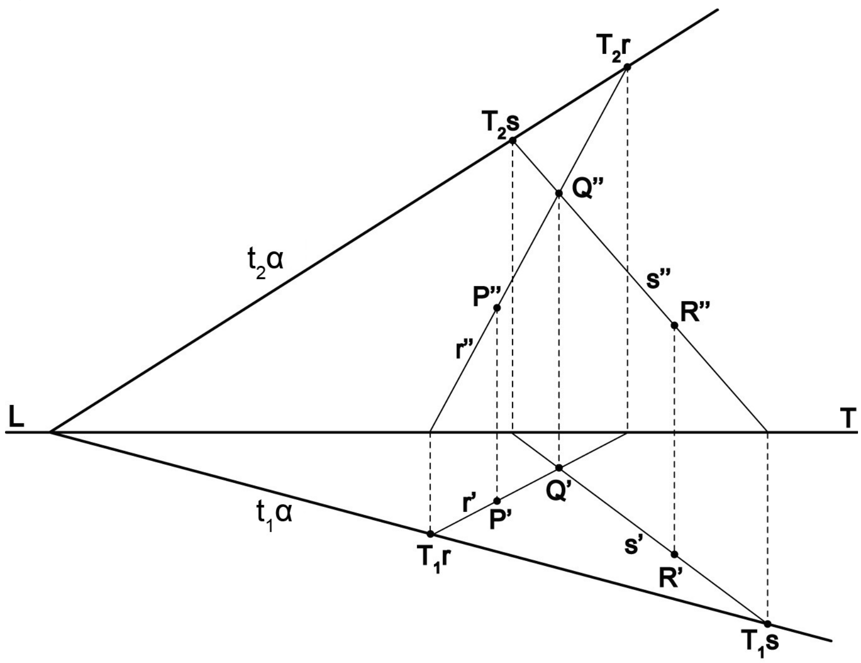


Fig. 47

2.6.13. Retta di intersezione tra due piani

Quando due piani si intersecano, hanno una retta in comune. Le tracce della retta sono il punto di intersezione delle tracce omonime dei due piani. Dalle tracce della retta si ricavano le sue proiezioni (fig. 48).

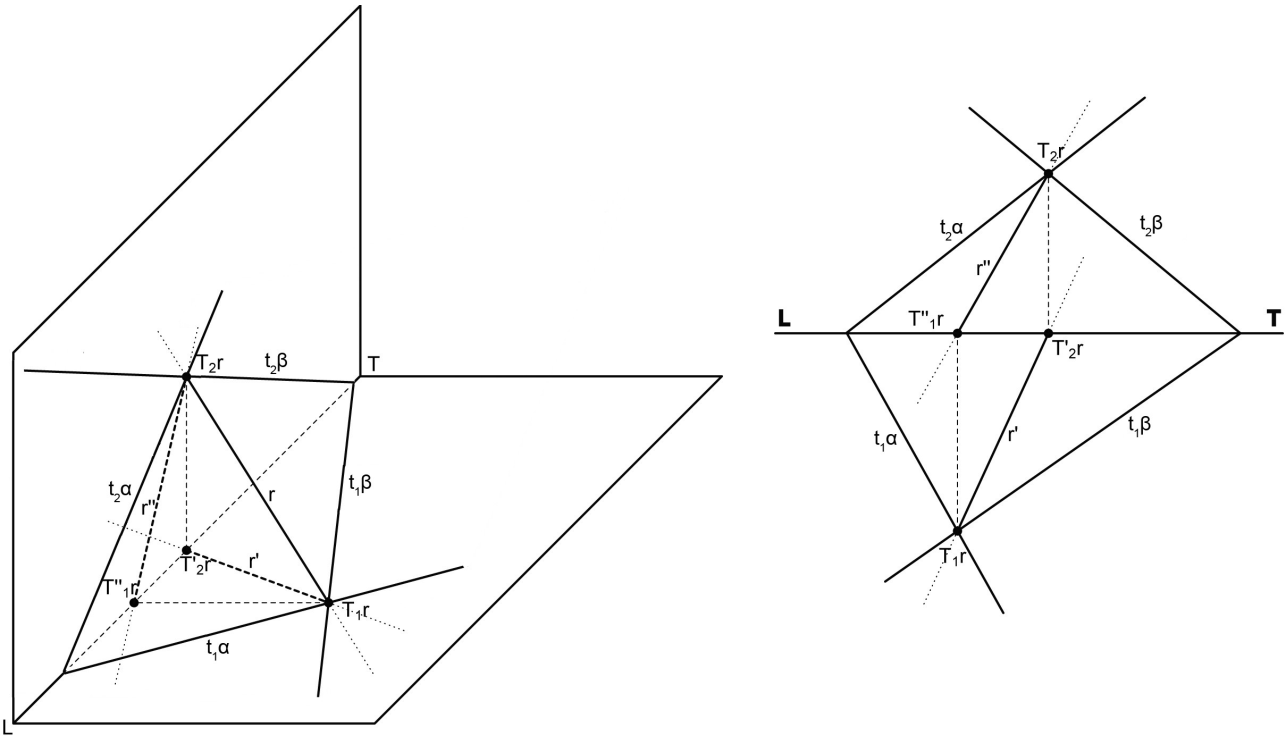


Fig. 48

2.6.14. Intersezione di due piani proiettanti rispetto al P.O. (fig. 49)

Il procedimento di costruzione del disegno, di norma, è il seguente: si disegnano le tracce dei piani; si individuano le tracce e le proiezioni della retta, come spiegato nei paragrafi precedenti.

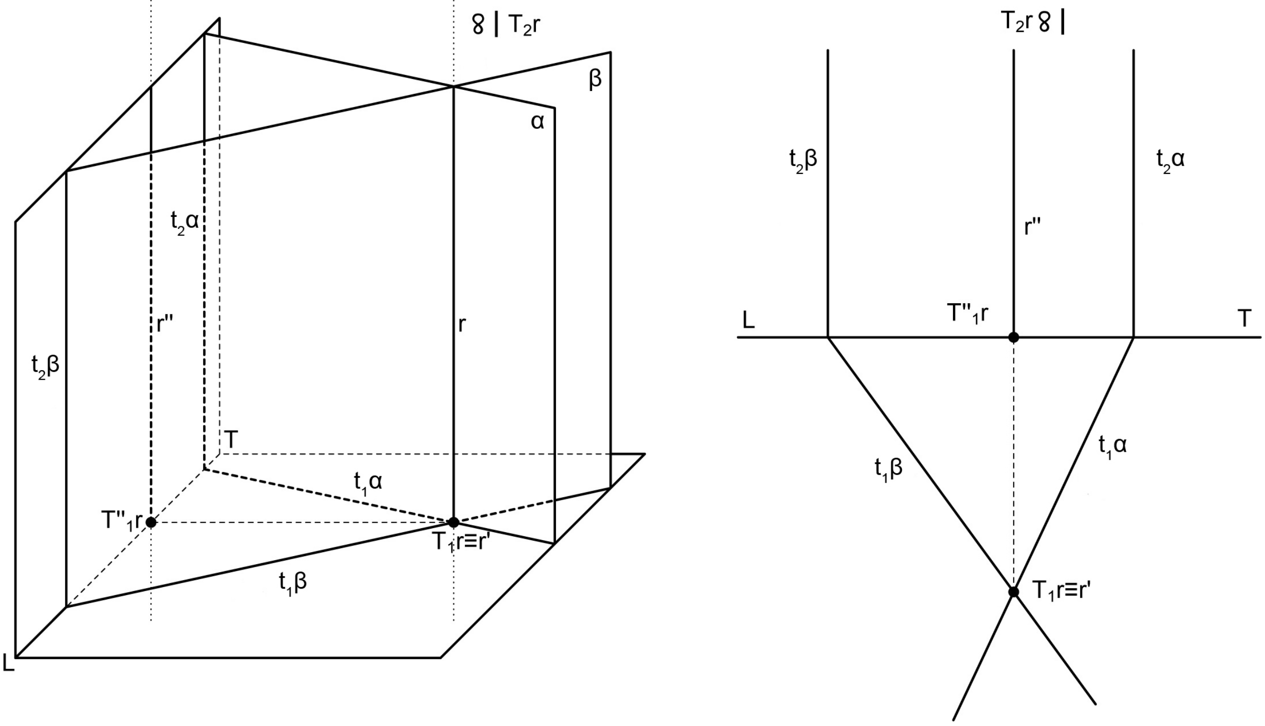


Fig. 49

2.6.15. Intersezione di due piani proiettanti rispetto al P.V. (fig. 50)

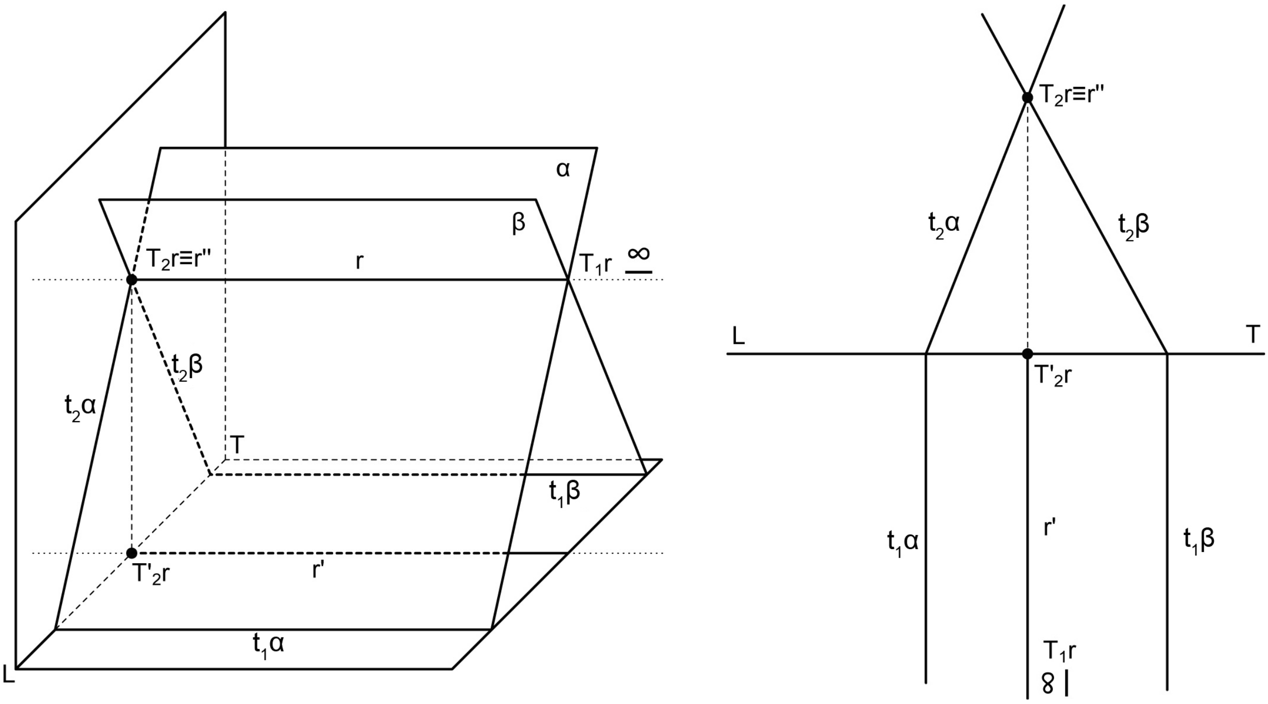


Fig. 50

2.6.16. Intersezione fra un piano α proiettante rispetto al P.O. e un piano β generico

Si noti che la proiezione r' della retta coincide con $t_1α$ (fig. 51).

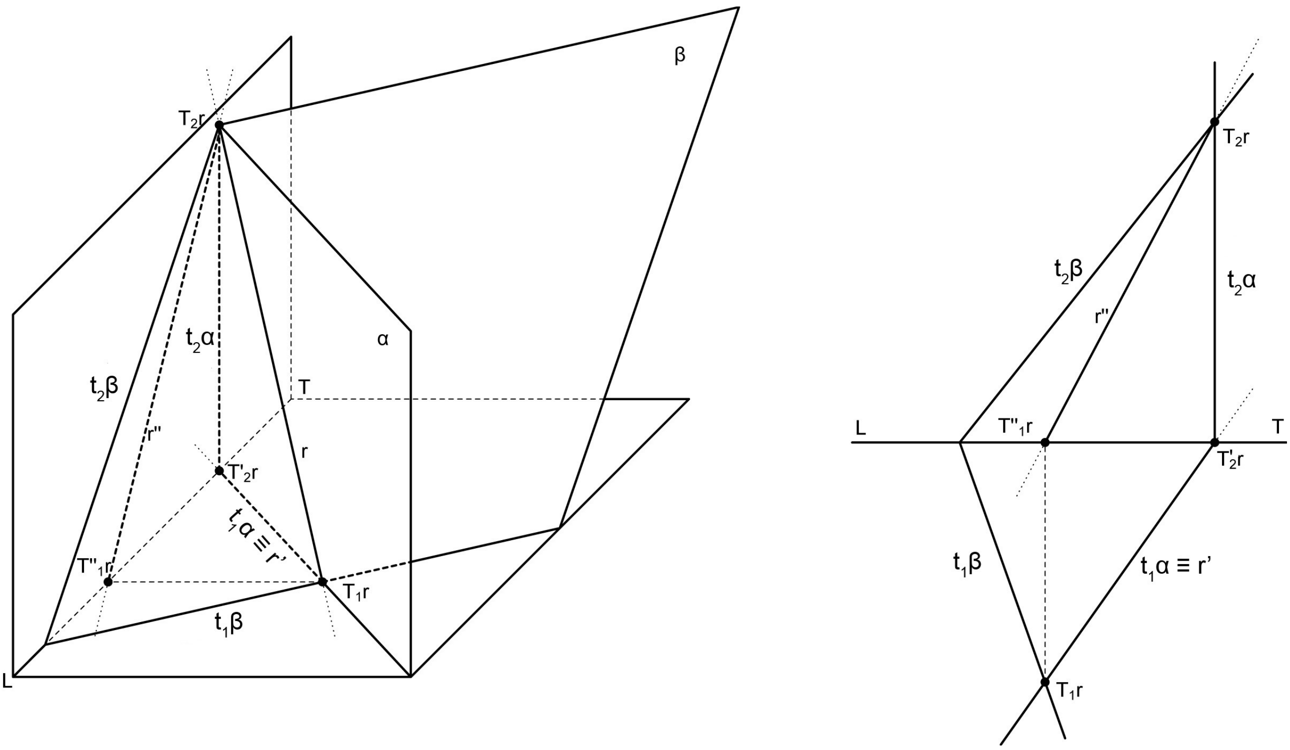


Fig. 51

2.6.17. Intersezione fra un piano α proiettante rispetto al P.V. e un piano β generico

Il caso è analogo al precedente; si omette la costruzione del disegno.

2.6.18. Intersezione fra un piano α generico e un piano β parallelo al P.O.

La proiezione r’ della retta è parallela a $t_1α$; la proiezione r’’ della retta coincide con $t_2β$ (fig. 52).

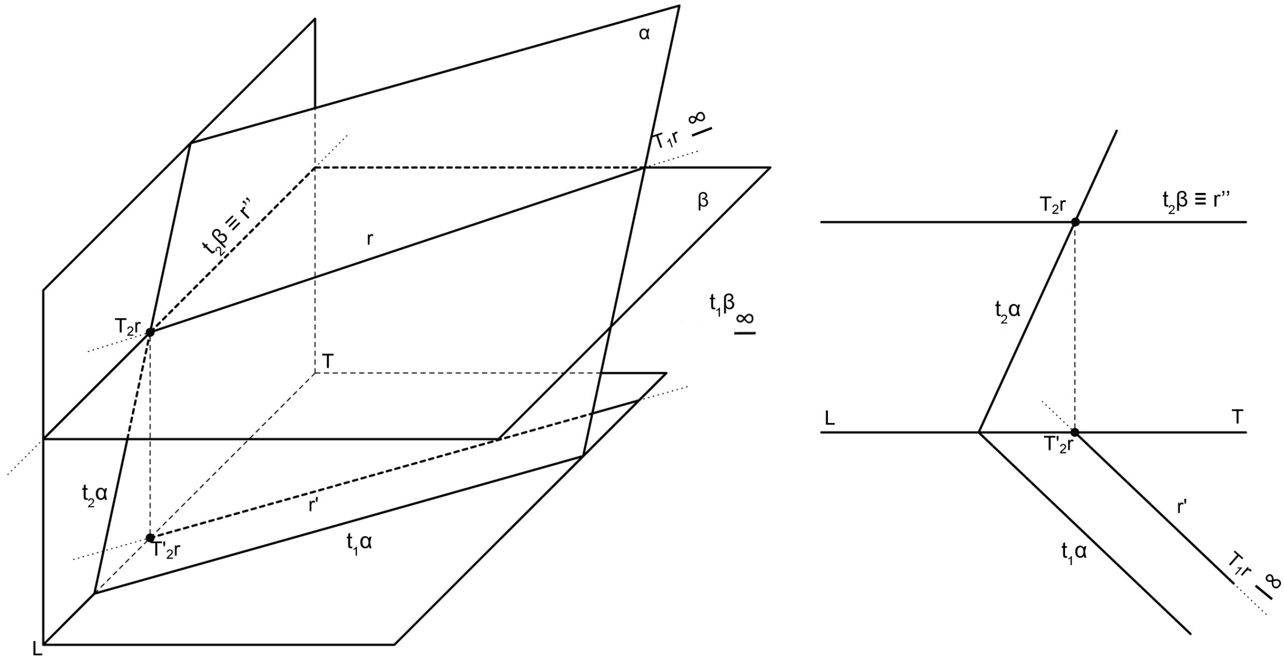


Fig. 52

2.6.19. Intersezione fra un piano α generico e un piano β parallelo al P.V.

Il caso è analogo al precedente; si omette la costruzione del disegno.

2.6.20. Intersezione fra due piani paralleli alla L.T.

In questo caso, le proiezioni della retta saranno parallele alla L.T. e le tracce T_1r e T_2r saranno all’infinito. Per rappresentare la retta, è necessario avvalersi di un piano ausiliario di profilo γ (fig. 53), che verrà ribaltato per farlo coincidere col P.V. Si tratterà quindi di una doppia proiezione ortogonale con l'aggiunta di un piano laterale. Sul piano γ saranno definite le tracce di intersezione dei piani α e β con lo stesso piano γ (vedere il disegno a sinistra). Chiameremo queste tracce $t_3α$ e $t_3β$, e il loro punto in comune sarà naturalmente T_3r, ossia la traccia di r su γ . A questo punto ribaltiamo γ sul P.V., in modo da poter visualizzare sul piano del disegno, oltre che $t_1γ$ e $t_2γ$, anche $t_3α$, $t_3β$ e T_3r. Ottenuto T_3r si ricavano con facilità le proiezioni r’ e r’’. Il ribaltamento di γ sul piano verticale avrà come effetto che $t_1γ$ si porterà nella posizione ($t_1γ$) (si legga: ti uno di gamma ribaltato), coincidente con la linea di terra.

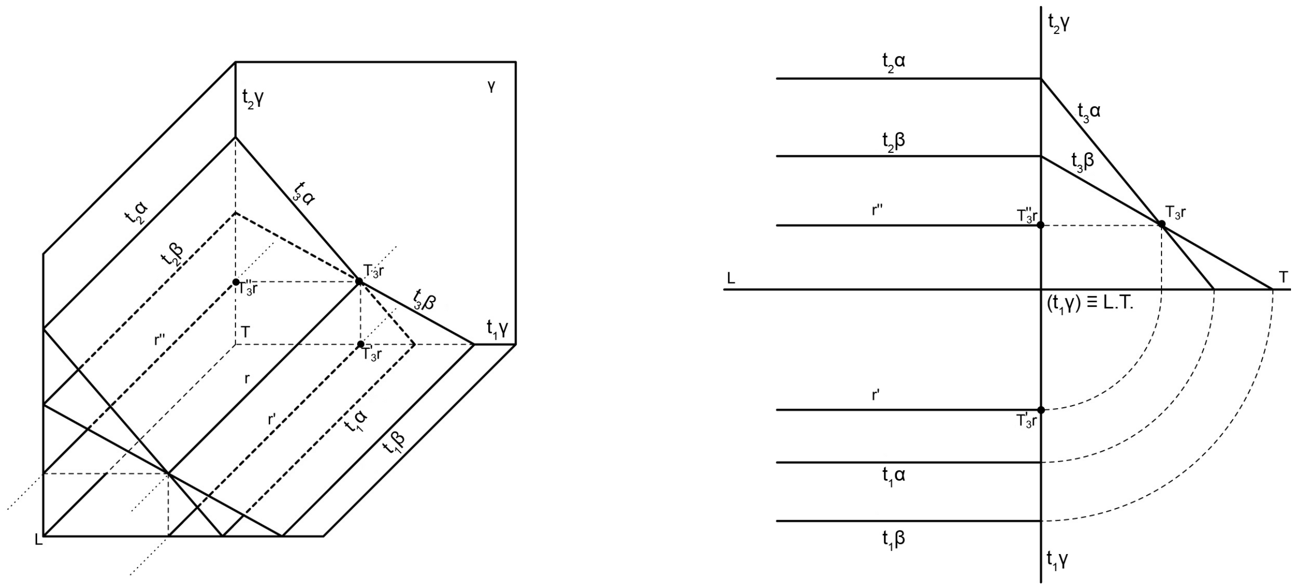


Fig. 53

2.6.21. Condizioni di perpendicolarità (enunciati)

Una *retta è perpendicolare a un piano* quando le sue proiezioni sono perpendicolari alle tracce omonime del piano.

Due *rette incidenti sono perpendicolari fra loro* quando per esse si può condurre un piano perpendicolare all'altra.

Due *piani sono perpendicolari fra loro* se uno di essi contiene la retta perpendicolare all'altro.

2.6.22. Esercizio. Dati un piano α e una retta r non appartenente ad esso, determinare il punto P di intersezione fra retta e piano

La figura 54 dimostra che con i soli dati a disposizione non è possibile individuare il punto P in cui la retta r interseca il piano α.

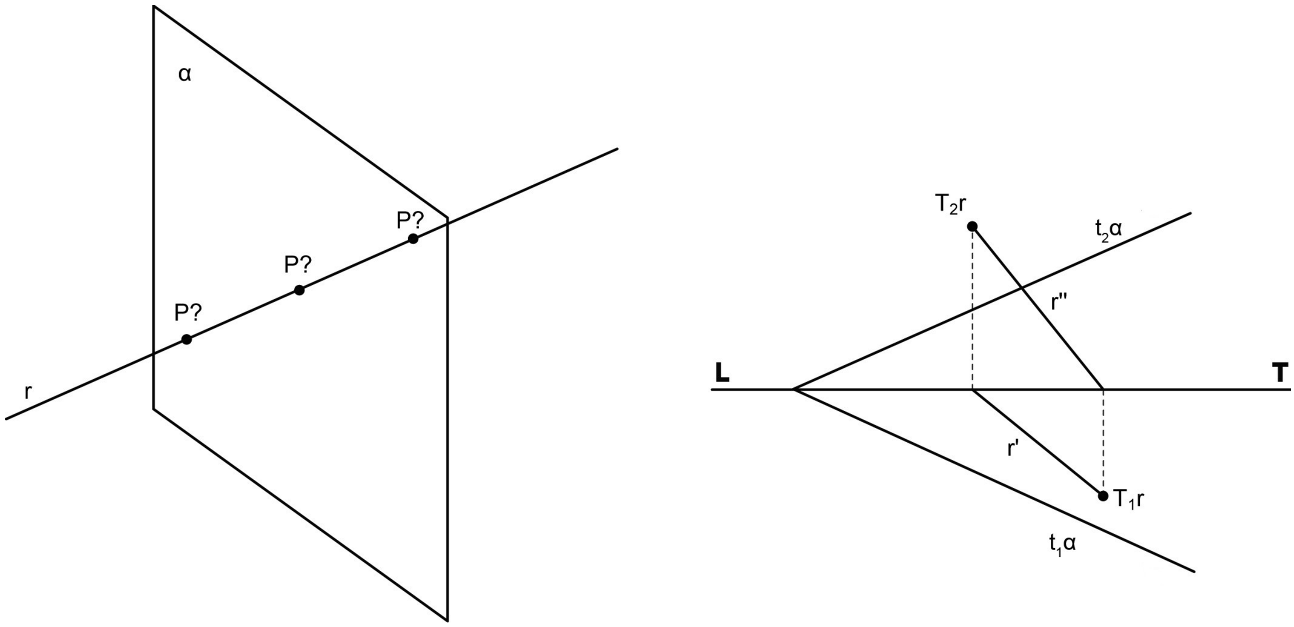


Fig. 54

Il problema si risolve utilizzando un piano ausiliario β, passante per la retta r e intersecante il piano α in una retta s comune ai piani α e β. Il punto P cercato risulterà dall'intersezione di r con s. Infatti il punto P appartiene alla retta r, ma anche al piano α in quanto appartiene a una retta (s) che a sua volta appartiene al piano (fig. 55, a sinistra). Il piano β, per facilità di costruzione, sarà proiettante in prima proiezione (fig. 55, a destra) e la traccia $t_2β$ passerà per la traccia omonima della retta r.

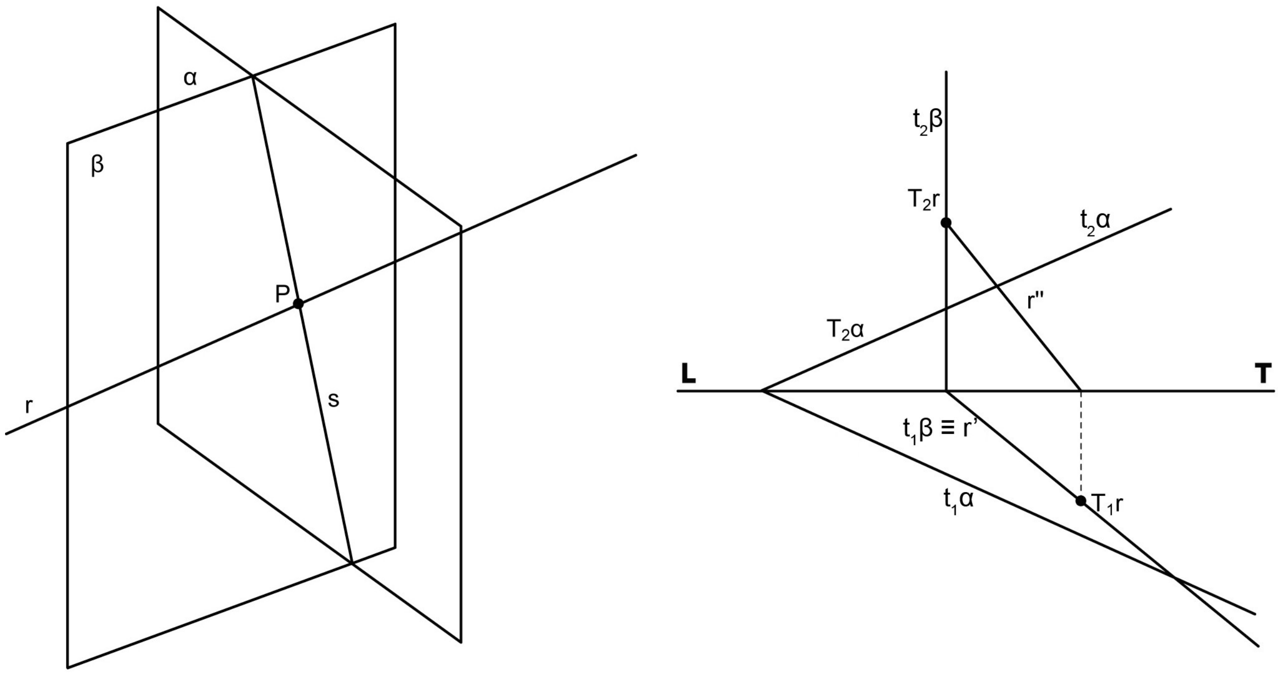


Fig. 55

A questo punto è possibile ottenere le tracce e le proiezioni della retta s, intersezione fra il piano α e il piano β (fig 56). Le rette r ed s, complanari per costruzione, hanno un punto in comune, che si identifica con P, punto in comune delle rispettive proiezioni. Poiché r' ed s' sono coincidenti, occorrerà prima definire P'' e quindi, abbassando da esso la retta di richiamo fino alle prime proiezioni delle due rette, individuare P'.

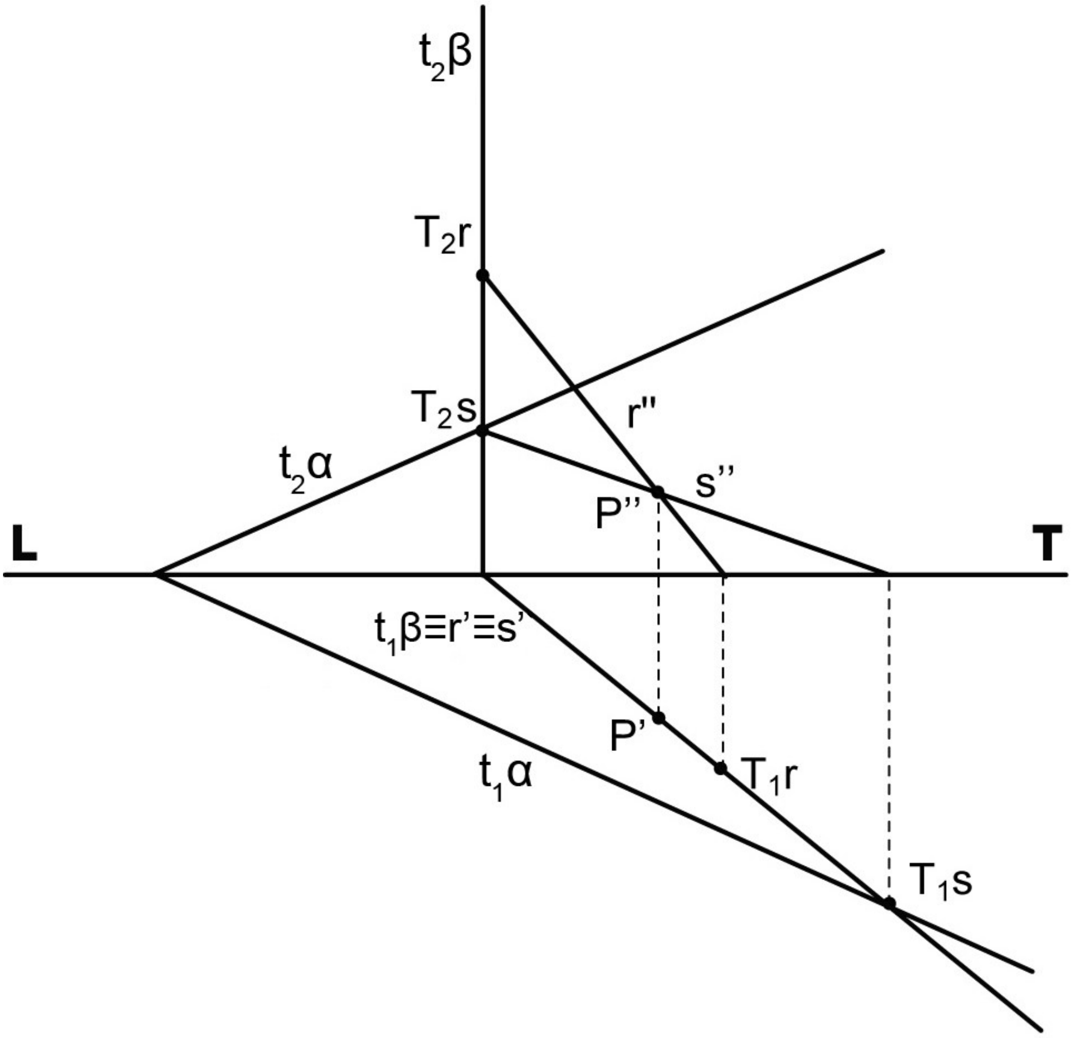


Fig. 56

2.6.23. Esercizi di verifica

Dati due punti distinti, trovare la retta passante per essi

Date due rette incidenti, trovare il piano da esse individuato

Data una retta, rappresentare alcuni piani passanti per essa

Dati due piani generici, trovare la loro retta comune

Dati un piano generico e un piano proiettante rispetto al P.O., trovare la loro retta comune

Dati un piano generico e un piano proiettante rispetto al P.V., trovare la loro retta comune

Dati due piani proiettanti rispetto al P.O., trovare la loro retta comune

Dati due piani proiettanti rispetto al P.V., trovare la loro retta comune

2.7. Ribaltamento di piani e rette

2.7.1. Ribaltamento di un piano

Il ribaltamento di un piano consiste in una rotazione che porti a fare coincidere il piano stesso con uno dei piani di proiezione. Di solito il ribaltamento di un piano si esegue per ottenere la vera forma di una figura giacente su di esso: venendo a coincidere con uno dei due piani di proiezione, la figura sarà proiettata in vera forma, senza alcuna deformazione. Nel metodo delle proiezioni di Monge, si ribalta la porzione di piano compresa fra le due tracce.

2.7.2. Ribaltamento di un piano perpendicolare al P.O. e inclinato rispetto al P.V.

Se il ribaltamento avviene sul piano orizzontale, $t_1\alpha$ fa da cerniera e $(t_2\alpha)$ (leggasi: "ti due di alfa ribaltato"), a ribaltamento avvenuto, formerà un angolo di 90° con $t_1\alpha$ (Fig. 57).

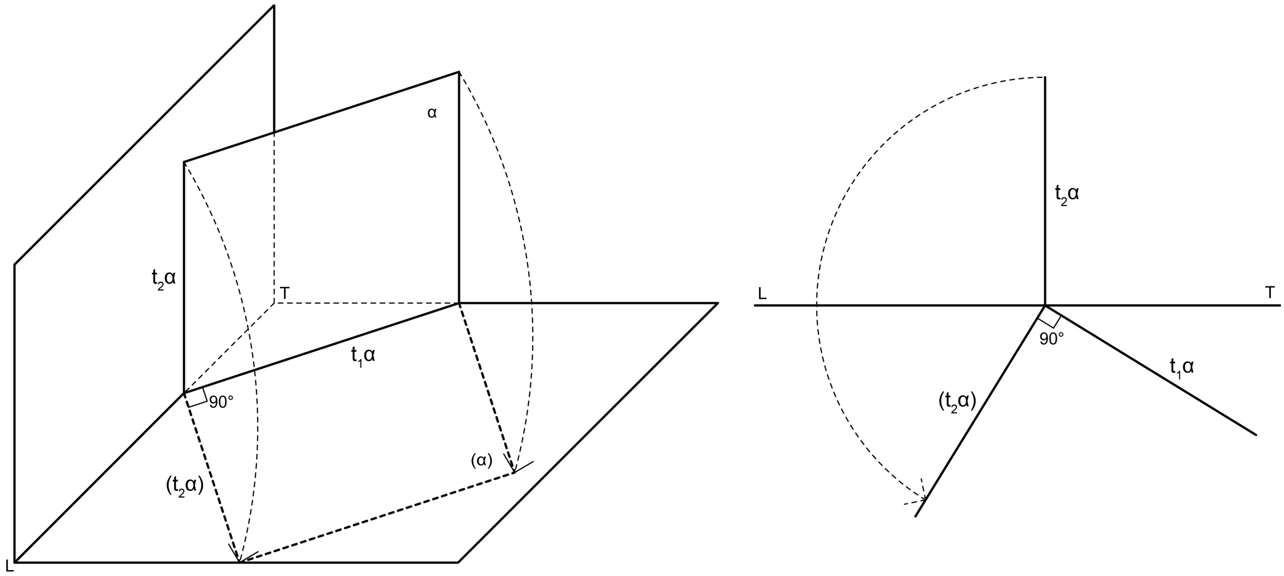


Fig. 57

Se il ribaltamento avviene sul piano verticale, $t_2\alpha$ fa da cerniera e $(t_1\alpha)$ coinciderà con la linea di terra (Fig. 58).

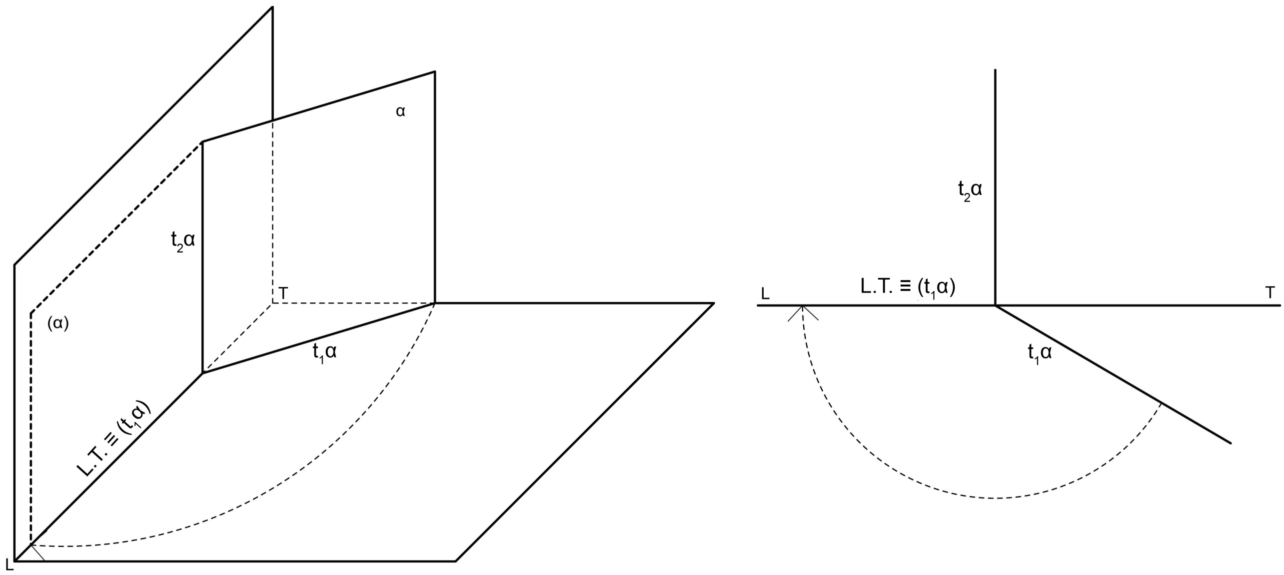


Fig. 58

2.7.3. Ribaltamento di un piano perpendicolare al P.V. e inclinato rispetto al P.O.

Se il ribaltamento avviene sul piano orizzontale, $t_1\alpha$ fa da cerniera e $(t_2\alpha)$ coinciderà con la linea di terra (Fig. 59).

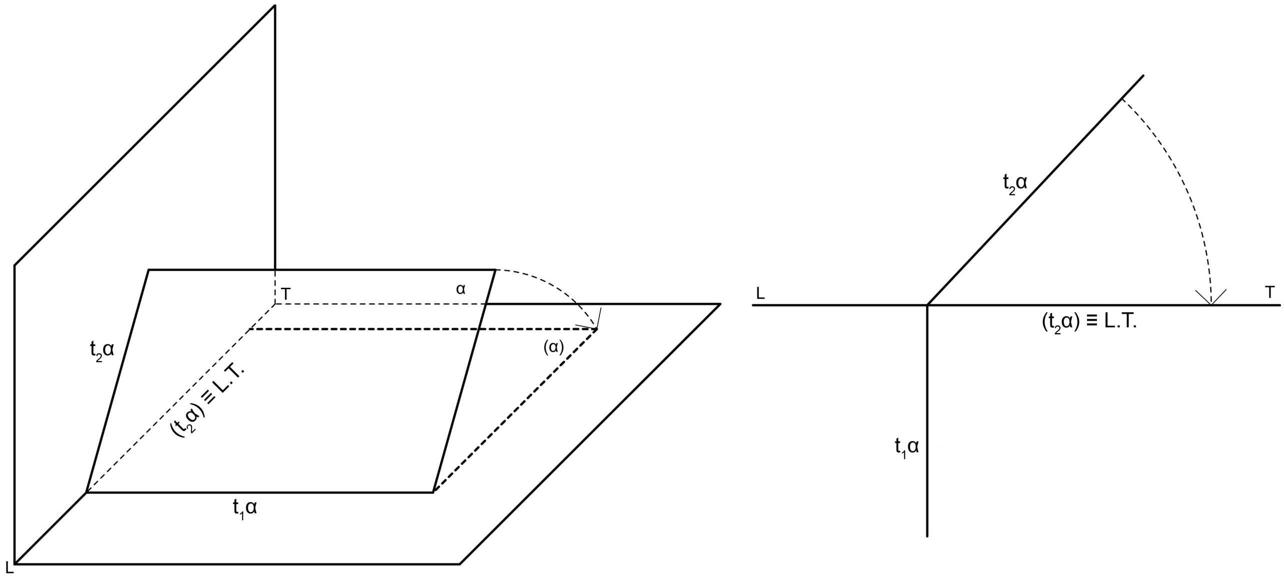


Fig. 59

Se il ribaltamento avviene sul piano verticale, $t_2\alpha$ fa da cerniera e $(t_1\alpha)$ formerà con $t_2\alpha$ un angolo di 90° (Fig. 60).

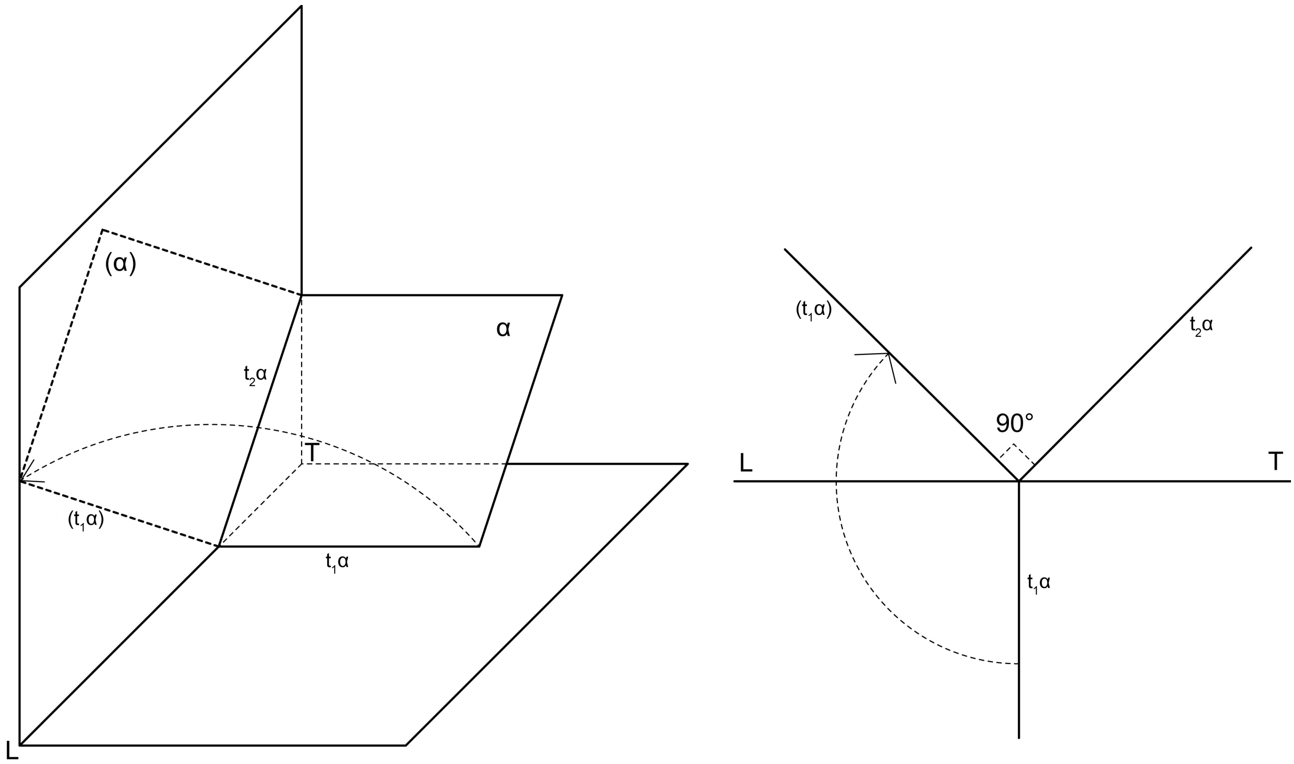


Fig. 60

2.7.4. Ribaltamento di un piano di profilo

Se il ribaltamento avviene sul P.V., ($t_1\alpha$) coinciderà con la linea di terra (Fig. 61).

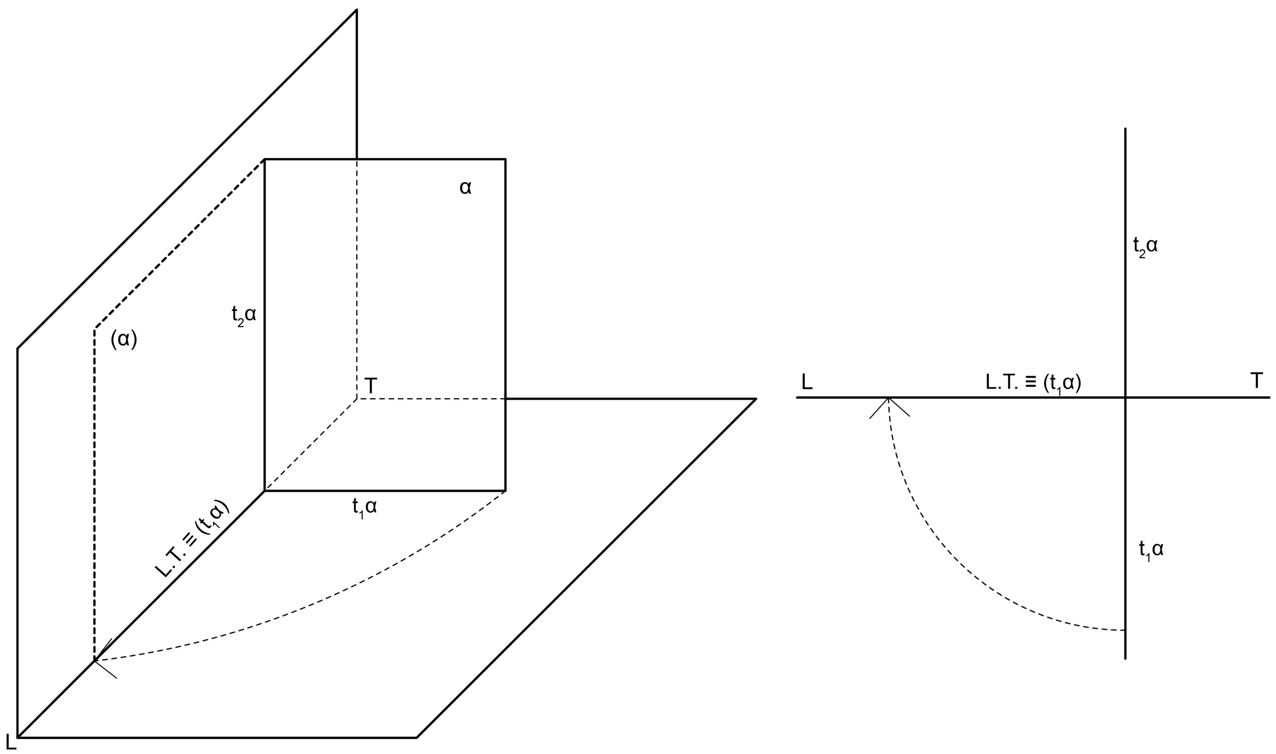


Fig. 61

Se il ribaltamento avviene sul P.O., ($t_2\alpha$) coinciderà con la linea di terra (Fig. 62).

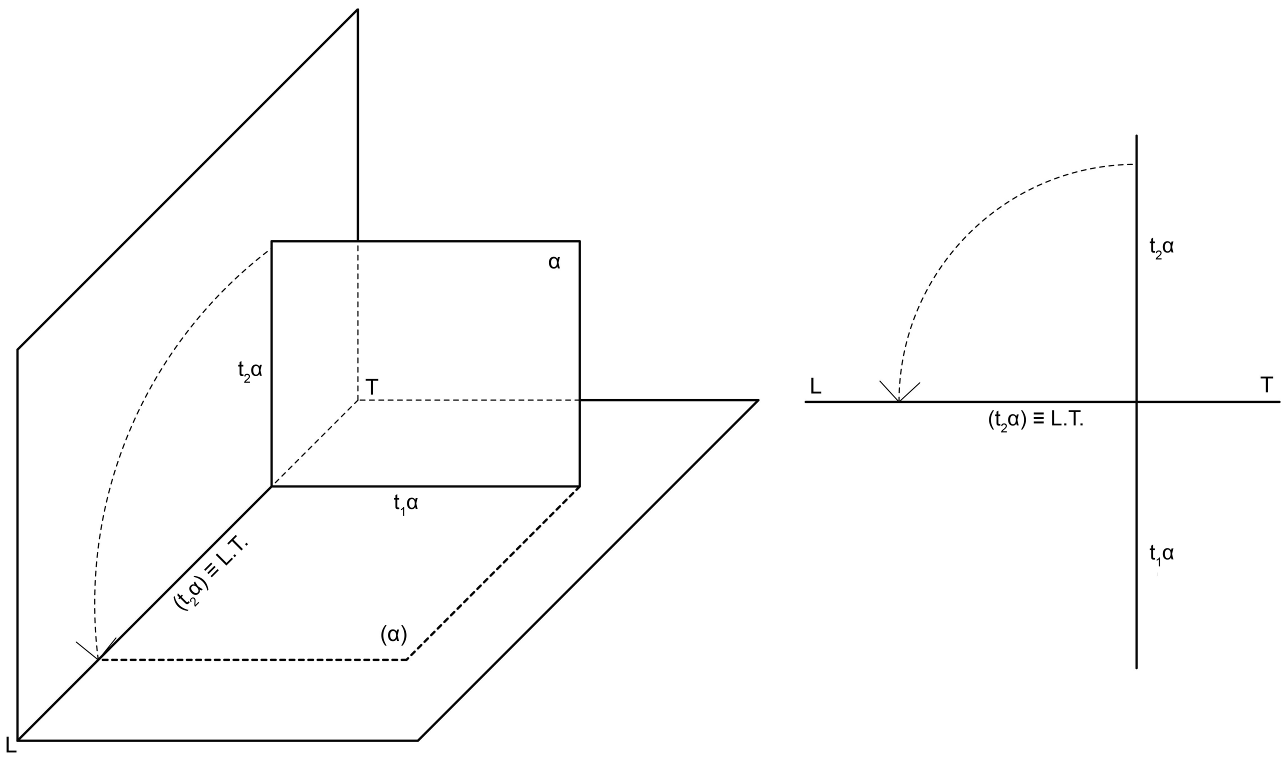


Fig. 62

2.7.5. Ribaltamento di un piano inclinato rispetto ai due piani di proiezione (piano generico)

Sia dato un piano α genericamente inclinato. Per effettuare il ribaltamento su uno dei due piani di proiezione, è necessario utilizzare un piano ausiliario β. Supponiamo di voler ribaltare il piano α sul P.O. Il piano ausiliario β dovrà essere perpendicolare rispetto al P.O. e inclinato rispetto al P.V ma con un precisa angolazione. Più precisamente, *la traccia orizzontale $t_1β$ dovrà formare un angolo di 90° con la traccia orizzontale $t_1α$* (Fig. 63).

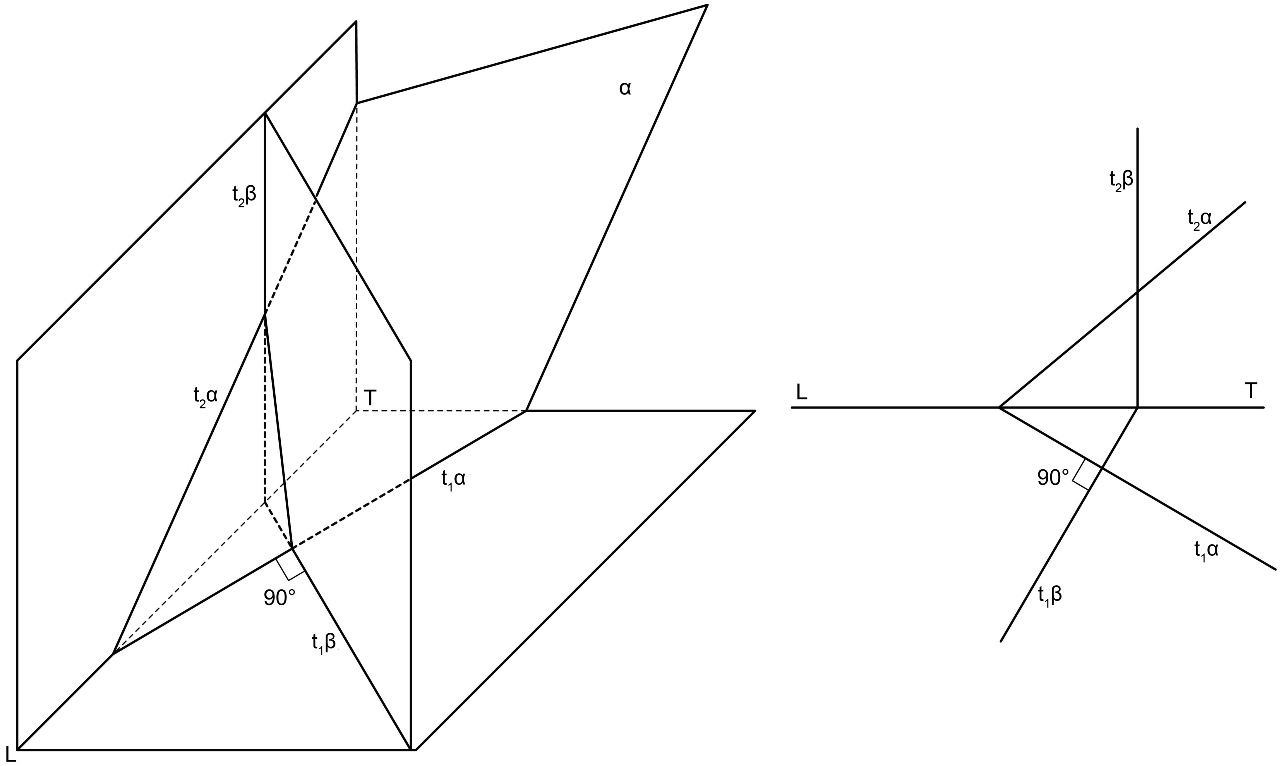


Fig. 63

Le intersezioni delle tracce omonime dei piani α e β determinano i punti S e T (Fig. 64, a sinistra) e, di conseguenza, il segmento posto nello spazio con estremità S-T, ortogonale a $t_1α$.

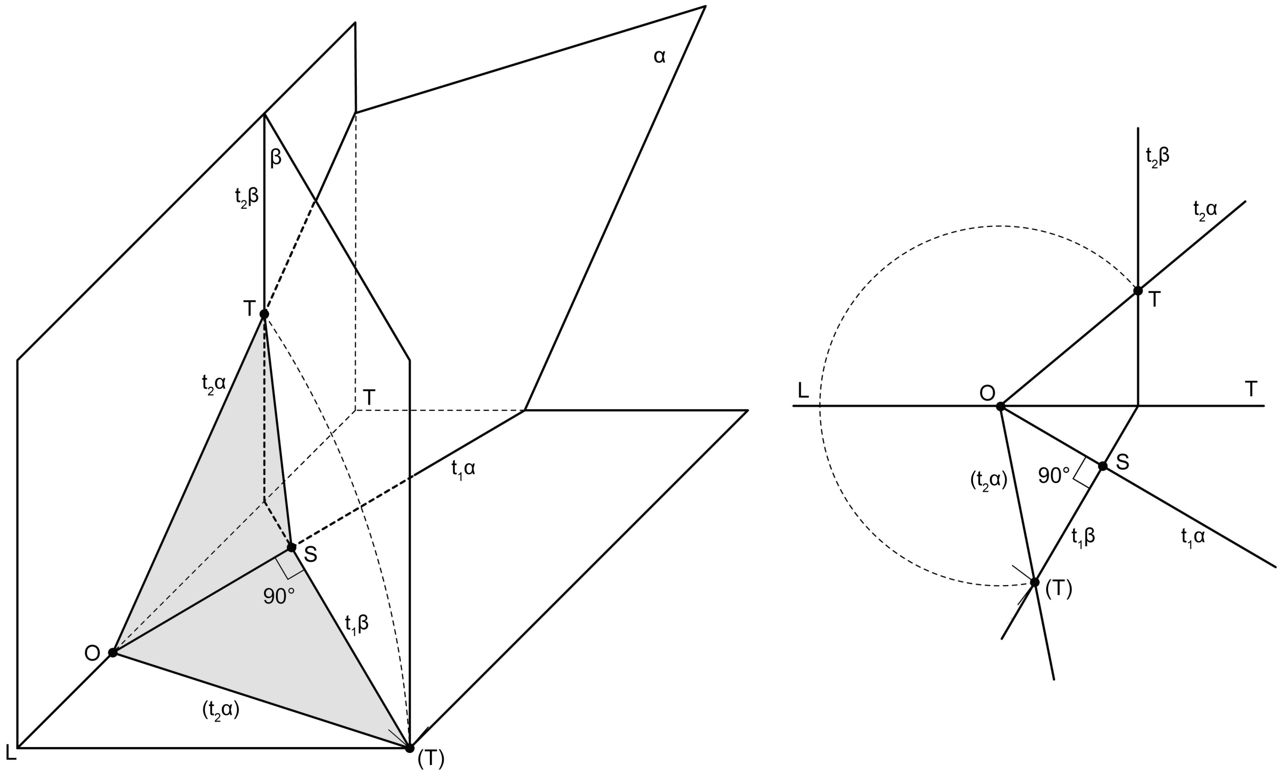


Fig. 64

Per ribaltare il piano α sul P.O., dobbiamo (Fig. 64, a sinistra):

- ribaltare sul P.O. il segmento S-T (che a ribaltamento avvenuto giacerà su $t_1\beta$ e avrà per estremi S-(T));
- unire (T) col punto O, ottenendo la traccia ($t_2\alpha$).

Osservando i triangoli OST e OS(T), si noterà che sono uguali in quanto hanno il lato OS in comune, i lati S-T e S-(T') uguali e l'angolo in S retto; si tratta quindi di un triangolo rettangolo che ha i cateti uguali, e quindi anche l'ipotenusa sarà uguale.

Passiamo adesso sul piano del disegno (Fig. 64, a destra). Per ribaltare il piano α sul P.O., dobbiamo:

- ribaltare sul P.O. il punto T; facendo centro col compasso in O, riportiamo OT su $t_1\beta$ e otteniamo (T);
- unire O con (T).

Per effettuare il ribaltamento del piano α sul P.V., il procedimento è analogo. Occorre:

- tracciare un piano ausiliario β, ortogonale rispetto al P.V. e la cui traccia verticale $t_2\beta$ sia ortogonale a $t_2\alpha$ (Fig. 65, a sinistra);
- individuare la posizione di punti S e T (Fig. 65, a sinistra);
- facendo centro col compasso in O, riportare O-S su $t_2\beta$, ottenendo (S') (Fig. 65, a destra);
- congiungere (S) con O, ottenendo ($t_1\alpha$), ribaltamento di $t_1\alpha$ sul P.V. (Fig. 65, a destra).

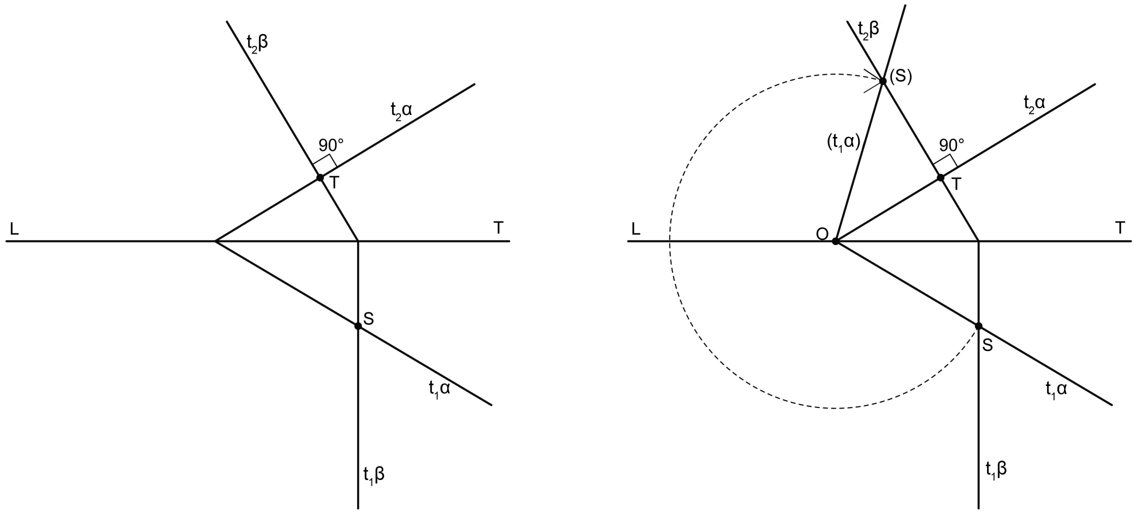


Fig. 65

2.7.6. Retta di massima pendenza di un piano

L'esempio riportato nella fig. 64 introduce il concetto di retta di massima pendenza di un piano (utile, nella pratica, a determinare graficamente il deflusso delle acque sulla falda di un tetto o su un terreno in pendenza).

Dato un piano α, si definisce *retta di massima pendenza* la retta r che forma il maggior angolo con la prima proiezione del piano. Per costruire la retta di massima pendenza di un piano α, occorre costruire un piano β proiettante in prima proiezione e con traccia $t_1\beta$ ortogonale a $t_1\alpha$. La retta r di intersezione fra i due piani è la retta di massima pendenza cercata (fig. 66).

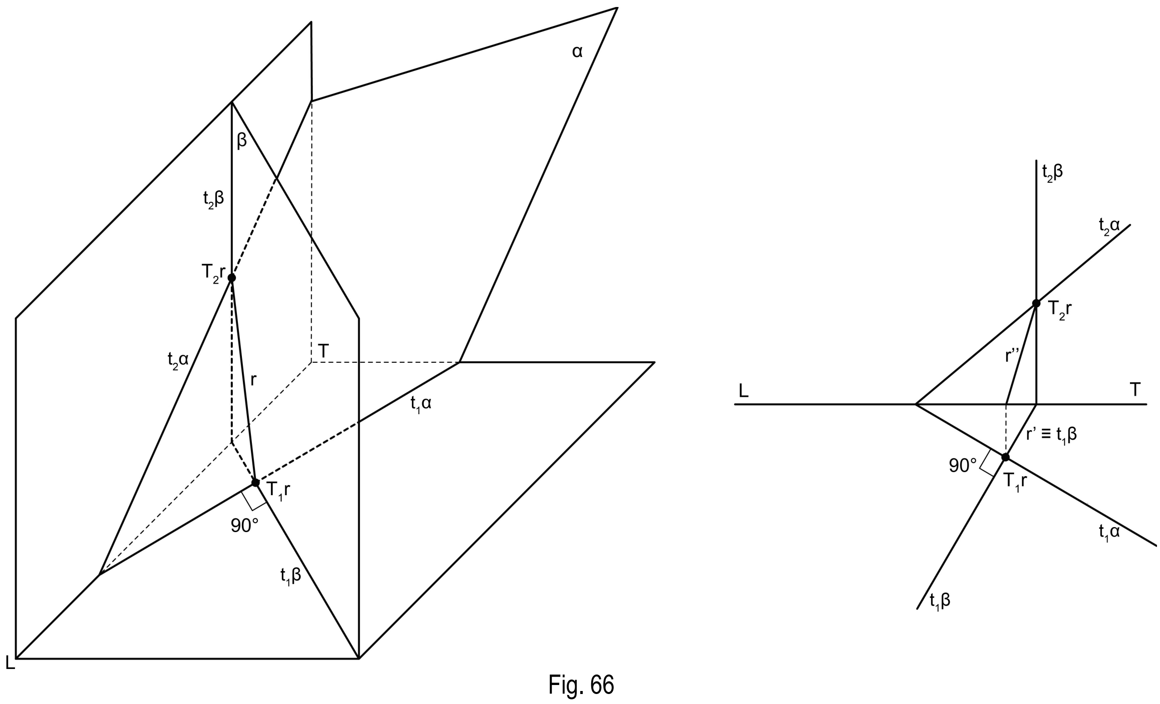


Fig. 66

2.7.7. Ribaltamento di una retta perpendicolare al P.O. giacente su un piano proiettante in prima proiezione

Sia dato un piano α, proiettante in prima proiezione, e una retta r, giacente su di esso e perpendicolare al P.O. Ribaltando il piano α sul P.O., si avranno (t_2α) e (r) che formeranno angoli retti con t_1α (Fig. 67).

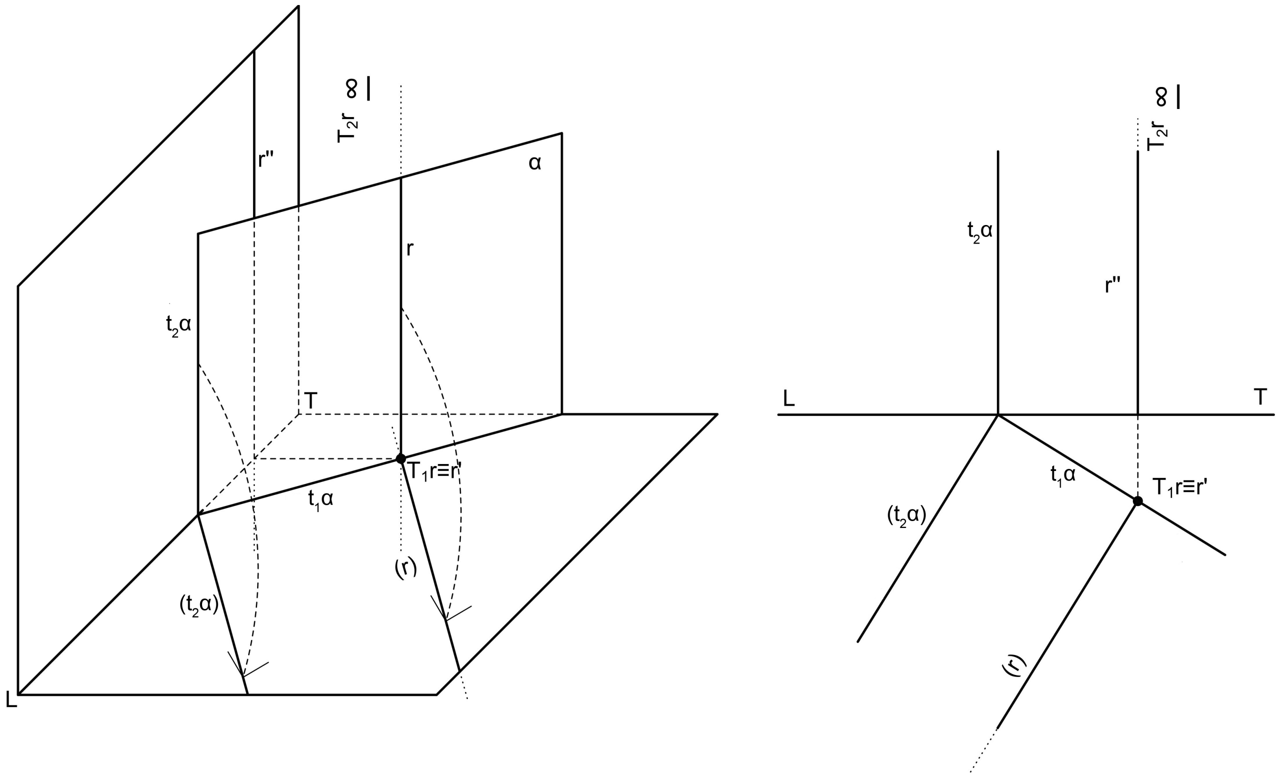


Fig. 67

2.7.8. Ribaltamento di una retta parallela al P.O. giacente su un piano proiettante in prima proiezione

Sia dato un piano α, proiettante in prima proiezione, e una retta S, giacente su di esso e parallela al P.O. Ribaltando il piano α sul P.O., (s) si disporrà parallelamente a t_1α (Fig. 68).

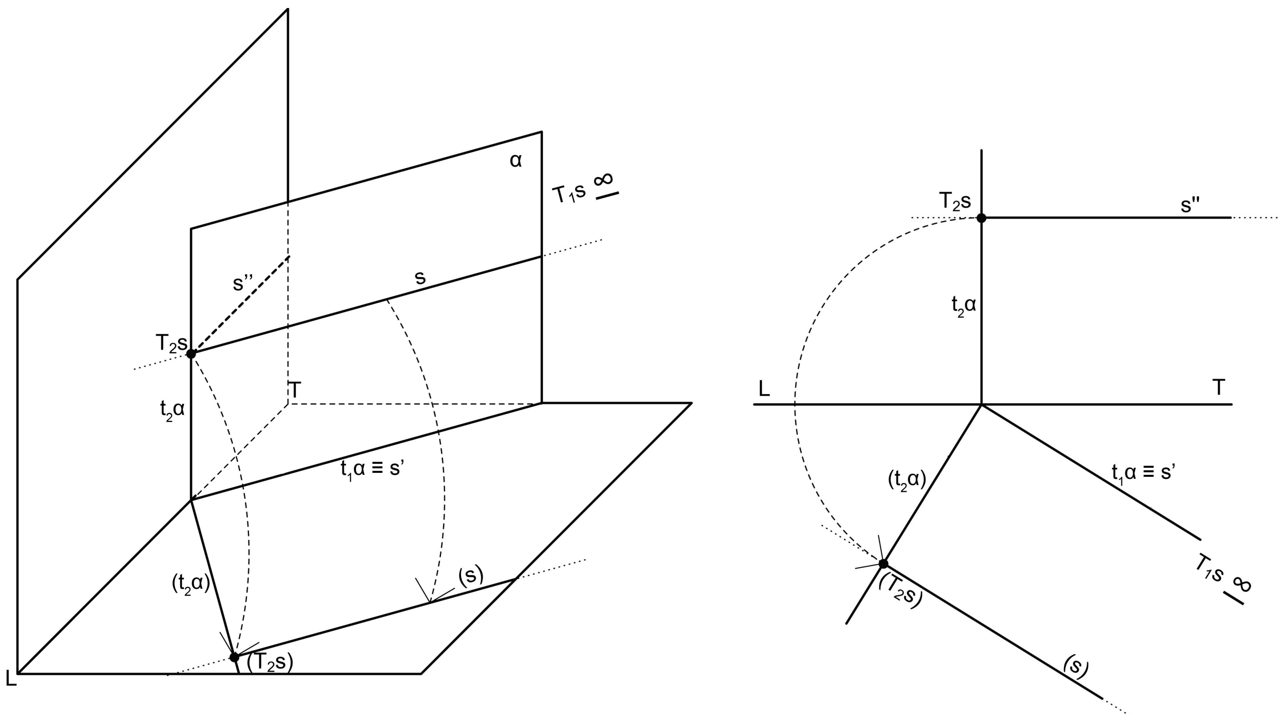


Fig. 68

2.7.9. Ribaltamento di una retta generica giacente su un piano proiettante in seconda proiezione

Sia dato un piano α, proiettante in seconda proiezione, e una retta r, giacente su di esso e genericamente inclinata sia rispetto al P.O. che rispetto al P.V.

Ribaltando il piano α sul P.V., si avrà $(t_1\alpha)$ formante un angolo retto con $t_2\alpha$. Per ottenere (r) occorrerà congiungere (T_1r) con T_2r (Fig. 69).

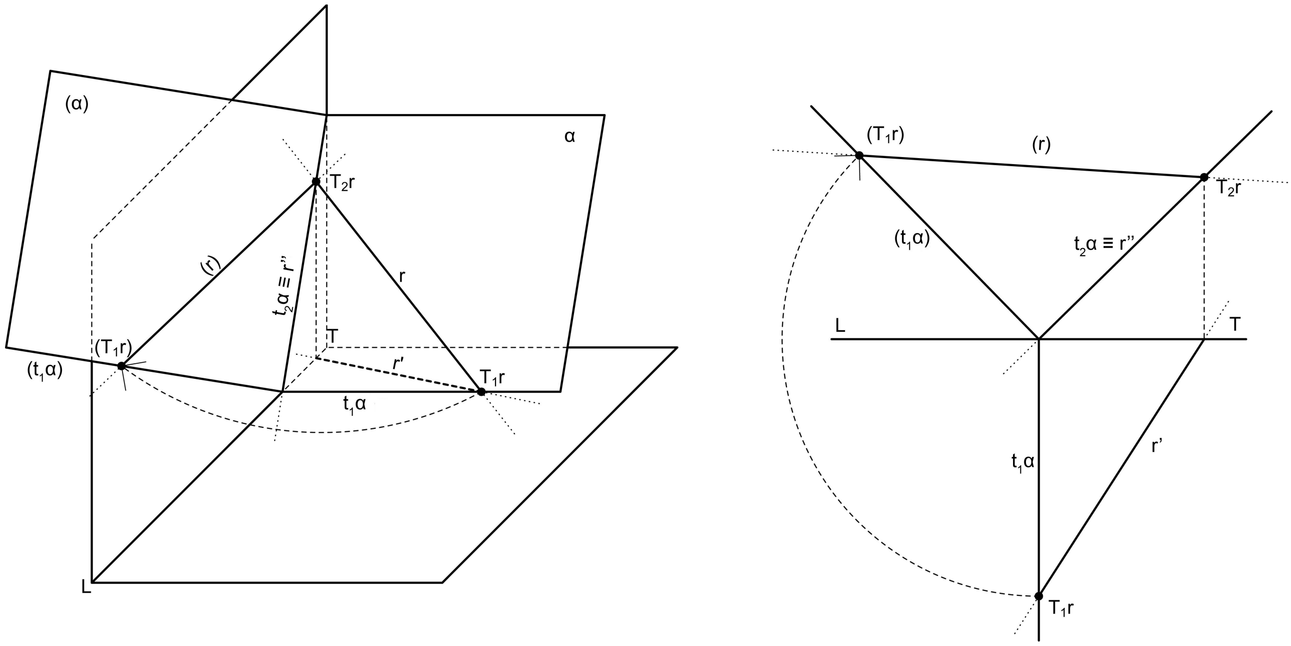


Fig. 69

Ribaltando il piano α sul P.O., $(t_2\alpha)$ formerà un angolo retto con $t_1\alpha$. Per ottenere (r) basterà congiungere (T_2r) con T_1r (Fig. 70).

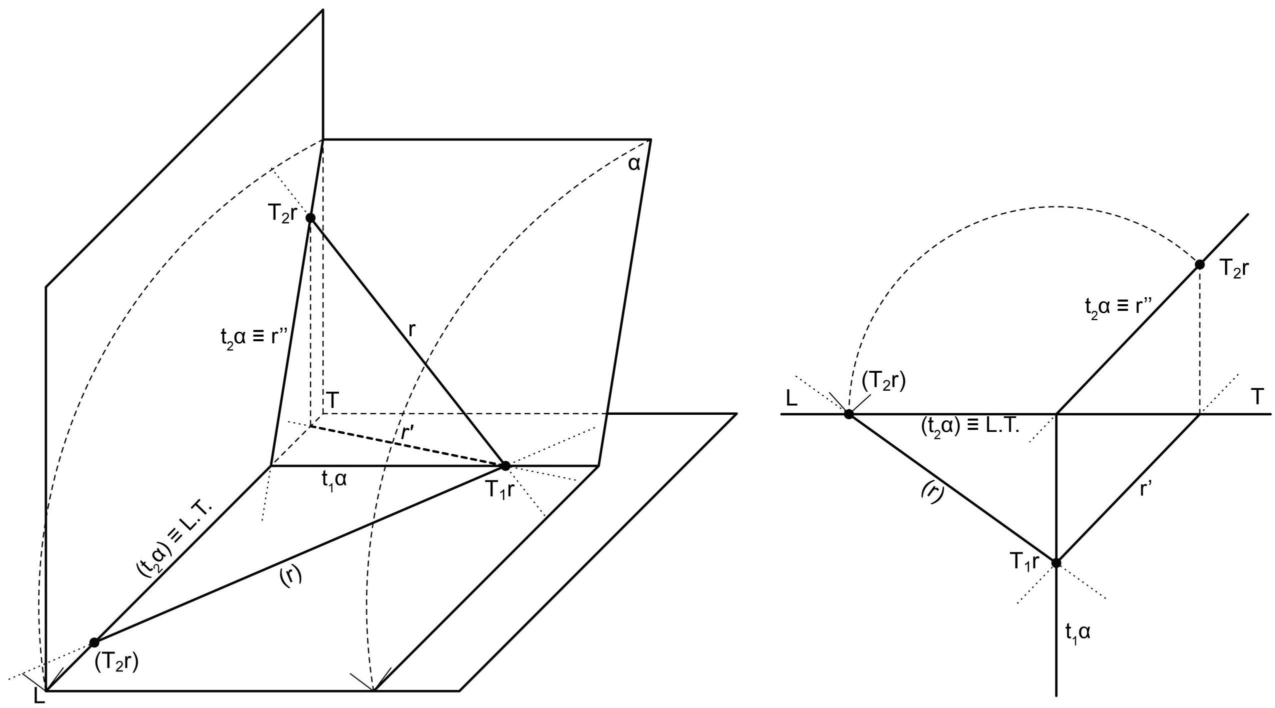


Fig. 70

2.7.10. Ribaltamento di una retta parallela al P.O. giacente su un piano generico

Sia dato un piano generico, e una retta, giacente su di esso e parallela al P.O. Ribaltando α sul P.O. con l'ausilio di un piano β proiettante in prima proiezione e con traccia $t_1\beta$, formante un angolo di 90° rispetto a $t_1\alpha$, (r) si disporrà parallelamente al $t_1\alpha$ (Fig. 71). Si noti che la traccia $t_2\beta$ viene fatta passare per T_2r anziché da un punto qualsiasi di $t_2\alpha$, per avere una costruzione più rapida.

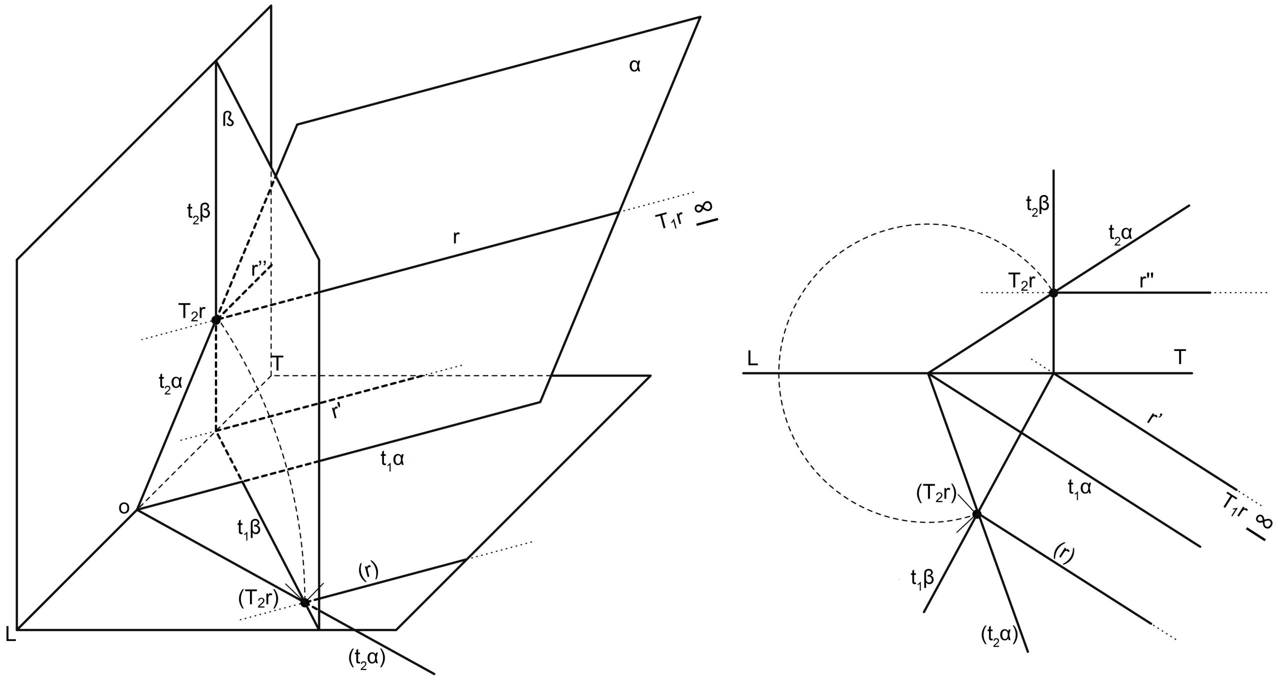


Fig. 71

2.7.11. Ribaltamento di una retta generica giacente su un piano generico

Sia dato un piano α generico, e una retta generica r giacente su di esso. Ribaltando α sul P.V. con l'ausilio di un piano β proiettante in seconda proiezione con traccia $t_2\beta$, formante un angolo di 90° rispetto a $t_2\alpha$, (r) sarà la congiungente di T_2r con (T_1r) (Fig. 72).

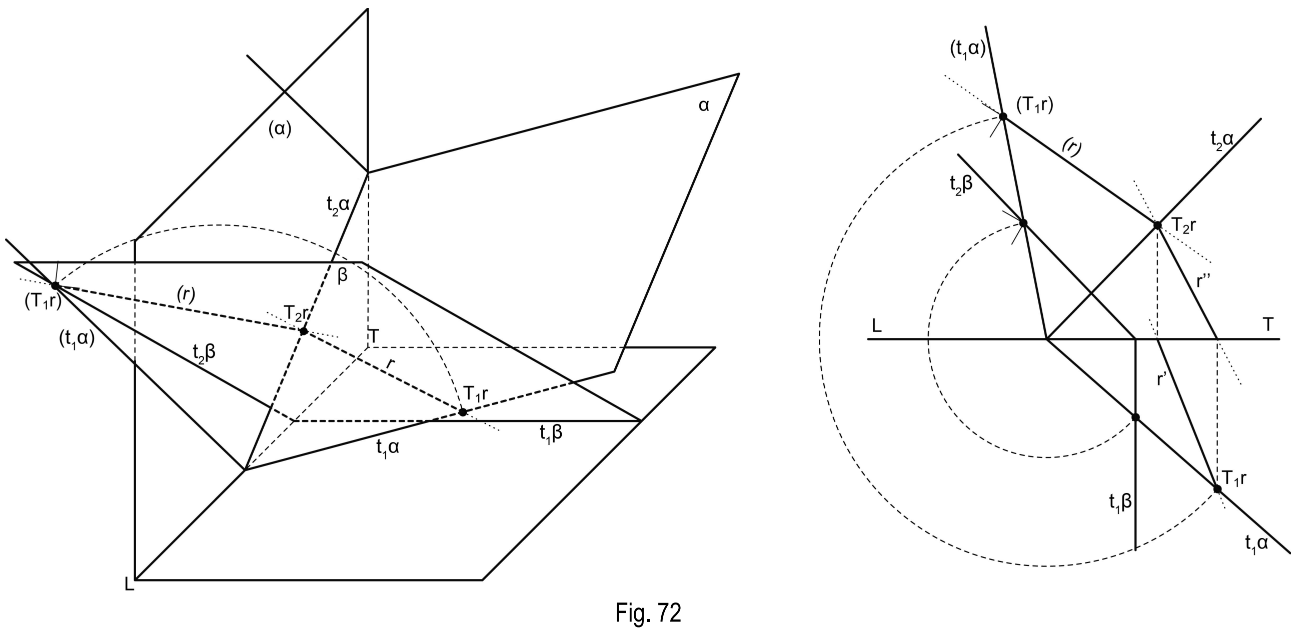


Fig. 72

2.7.12. Angolo di un piano rispetto ai piani di proiezione

Sia dato un piano α, proiettante in prima proiezione e inclinato rispetto al P.V. (fig. 73). L'angolo di α con il P.O. è di 90°; l'angolo di α con il P.V. è l'angolo ω che la traccia $t_1α$ forma con la linea di terra.

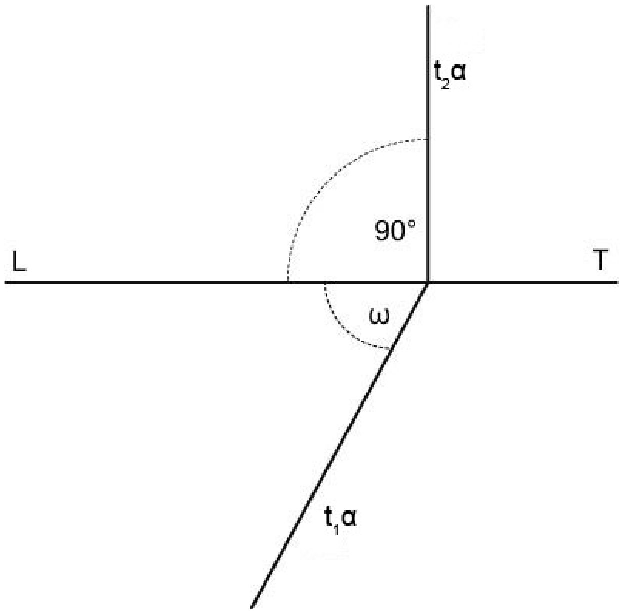


Fig. 73

Sia dato un piano α, proiettante in seconda proiezione e inclinato rispetto al P.O. (fig. 74). L'angolo di α con il P.V. è di 90°; l'angolo di α con il P.O. è l'angolo ω che la traccia $t_2α$ forma con la linea di terra.

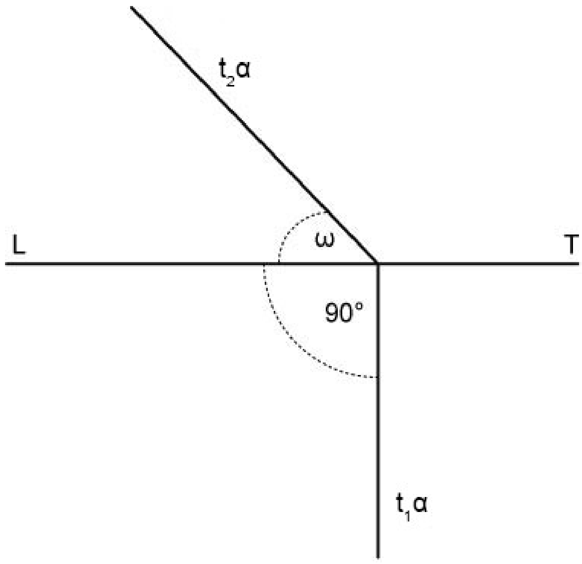


Fig. 74

Sia dato un piano α, inclinato rispetto ai due piani di proiezione. Per determinare l'angolo che α forma con il P.O., bisogna utilizzare un piano ausiliario β ortogonale al P.O. e con la traccia $t_1β$ perpendicolare ad $t_1α$ (fig. 75). L'angolo ω che la retta di intersezione r fra α e β forma con il P.O. è l'angolo cercato. Per rappresentarlo in doppia proiezione ortogonale, bisogna ribaltare il piano β sul P.O. e, con esso, T_2r - ottenendo (T_2r) - e la retta r - ottenendo (r). Unendo T_1r con (T_2r) si determinerà l'angolo ω.

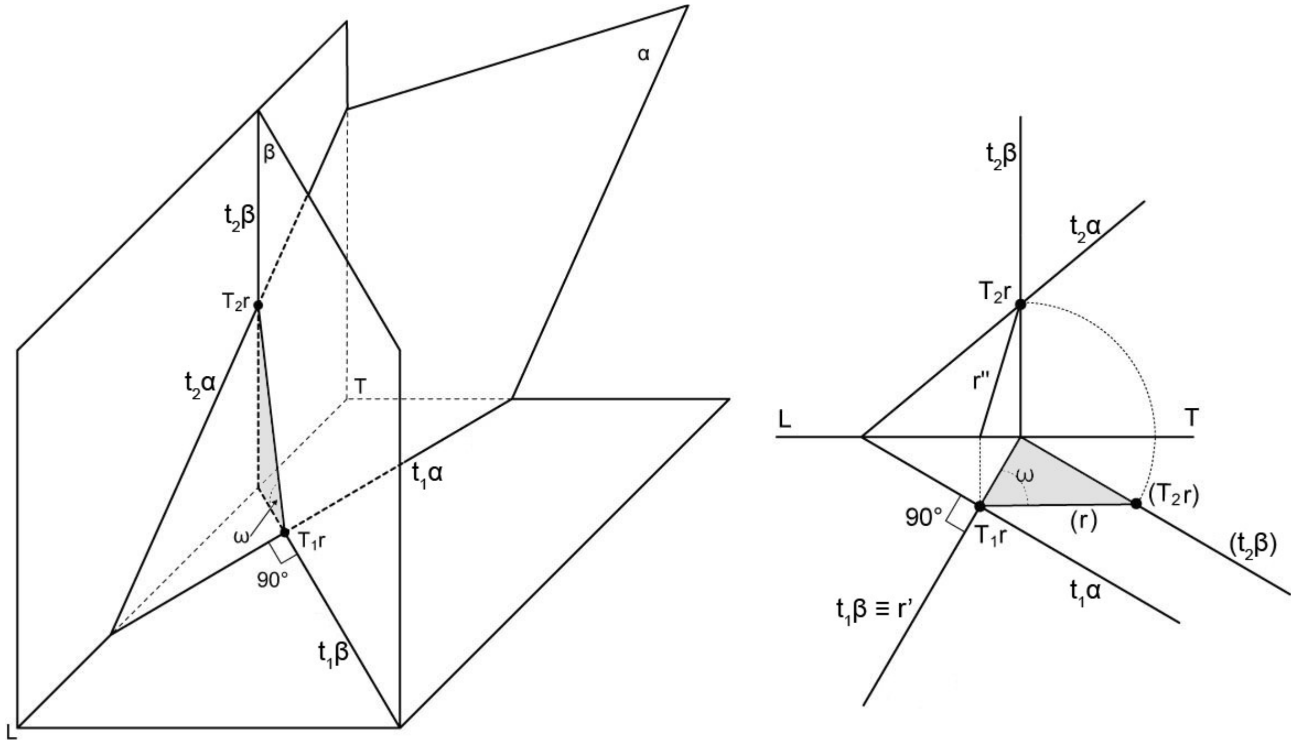


Fig. 75

Se si vuole determinare l'angolo ω che il piano α forma con il P.V., il piano ausiliario β sarà ortogonale al P.V. e con la traccia $t_2β$ perpendicolare a $t_2α$. Si ribalta β sul P.V. e, come nell'esempio precedente, si determina l'angolo ω (fig. 76 – si omette la rappresentazione nello spazio).

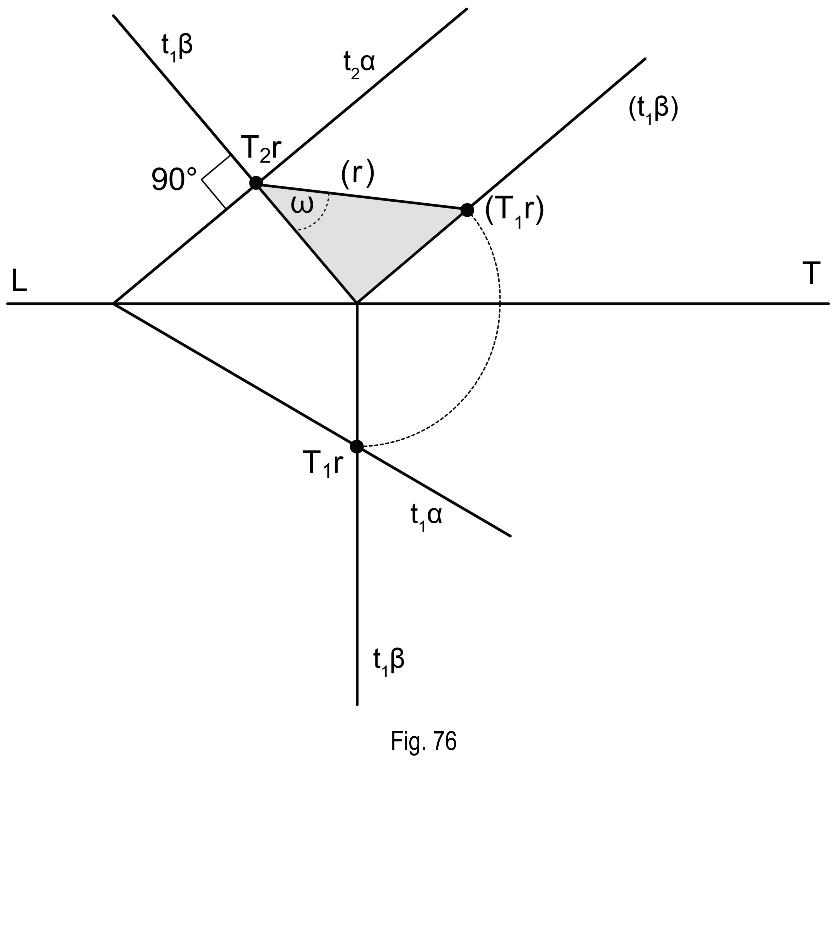


Fig. 76

2.8. Proiezione di figure piane e solidi

2.8.1. Proiezione di un quadrato parallelo al P.O.

Sul piano orizzontale il quadrato si proietta in vera grandezza. Sul piano verticale i lati AB e CD, perpendicolari al P.V., si proiettano in due punti coincidenti A''≡B'' e C''≡D'', mentre i lati AD e BC si proiettano in un segmento parallelo alla linea di terra (Fig. 77).

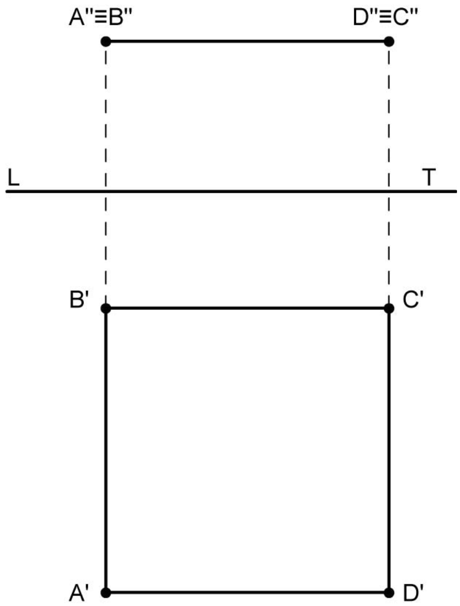


Fig. 77

2.8.2. Proiezione di un quadrato parallelo al P.V.

L'esempio (Fig. 78) è analogo al precedente.

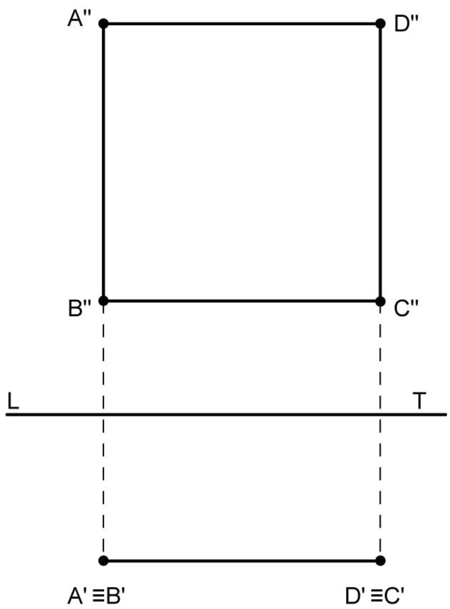


Fig. 78

2.8.3. Proiezione di una circonferenza parallela al P.V.

Sul piano verticale la circonferenza si proietta in vera grandezza. Sul piano orizzontale la rappresentazione è un segmento parallelo alla linea di terra, corrispondente alla dimensione del diametro (Fig. 79).

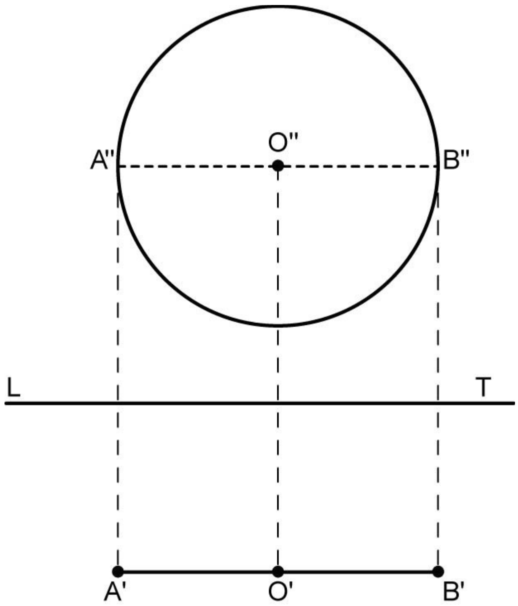


Fig. 79

2.8.4. Proiezione di una circonferenza parallela al P.O.

L'esempio (Fig. 80) è analogo al precedente.

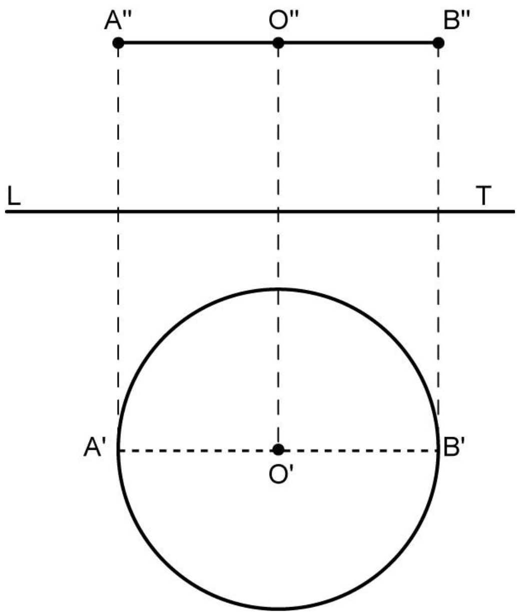


Fig. 80

2.8.5. Proiezione di un triangolo e di un esagono paralleli al P.O.

Per ottenere la rappresentazione si procede come nei casi precedenti (Fig. 81).

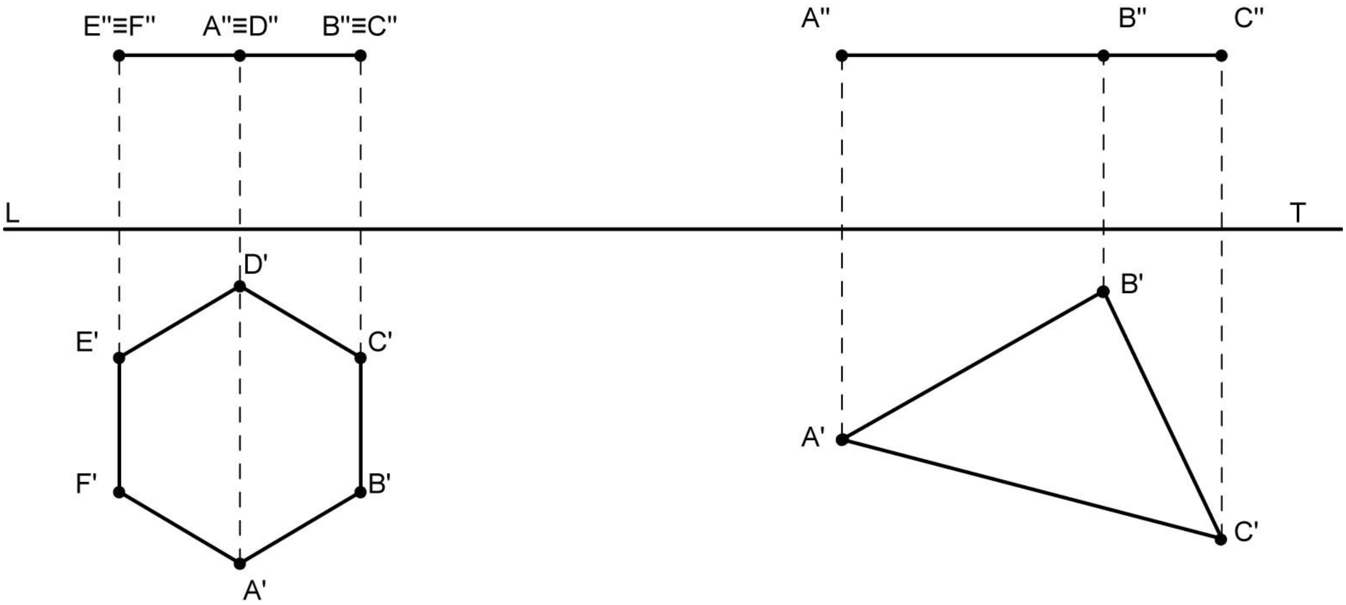


Fig. 81

2.8.6. Proiezione di un triangolo e di un esagono paralleli al P.V.

L'esempio (Fig. 82) è analogo al precedente.

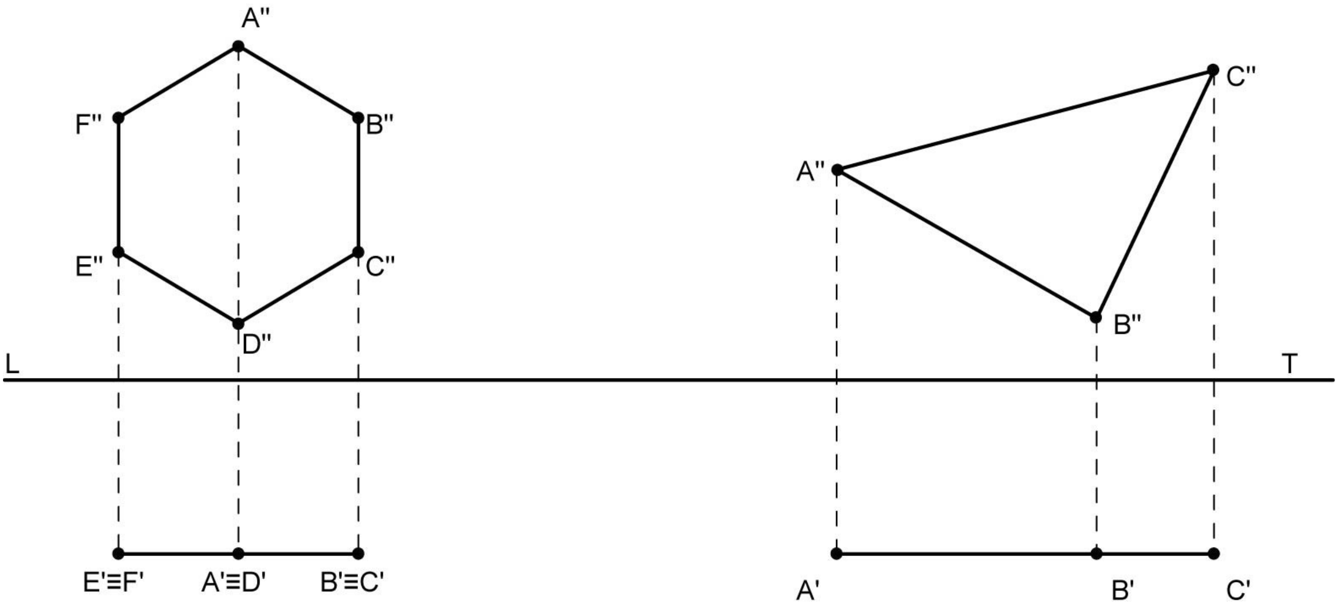


Fig. 82

2.8.7. Proiezione di un prisma a base esagonale con basi parallele al P.O. e spigoli perpendicolari al P.O.

Ogni spigolo del prisma, essendo perpendicolare al P.O., si proietta in pianta in un solo punto, corrispondente ai vertici coincidenti degli esagoni di base. Le superfici delle facce laterali, essendo perpendicolari al P.O., hanno per proiezioni sul P.O. segmenti corrispondenti ai lati dell'esagono (Fig. 83).

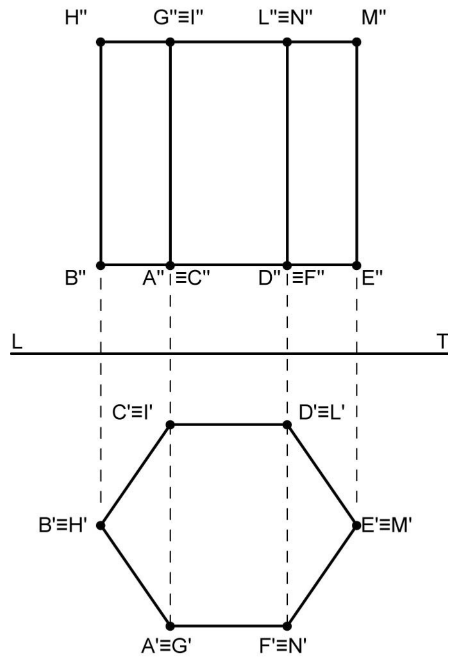


Fig. 83

2.8.8. Proiezione di un prisma a base triangolare con le basi parallele al P.V.

Sul P.V. le basi si proiettano in vera grandezza, mentre sul P.O. gli spigoli sono perpendicolari alla L.T. (Fig. 84).

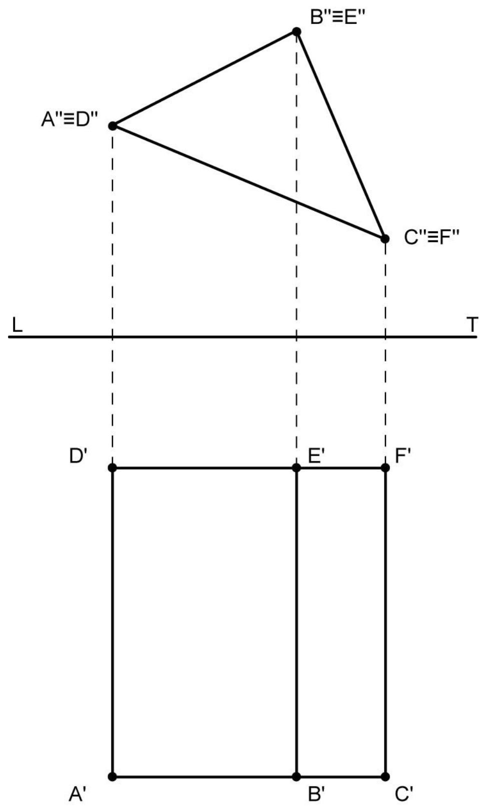


Fig. 84

2.8.9. Proiezione di un cilindro retto con base poggiata sul P.O.

Sul P.O. le basi coincidono e si proiettano in vera grandezza; sul P.V. la proiezione è un rettangolo con due lati perpendicolari alla L.T. e uguali all'altezza del cilindro, e due lati uguali al diametro della base (Fig. 85).

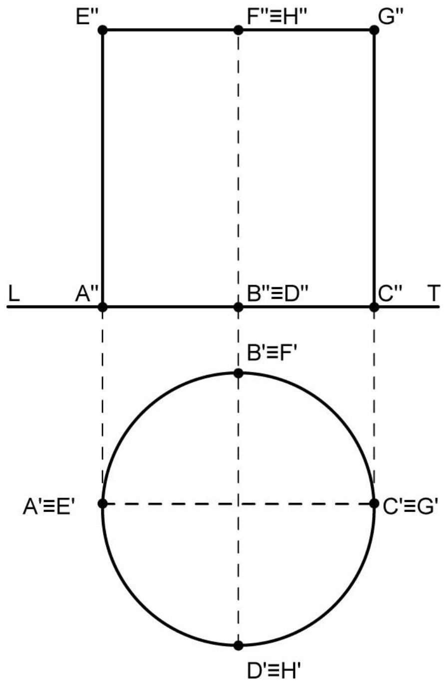


Fig. 85

2.8.10. Proiezione di un cilindro retto con base tangente al P.V.

L'esempio (Fig. 86) è analogo al precedente.

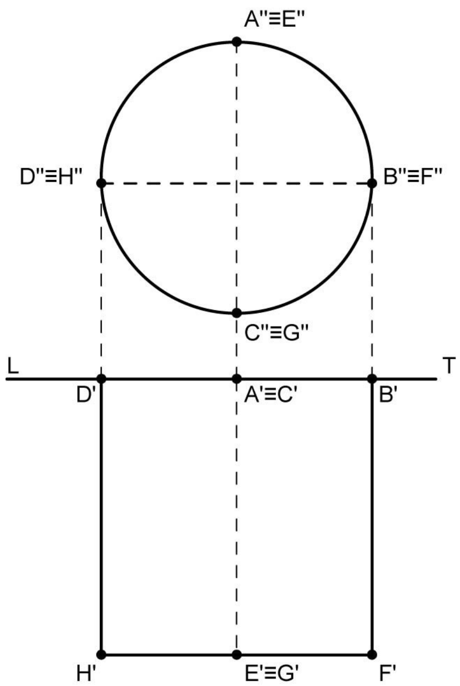


Fig. 86

2.8.11. Proiezione di un cono con base parallela al P.O.

Sul P.O. la base si proietta in vera grandezza e il suo centro rappresenta la proiezione orizzontale del vertice del cono. In proiezione verticale il cono è rappresentato tramite un triangolo isoscele con base parallela alla L.T. (Fig. 87).

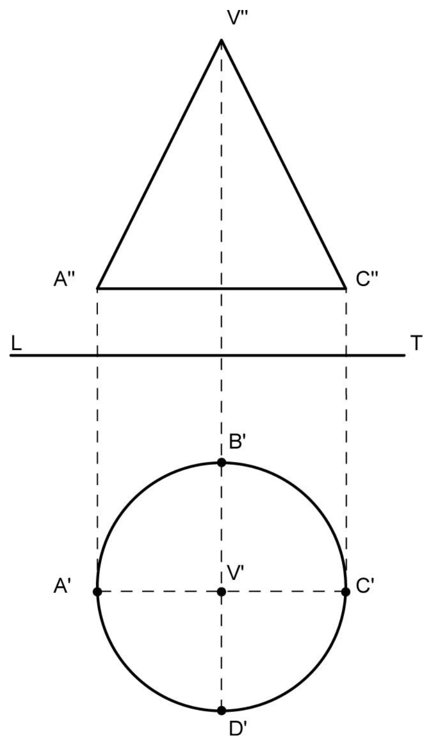


Fig. 87

2.8.12. Proiezione di una sfera

In proiezione orizzontale e verticale la sfera è rappresentata da una circonferenza. Per disegnarla occorre conoscere il raggio e le proiezioni (quota, aggetto) del suo centro (Fig. 88).

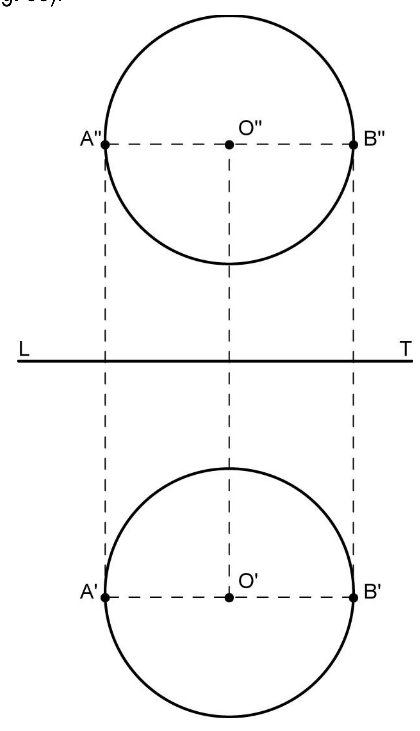


Fig. 88

2.8.13. Proiezione di una piramide regolare con la base quadrata parallela al P.O.

Sul P.O. la base si proietta in vera grandezza; il vertice corrisponde al centro del quadrato. Sul P.V. la base è parallela alla L.T. (Fig. 89).

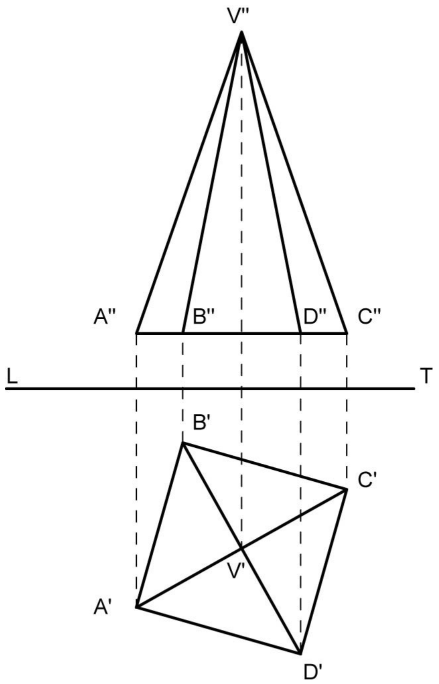


Fig. 89

2.8.14. Proiezione di una piramide a base quadrata con vertice tangente al P.V. e asse perpendicolare al P.V.

Sul P.V. la base si proietta in vera grandezza. Sul P.O. la base è parallela alla L.T. (Fig. 90).

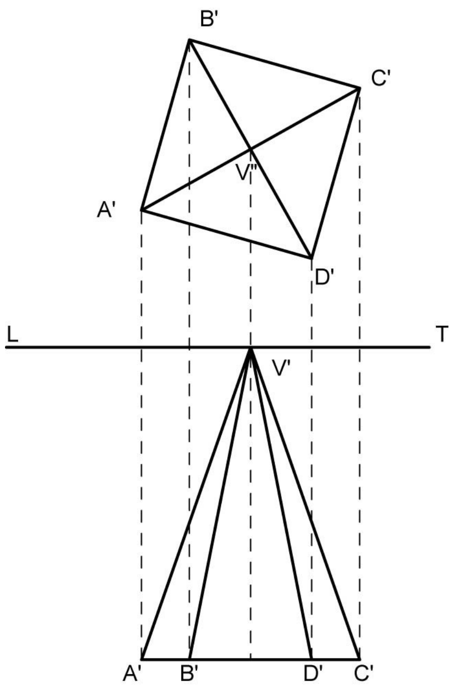


Fig. 90

2.9. Determinazione della vera forma e grandezza di figure piane giacenti su piani non paralleli ai piani di proiezione

2.9.1. Vera forma e grandezza di un triangolo giacente su un piano perpendicolare al P.O. e inclinato al P.V.

Sia dato un piano α, proiettante in prima proiezione, e un triangolo giacente su di esso. Le proiezioni ortogonali del triangolo non riprodurranno la sua vera forma e grandezza (fig. 91).

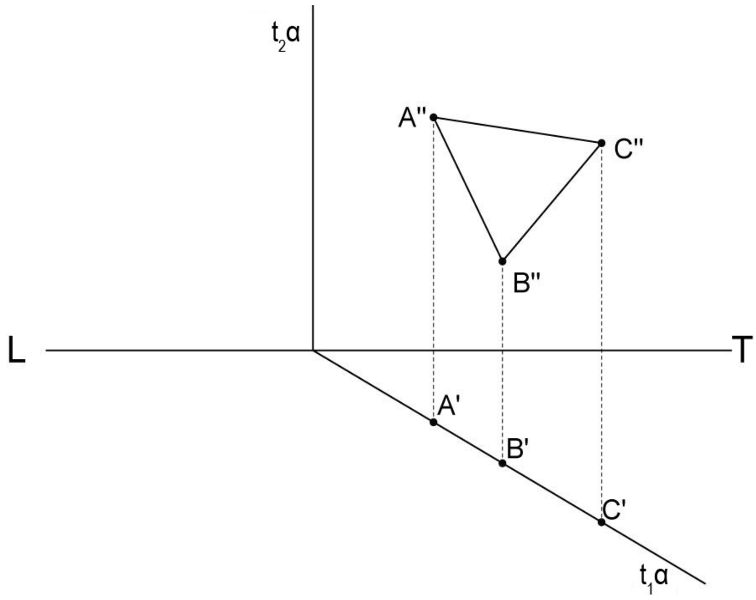


Fig. 91

Per ottenere la vera forma e grandezza del triangolo occorre far passare per ogni vertice una retta orizzontale (r, t s) e una retta perpendicolare al P.O. (v, w, x), tutte appartenenti al piano α. Poi si ribalta il piano α sul P.O.; l'intersezione delle rette ribaltate determina i vertici del triangolo rappresentato in vera forma grandezza (A), (B), (C) (fig. 92).

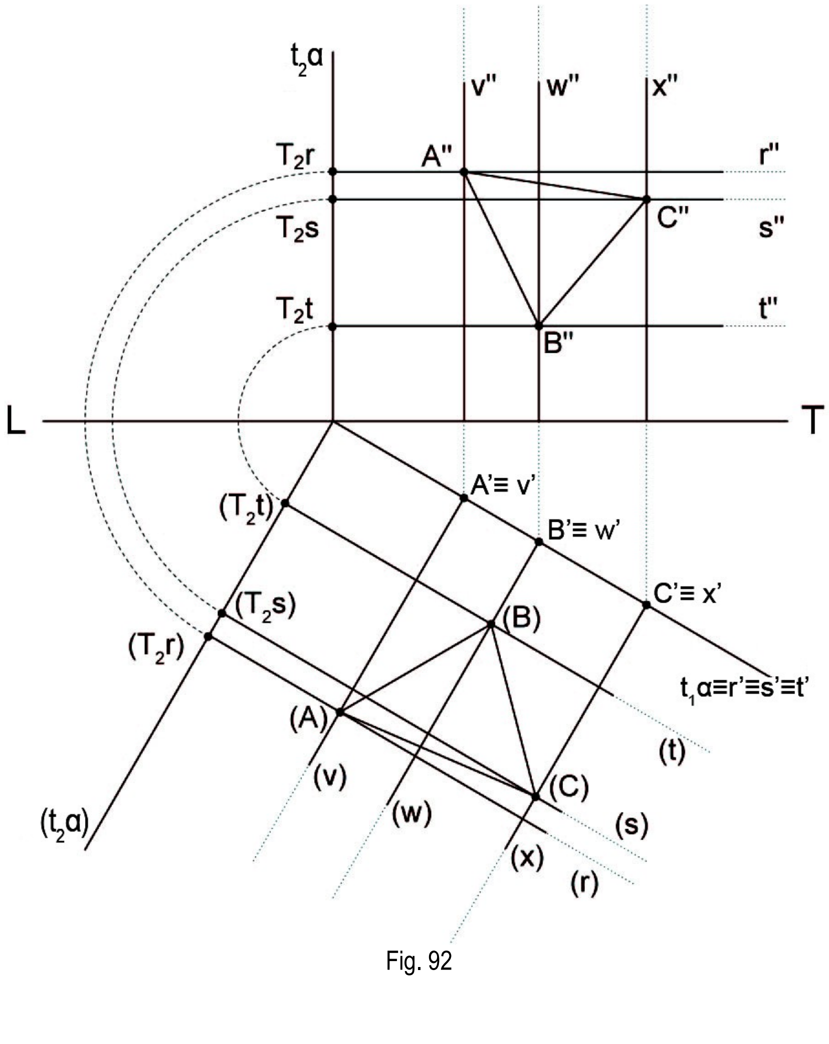


Fig. 92

2.9.2. Vera forma e grandezza di un quadrilatero giacente su un piano generico

Sia dato un piano α, inclinato ai piani di proiezione (piano generico), e un quadrilatero giacente su di esso. Le proiezioni ortogonali del quadrilatero non riprodurranno la sua vera forma e grandezza (fig. 93).

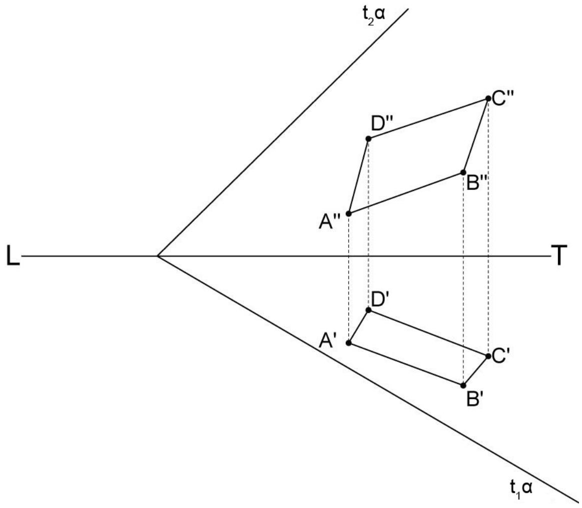


Fig. 93

Per ottenere la vera forma e grandezza occorre far passare dai vertici del quadrilatero quattro rette (r, s t, v) appartenenti al piano α e ribaltare, mediante un piano ausiliario β, il piano α sul P.O. Ottenute (r), (s), (t), (v), , dai punti A', B', C' e D' si conducono le normali a $t_1\alpha$ fino a incontrare le rette di appartenenza di detti punti (fig. 94). Il quadrilatero (A), (B), (C), (D) rappresenta la figura cercata.

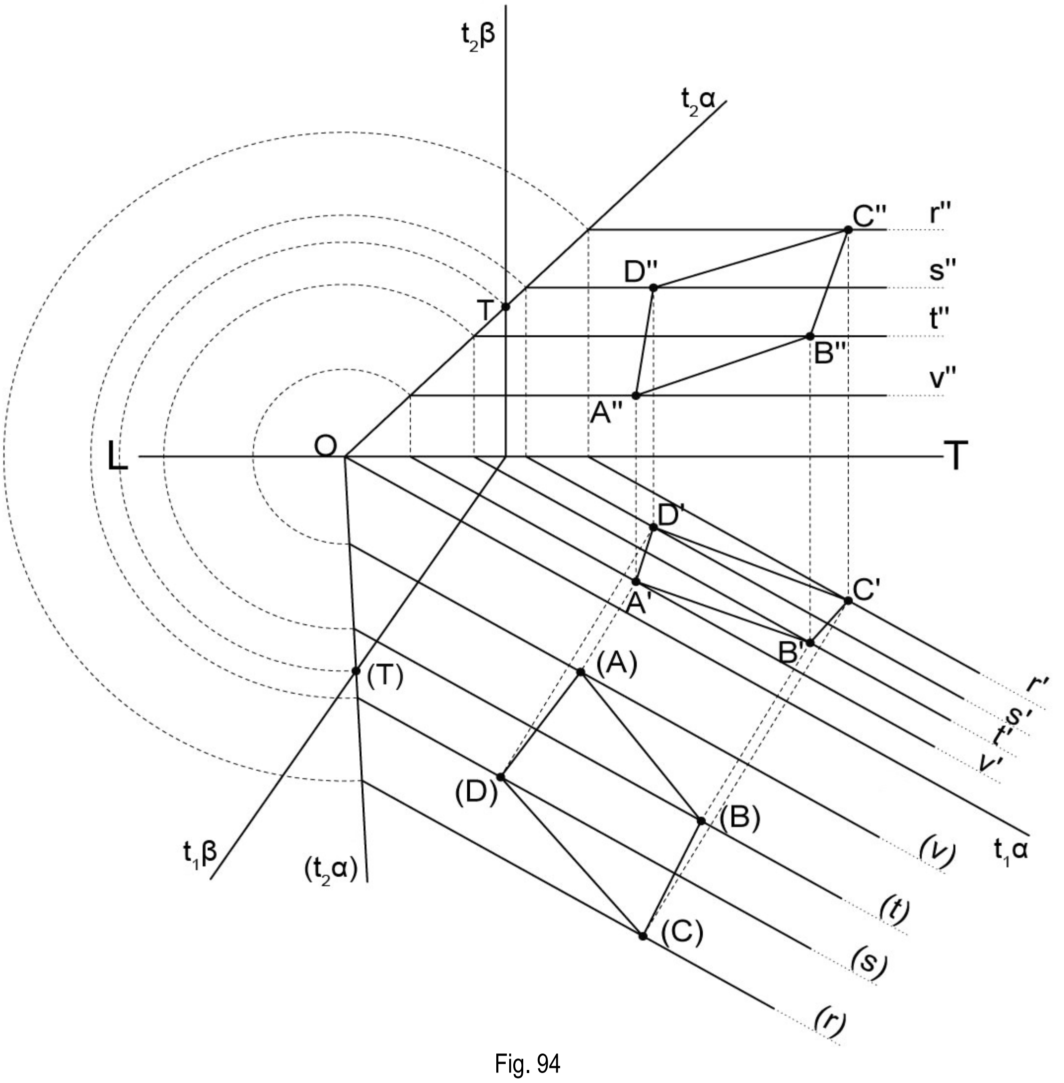


Fig. 94

2.10. Rappresentazione di una figura data su un piano non parallelo a un piano di proiezione

Il problema è inverso a quello per determinare la vera forma e grandezza di una figura appartenente ad un piano non parallelo a uno dei due piani di proiezione.

2.10.1. Proiezione di un quadrato giacente su un piano α perpendicolare al P.O. e inclinato rispetto al P.V.

Date le tracce del piano α, si ribalta lo stesso piano α sul P.O., determinando (T_2α); si disegna quindi un quadrato giacente sul P.O., i cui vertici saranno (A), (B), (C), (D). Questo quadrato sarà in vera forma e in vera grandezza.

Per ottenere le proiezioni su α del quadrato, per i vertici (A), (B), (C). (D) si fanno passare quattro rette orizzontali (r), (s), (t), (v) e quattro rette perpendicolari al P.O. (l), (m), (n), (p), appartenenti al piano ribaltato sul P.O. Successivamente si riportano le rette sul piano α.

Dall'intersezione delle rette si ottengono i vertici del quadrato in prospetto A'', B'', C'', D'' e in pianta A', B', C', D' (Fig. 95).

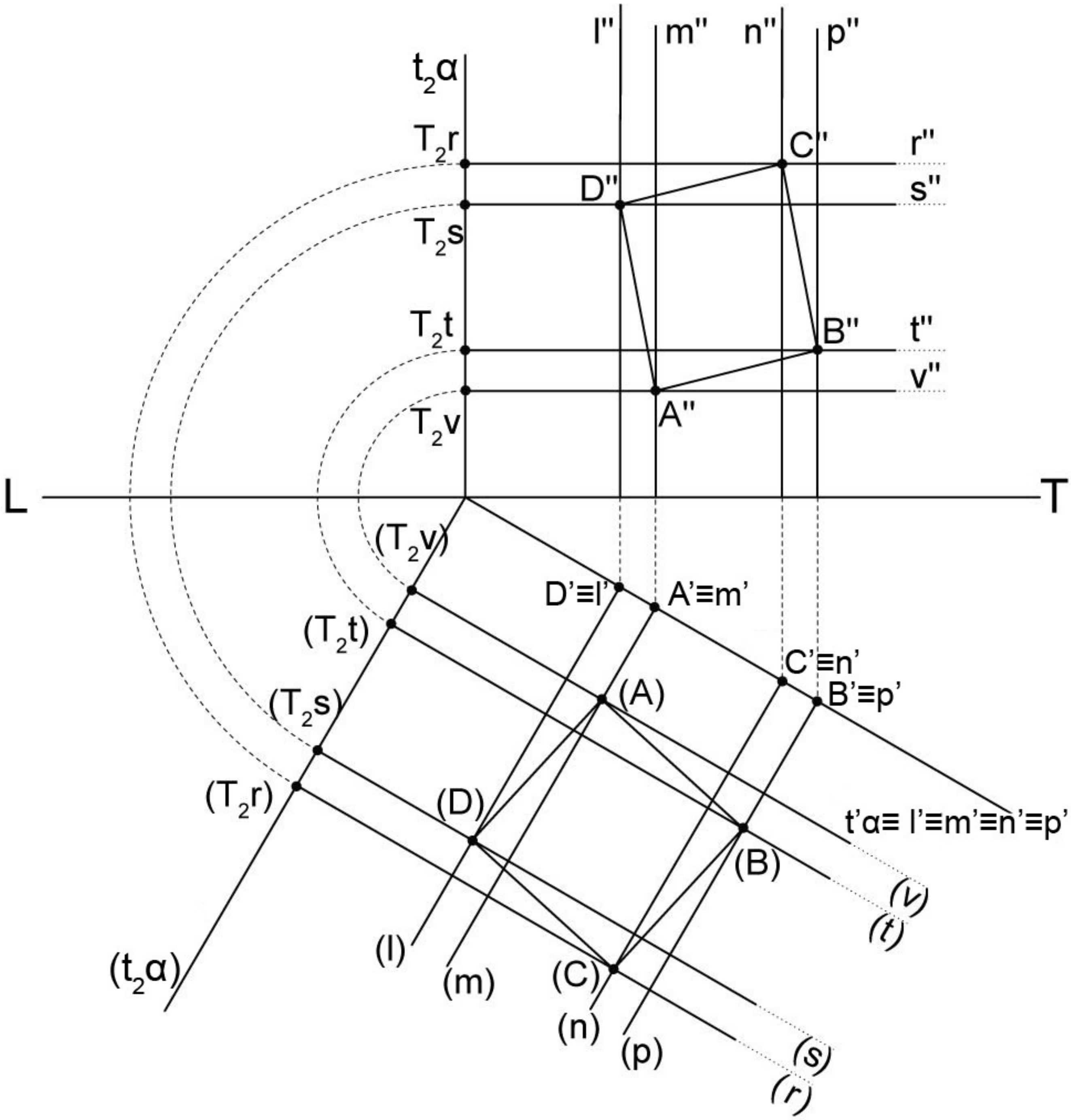


Fig. 95

2.10.2. Proiezione di un quadrato giacente su un piano generico

Date le tracce del piano α, si ribalta il piano stesso sul P.O. mediante un piano ausiliario, determinando $(t_2\alpha)$; si disegna quindi un quadrato in vera froma e grandezza appartenente al piano (α) e quindi giacente sul P.O., i cui vertici saranno (A), (B), (C), (D).

Per i vertici del quadrato (A), (B), (C), (D) si fanno passare le rette (r), (s), (t), (v), tutte appartenenti ad α, e si ricavano le loro proiezioni r', r'', s', s'', t', t''. v', v''.

Successivamente, dai punti (A), (B), (C) e (D) si conducono le normali a $t_1\alpha$ fino a incontrare le rette che contengono i suddetti punti in prima proiezione, ottenendo così A', B'. C'. D'.

Infine si ricavano le proiezioni verticali A'', B'', C'', D'' (Fig. 96).

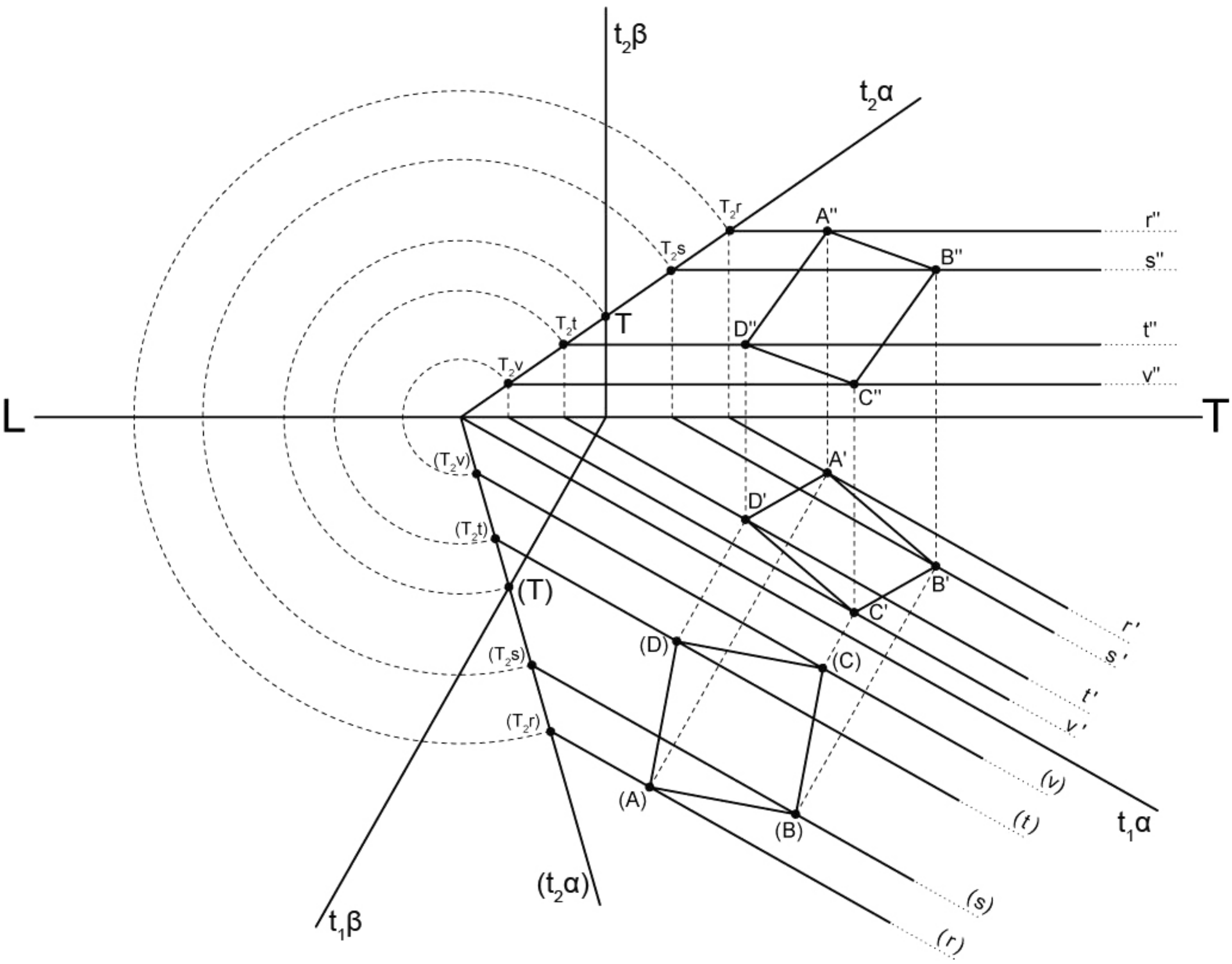


Fig. 96

2.11. Sezione di solidi con piani

Quando un solido viene sezionato con un piano, si determina una figura piana (sezione) comune al solido e al piano stesso.

2.11.1. Piramide a base quadrata sezionata con un piano parallelo al P.O.

Sia data una piramide a base quadrata poggiante sul P.O. e un piano α parallelo al P.O. La sezione che si ottiene è un quadrato. In prima proiezione la sezione si proietta in vera forma e grandezza (1', 2', 3', 4'), mentre in seconda proiezione essa coincide con la traccia del piano secante, limitatamente alla proiezione del solido (1", 2", 3", 4") (Fig. 97).

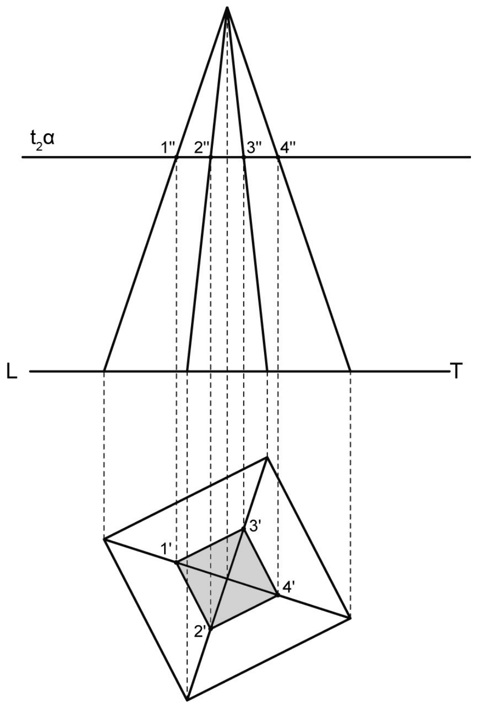


Fig. 97

2.11.2. Piramide a base quadrata sezionata con un piano parallelo al P.V. non passante per l'asse

La sezione che si ottiene è un trapezio. In seconda proiezione la sezione si proietta in vera forma e grandezza (1", 2", 3", 4"), mentre in prima proiezione essa coincide con la traccia del piano secante (1', 2', 3', 4'), limitatamente alla proiezione del solido (Fig. 98).

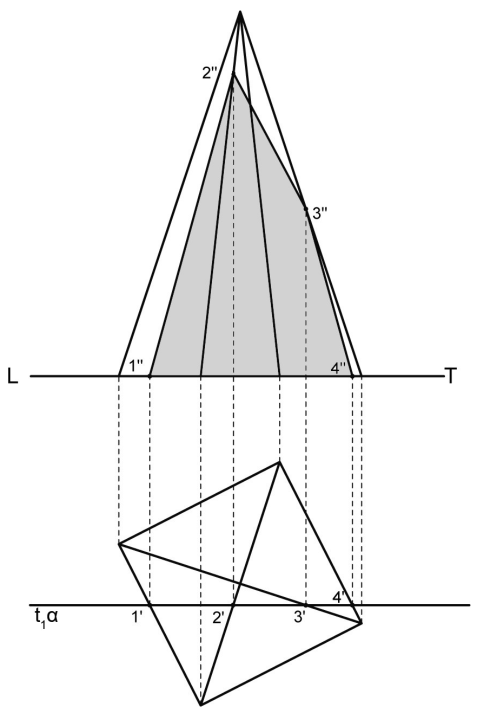


Fig. 98

2.11.3. Parallelepipedo sezionato con un piano parallelo al P.O.

In prima proiezione la sezione coincide con la proiezione del solido (1', 2', 3', 4') mentre in seconda proiezione essa coincide con la traccia del piano α (1", 2", 3", 4"), limitatamente alla proiezione del solido (Fig. 99).

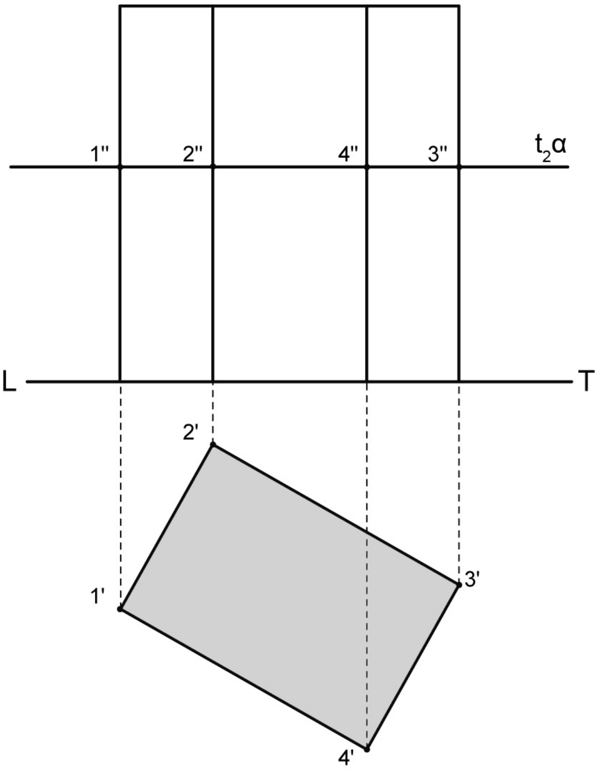


Fig. 99

2.11.4. Sfera sezionata con un piano parallelo al P.V.

La sezione che si ottiene è un cerchio. In prima proiezione essa coincide con la traccia del piano α, limitatamente alla proiezione del solido; dalla prima proiezione si ottiene la seconda, che è in vera forma e grandezza (Fig. 100).

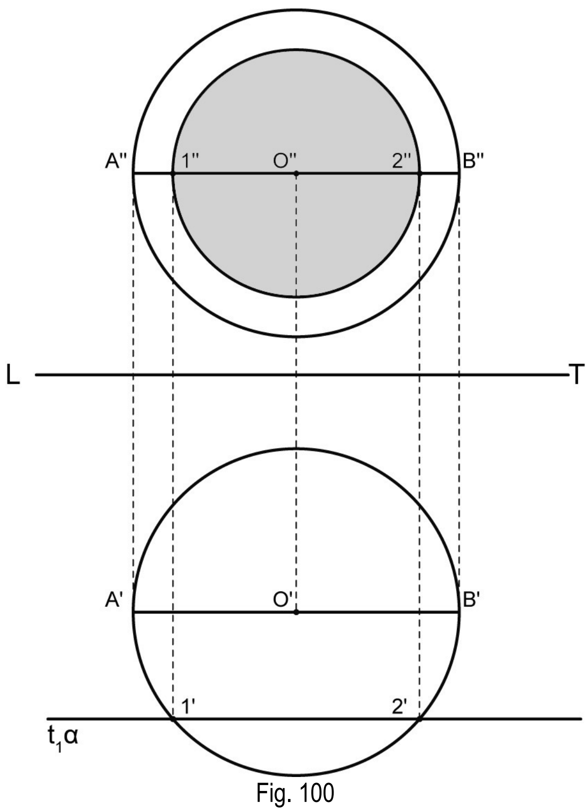


Fig. 100

2.11.5. Parallelepipedo sezionato con un piano perpendicolare al P.O. e inclinato al P.V.

La sezione che si ottiene è un rettangolo. In prima proiezione essa coincide con la traccia del piano α, limitatamente alla proiezione del solido; infatti il piano α è proiettante in prima proiezione. In proiezione verticale la sezione non è in vera forma e grandezza, in quanto il piano α è inclinato rispetto al P.V. In questo caso, per avere la grandezza reale della sezione occorre ribaltare il piano α (che contiene la sezione) su uno dei piani di proiezione. In questo caso, si è scelto di ribaltare α sul P.O. (Fig. 101).

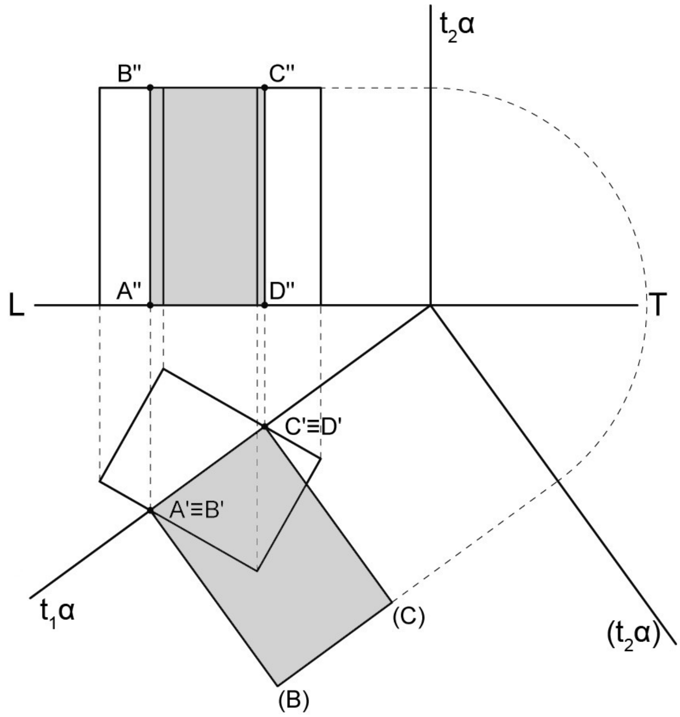


Fig. 101

2.11.6. Sfera sezionata con un piano perpendicolare al P.O. e inclinato al P.V.

La sezione che si ottiene è una circonferenza. In prima proiezione, la sezione coincide con la traccia del piano α, limitatamente alla proiezione della sfera. In seconda proiezione, la circonferenza di sezione si proietta secondo un'ellisse. Per tracciare l'ellisse basta disegnare gli assi. L'asse minore è dato dalla proiezione sul P.V. del segmento 1'-2'; l'asse maggiore è dato dalla proiezione sul P.V. del segmento 3'-4'. Per ottenere la circonferenza occorre, come di consueto, ribaltare il piano α (Fig. 102).

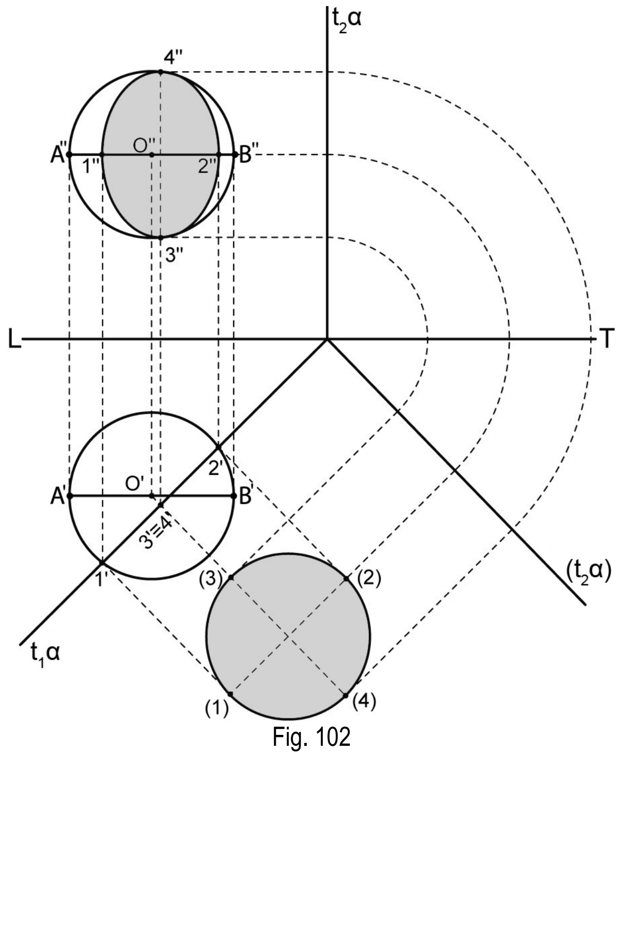


Fig. 102

2.11.7. Piramide sezionata con un piano perpendicolare al P.O. e inclinato al P.V.

La sezione che si ottiene è un triangolo. In prima proiezione la sezione coincide con la traccia orizzontale del piano α, limitatamente alla proiezione del solido. In seconda proiezione, la sezione non è in vera forma e grandezza; per ricavarle, si è scelto di ribaltare il piano α sul P.V. (Fig. 103).

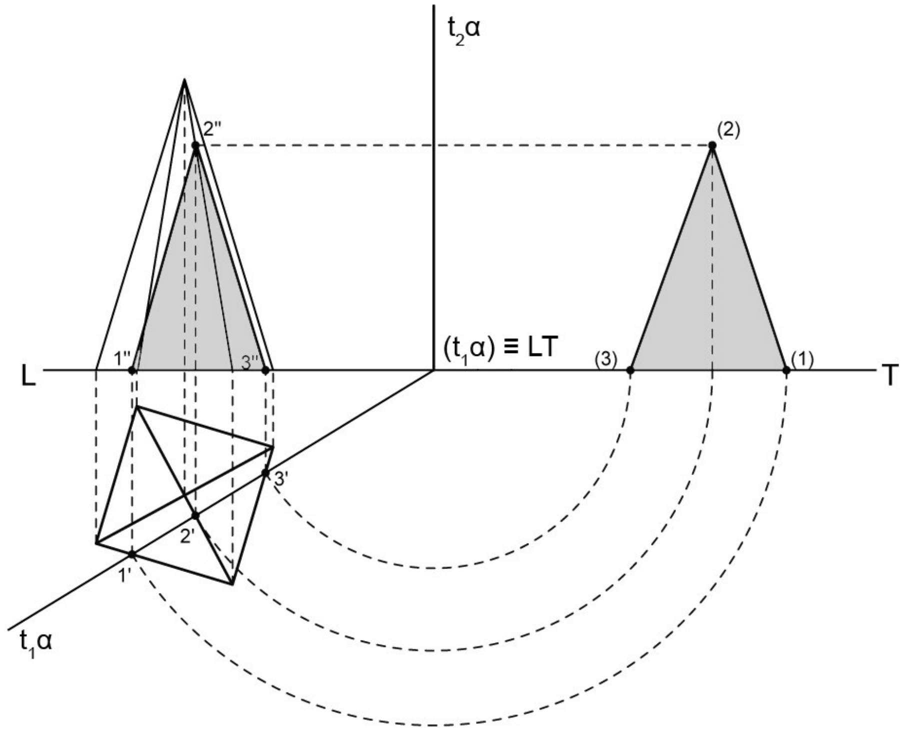


Fig. 103

2.11.8. Cilindro sezionato con un piano perpendicolare al P.V. e inclinato al P.O.

La sezione che si ottiene è un ellisse. In proiezione verticale la sezione coincide con la traccia del piano limitatamente alla proiezione del solido. In proiezione orizzontale la sezione coincide con la proiezione del solido. Per avere la vera forma e grandezza dell'ellisse, si ribalta α sul P. O.; per ottenere l'ellisse basta ribaltare un certo numero di punti significativi della circonferenza di base (in questo caso, otto; maggiore sarà il loro numero, più preciso sarà il disegno) e poi raccordarli (Fig. 104).

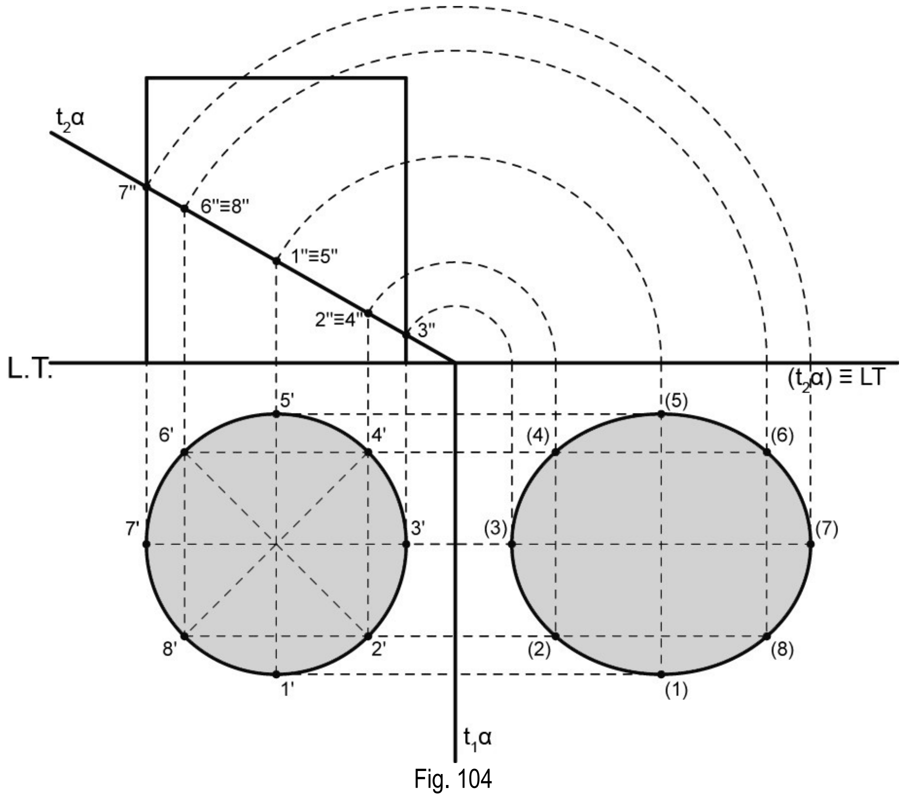


Fig. 104

2.11.9. Piramide sezionata con un piano perpendicolare al P.V. e inclinato al P.O.

La sezione che si ottiene è un quadrilatero. Per ottenere la sua vera forma e grandezza si ribaltano i vertici della sezione. Il ribaltamento è stato effettuato sul P.O. (Fig. 105).

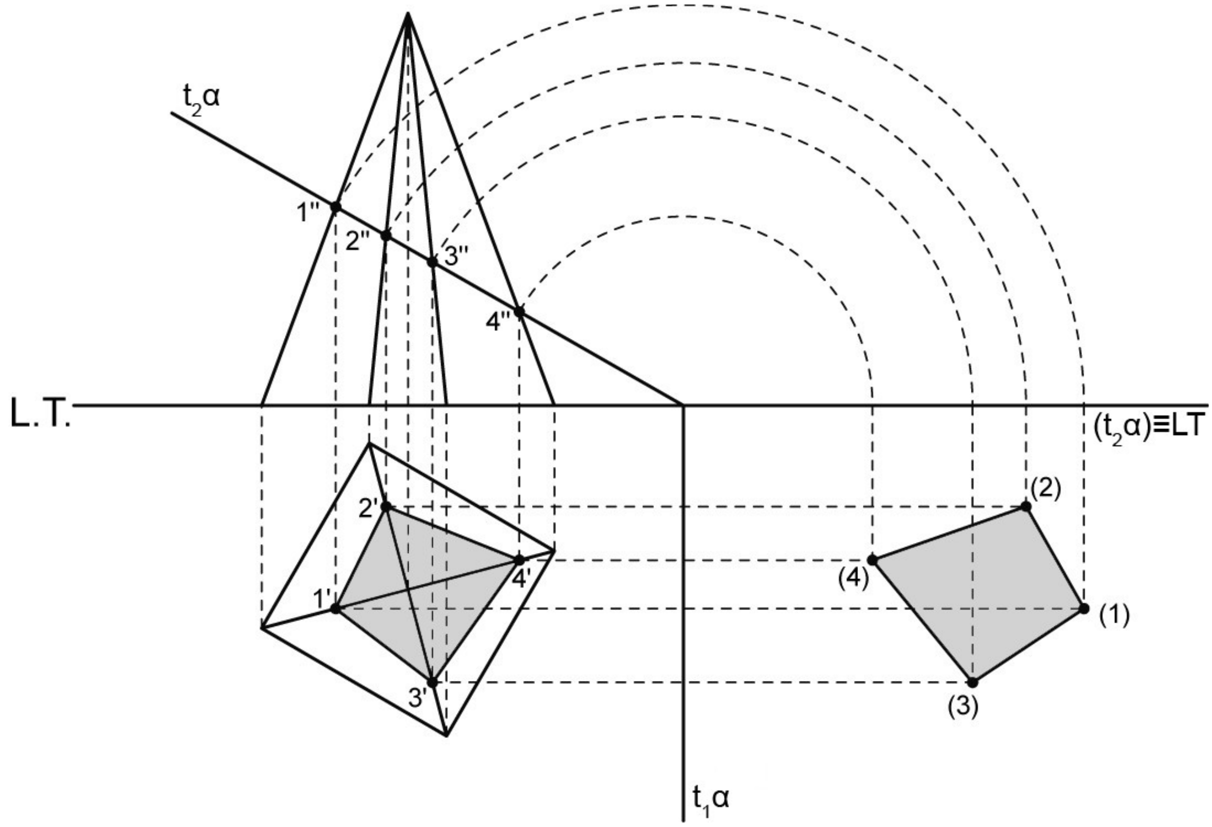


Fig. 105

2.11.10. Parallelepipedo sezionato con un piano perpendicolare al P.V. e inclinato al P.O.

La sezione che si ottiene è un quadrilatero. In proiezione orizzontale la sezione coincide con la proiezione del solido. In proiezione verticale coincide con la traccia di α, limitatamente alla proiezione del solido. Ribaltando il piano α, si ottiene la vera forma e grandezza della sezione. Nell'esempio, il ribaltamento è effettuato sul P.O. (Fig. 106).

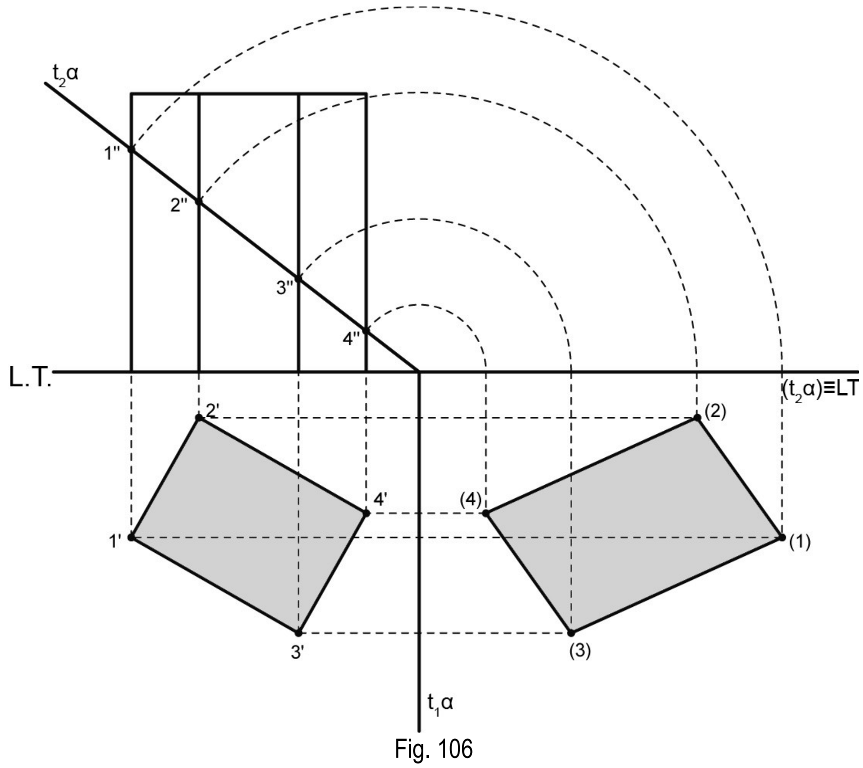


Fig. 106

2.11.11. Parallelepipedo sezionato con un piano generico

Per determinare la sezione di solidi con piani inclinati ai due piani di proiezione occorre disegnare un piano ausiliario perpendicolare al P.O. e con la traccia orizzontale normale alla traccia del piano inclinato secante; proiettare sul piano ausiliario il solido e il piano di sezione determinando così una terza proiezione del solido e una terza traccia del piano che contiene la sezione. Successivamente si ribalta il piano ausiliario sul P.O.; la figura che si ottiene a ribaltamento avvenuto rappresenta il solido sezionato con un piano proiettante, da cui sarà possibile ricavare le proiezioni ortogonali della sezione.

Sia dato un parallelepipedo e un piano α, inclinato ai piani di proiezione. Per determinare la sezione si traccia un piano ausiliario β, perpendicolare al P.O. e con la traccia $t_1\beta$ ortogonale a $t_1\alpha$. Si ribalta β sul P.O., si proietta il parallelepipedo su (β) e si disegna la terza traccia di α (ossia $t_3\alpha$) ribaltando il punto B su ($t_2\beta$) e unendo (B) con A. Tale traccia, incontrando gli spigoli ribaltati del parallelepipedo, determina i vertici della sezione. Con il procedimento inverso al ribaltamento si ottiene la proiezione verticale della sezione. In proiezione orizzontale la sezione coincide con la proiezione del solido (Fig. 107).

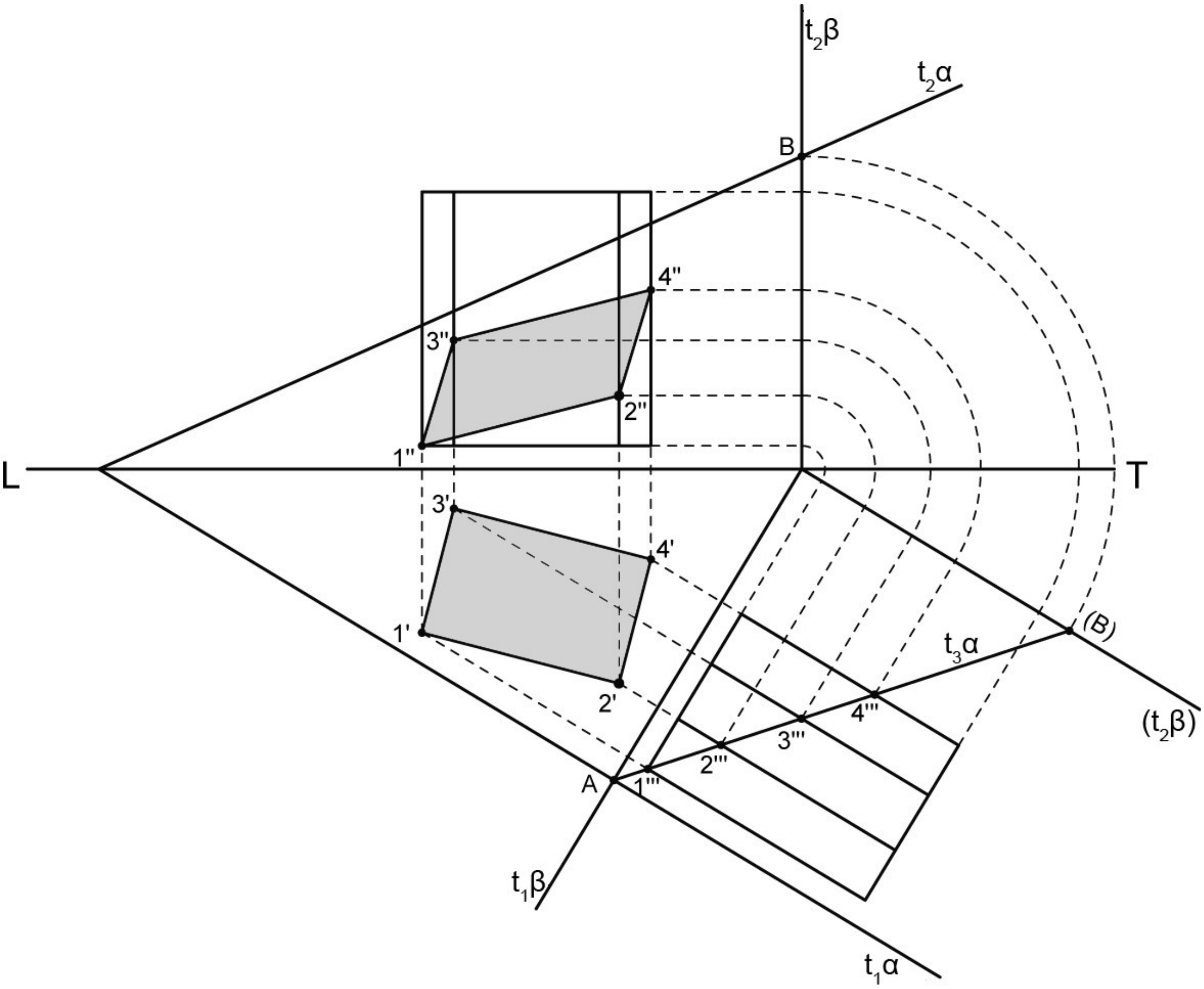


Fig. 107

2.11.12. Piramide a base quadrata sezionata con un piano generico

Si disegna un piano ausiliario β perpendicolare al P.O. con $t_1\beta$ ortogonale a $t_1\alpha$. Si proietta la piramide su (β) e si ricava la traccia di α su β, come mostrato nell'esempio precedente. La traccia $t_3\alpha$, incontrando gli spigoli della piramide ribaltata, determina i vertici della sezione. Con procedimento inverso al ribaltamento si ottengono le proiezioni della sezione (Fig. 108).

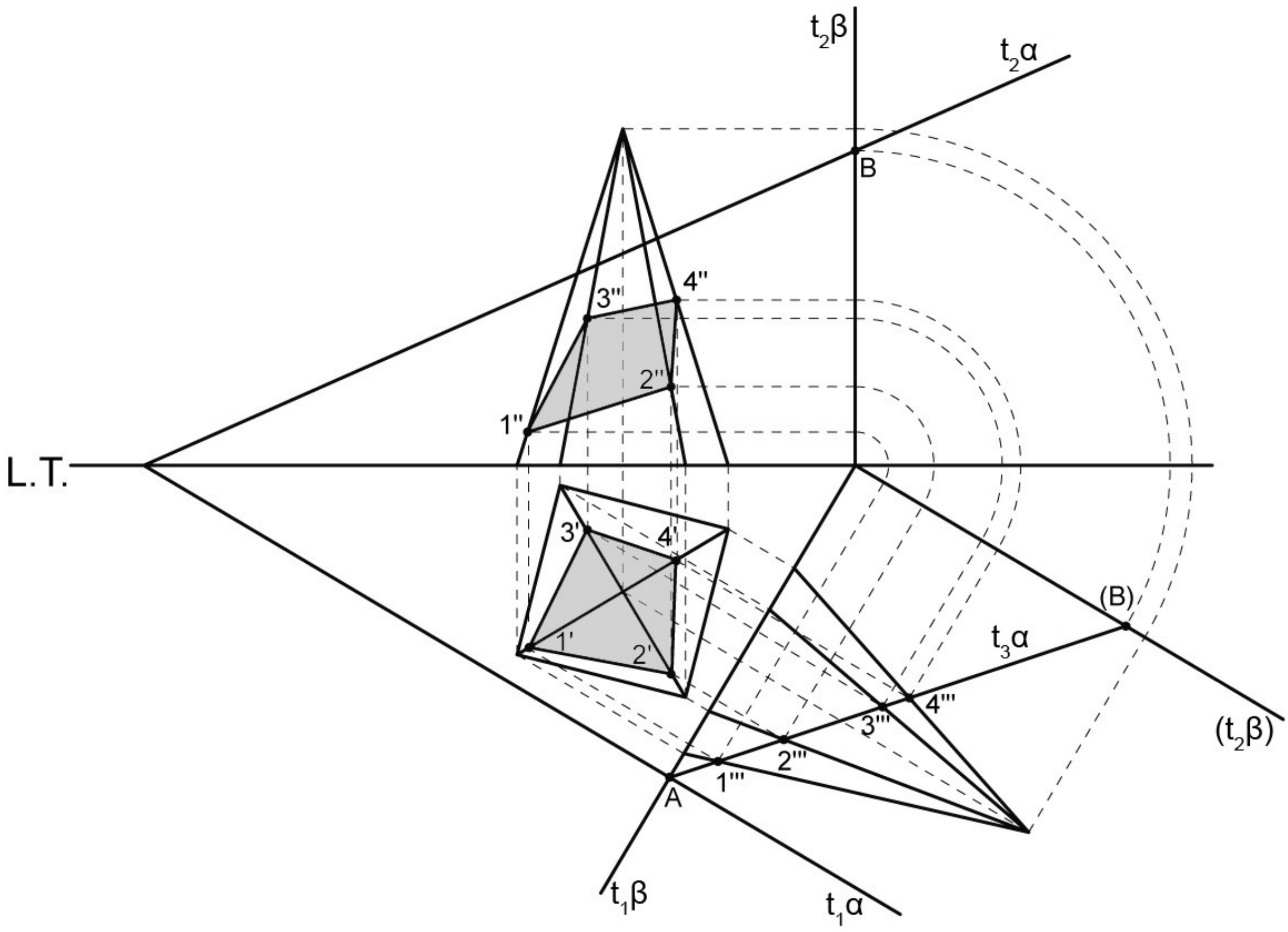


Fig. 108

CAPITOLO 3
L'ASSONOMETRIA

3.1. Condizioni proiettive

Come abbiamo visto nel capitolo 2, il metodo della doppia proiezione ortogonale permette di rappresentare gli oggetti sul piano attraverso due o più immagini, ma non è in grado di produrre una rappresentazione unica che renda l'idea della tridimensionalità.

Per rappresentare sul piano un'unica immagine che dia l'idea della tridimensionalità bisogna ricorrere alle proiezioni assonometriche o alle proiezioni prospettiche. Le prime sono proiezioni *cilindriche* o *parallele*; in esse, come nelle proiezioni ortogonali, il punto di vista (centro di proiezione) è collocato a distanza *infinita*. Le seconde sono proiezioni *coniche* (*centrali)*; in esse il punto di vista è collocato a distanza *finita* (si veda, a questo proposito, il paragrafo 1.4).

Da quanto detto, è evidente che la prospettiva riproduce una condizione spaziale compatibile con l'esperienza umana, mentre l'assonometria (come le proiezioni ortogonali) offre una visualizzazione che non rispetta la visione ottica: non è possibile, nella realtà, andare all'infinito per osservare gli oggetti.

Il metodo della proiezione assonometrica permette di ottenere rappresentazioni *apparentemente tridimensionali* (il foglio è sempre una superficie piana) in cui siano rispettati i rapporti metrici delle figure reali riprodotte.

Nell'assonometria, i raggi proiettanti che fuoriescono dall'ideale punto di vista (ideale perché posto all'infinito) sono sempre paralleli fra di loro; rispetto al piano assonometrico possono assumere due posizioni fondamentali:

- incidenti ortogonalmente al quadro; in questo caso l'assonometria si dirà **ortogonale**.
- incidenti con un angolo diverso da 90°; in questo caso l'assonometria si dirà **obliqua** (Fig. 109).

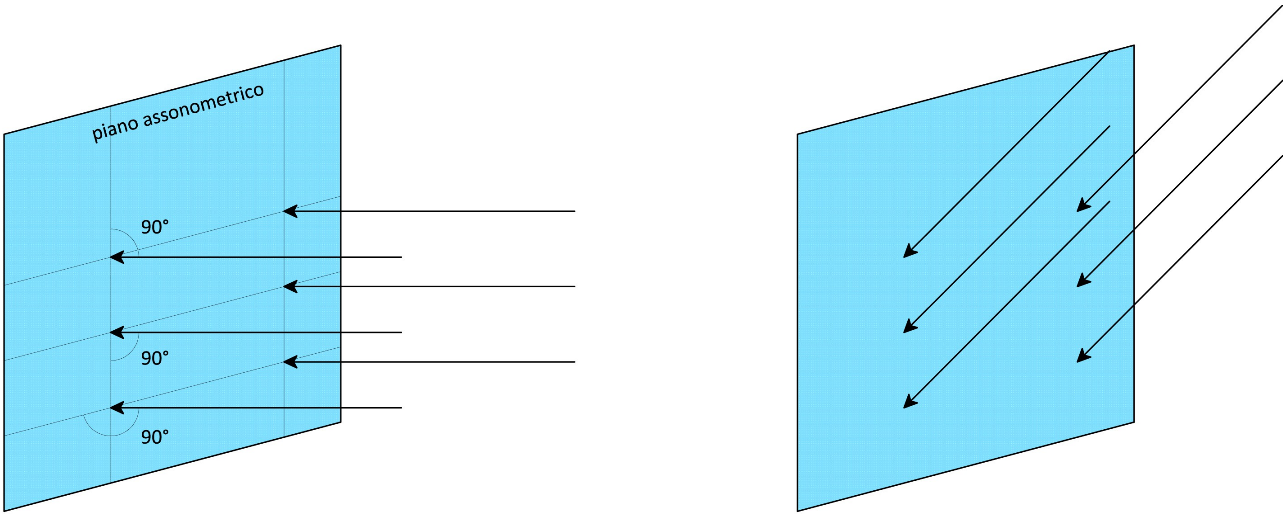


Fig. 109

La terza posizione possibile, ossia raggi proiettanti paralleli al quadro, non è rilevante in quanto non produrrebbe l'intersecazione dei raggi visuali col quadro, indispensabile per poter ottenere un'immagine.

Oltre al quadro, ai raggi visuali e agli oggetti da rappresentare, il metodo delle proiezioni assonometriche introduce un elemento in più rispetto al Metodo di Monge: una terna di piani ortogonali (detti anche “piani di riferimento”), posti nello spazio, a cui l'oggetto da rappresentare viene correlato mediante tre proiezioni ortogonali. Sul piano assonometrico, quindi, vengono proiettate le tracce dei tre piani del triedro: esse formano un *sistema di assi* (Fig. 110). Il sistema di assi costituisce la struttura di riferimento per le dimensioni in lunghezza, larghezza e altezza delle figure da rappresentare.

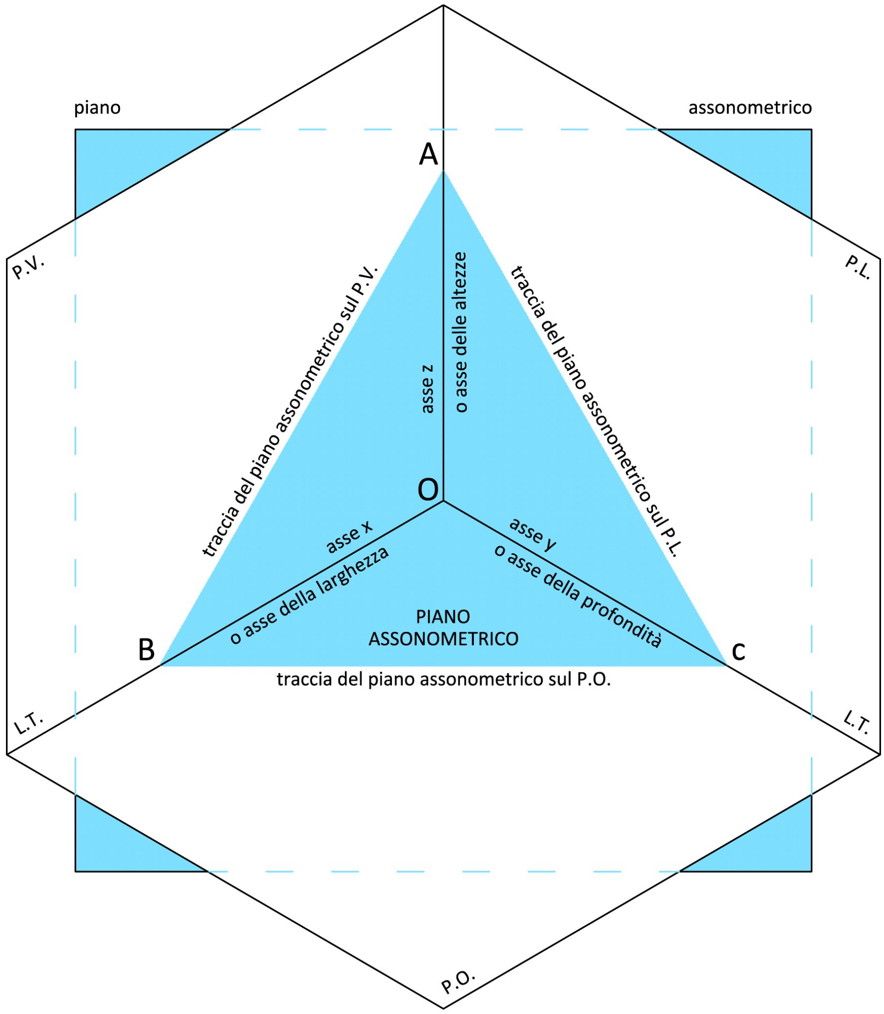


Fig. 110

I tre assi, detti *assi assonometrici*, sono definiti nel seguente modo:

- asse x, corrispondente alla proiezione sul piano assonometrico della traccia del P.V. con il P.O.;
- asse y, corrispondente alla proiezione sul piano assonometrico della traccia del P.L. con il P.O.;
- asse z, corrispondente alla proiezione sul piano assonometrico della traccia del P.V. con il P.L.

I tre piani di riferimento sono indispensabili alla costruzione si un'assonometria. Infatti, analogamente alle proiezioni ortogonali, anche l'assonometria deve garantire una corrispondenza **biunivoca** fra punti nello spazio e punti sul piano di rappresentazione. Per questo motivo, dati l'oggetto da rappresentare, il quadro e il punto di vista, la rappresentazione deve essere definita in modo univoco; e al tempo stesso, data la rappresentazione, deve essere definito univocamente l'oggetto e la sua posizione nello spazio.

Se consideriamo un punto P (Fig. 111), una direzione assonometrica l (essa rappresenta la direzione dei raggi visuali di un ideale osservatore posto all'infinito) e un piano di rappresentazione π, la proiezione del punto risulta definita dall'intersezione del raggio proiettante (passante per P e parallelo a l) col quadro. Fissato il punto P, la sua rappresentazione P' è definita in modo univoco; viceversa, data la rappresentazione P', non è possibile risalire alla posizione del punto P che la ha generata.

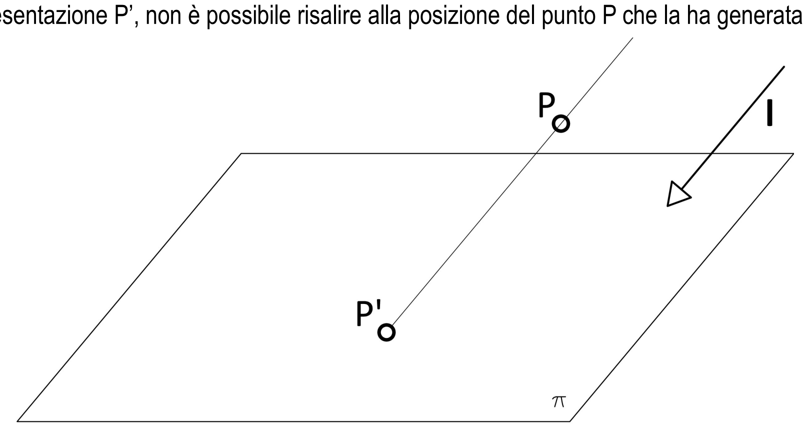


Fig. 111

Occorre quindi inserire un nuovo elemento nella rappresentazione: la terna di piani ortogonali ("piani di riferimento"), posti nello spazio, a cui l'oggetto da rappresentare possa essere correlato mediante tre proiezioni ortogonali.

La rappresentazione assonometrica consiste quindi nel proiettare sul quadro non solo l'oggetto ma anche le sue tre proiezioni ortogonali, una per ciascuno dei piani di riferimento. Ne consegue quindi che un punto P è rappresentato sul quadro mediante quattro diverse immagini (Fig. 112), da cui è possibile risalire alla posizione esatta del punto stesso nello spazio. Naturalmente, sul quadro occorre proiettare anche la terna cartesiana costituita dagli assi x, y e z. Si otterrà una terna di rette uscenti dal punto O' (immagine del punto O), origine degli assi cartesiani.

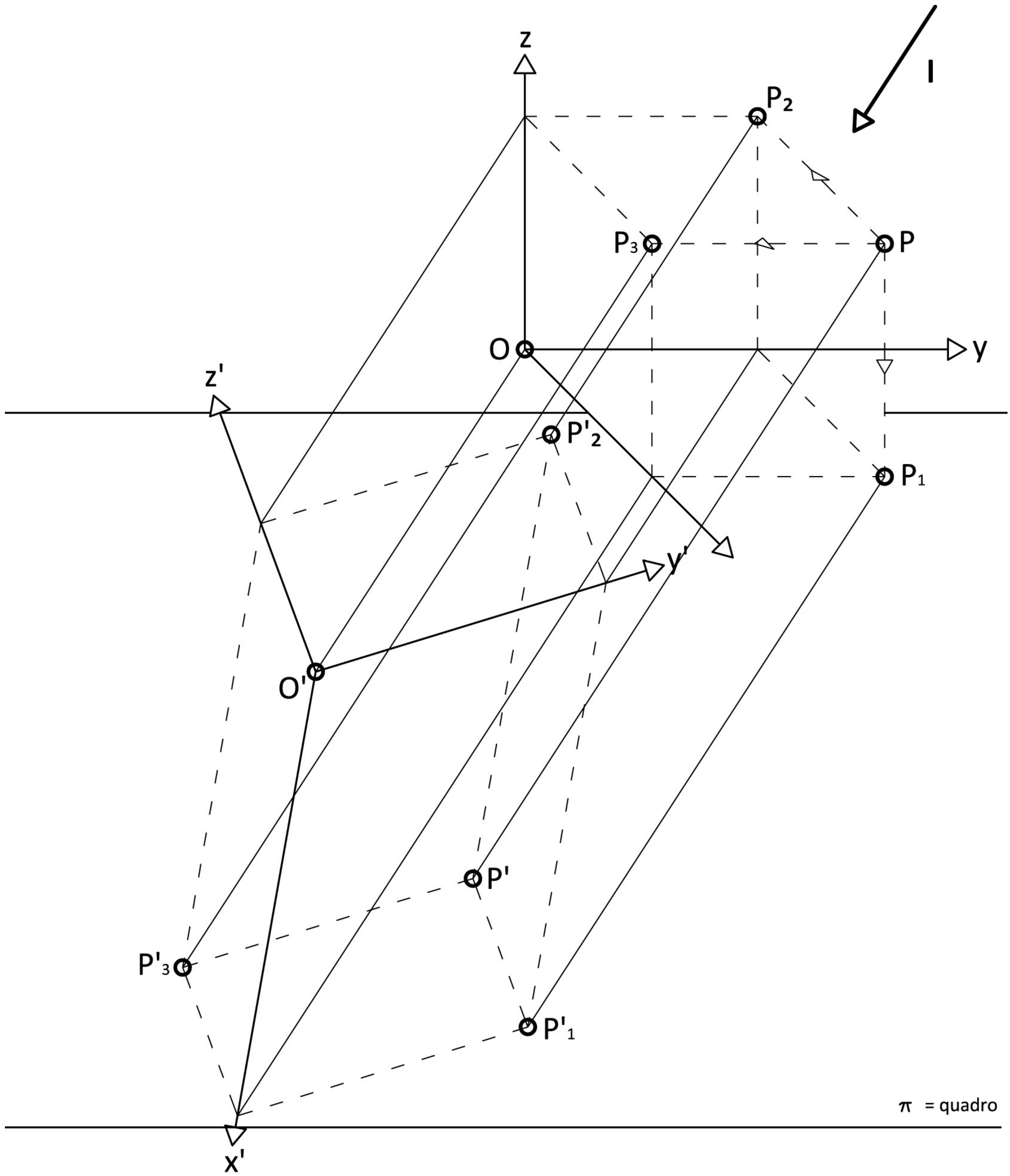


Fig. 112

È evidente che variando la direzione assonometrica rispetto al quadro o al variare della posizione della terna di assi cartesiani nello spazio, si ottengono sul piano diverse terne di rette; è evidente inoltre che gli angoli retti della terna subiscono una deformazione nella proiezione sul piano.

Allo stesso modo, un segmento che costituisce l'unità di misura disposto su uno degli assi cartesiani e proiettato sul piano dà luogo a un segmento di dimensione ridotta (a meno che esso non sia disposto parallelamente rispetto al quadro).

La terna di assi assonometrici può disporsi nello spazio in modo da proiettarsi sul piano assonometrico in infiniti modi. Tali modi possono ricondursi a tre categorie fondamentali:

- **monometrica** (detta anche **isometrica)**: il piano assonometrico interseca il triedro in modo che la proiezione dei tre assi formi tre angoli uguali (pari a 120° ciascuno - Fig. 113);

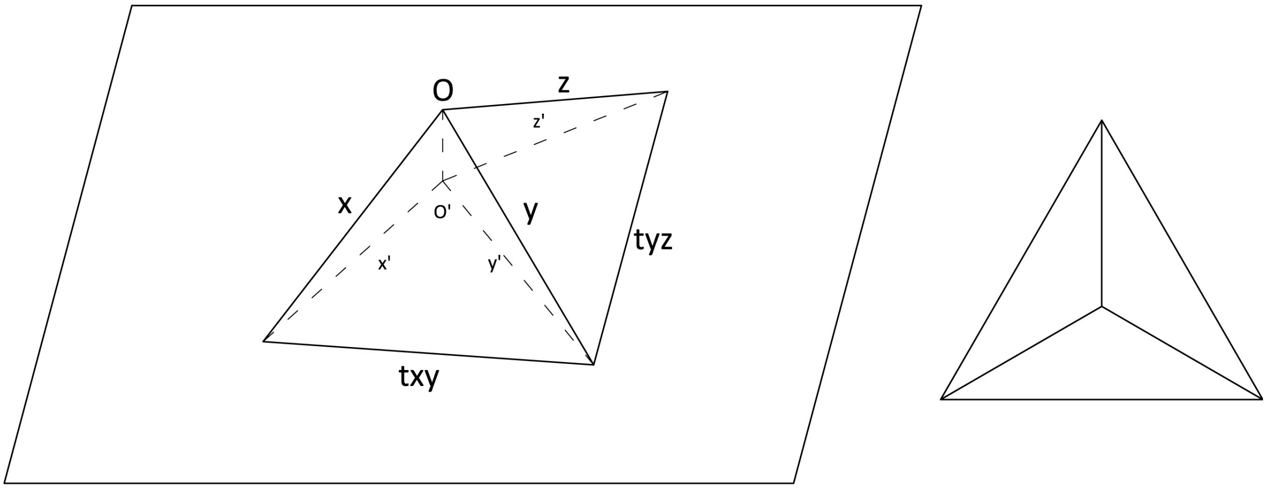


Fig. 113

- **dimetrica**: il piano assonometrico interseca il triedro in modo che la proiezione dei tre assi formi due angoli uguali e uno diverso (Fig. 114);

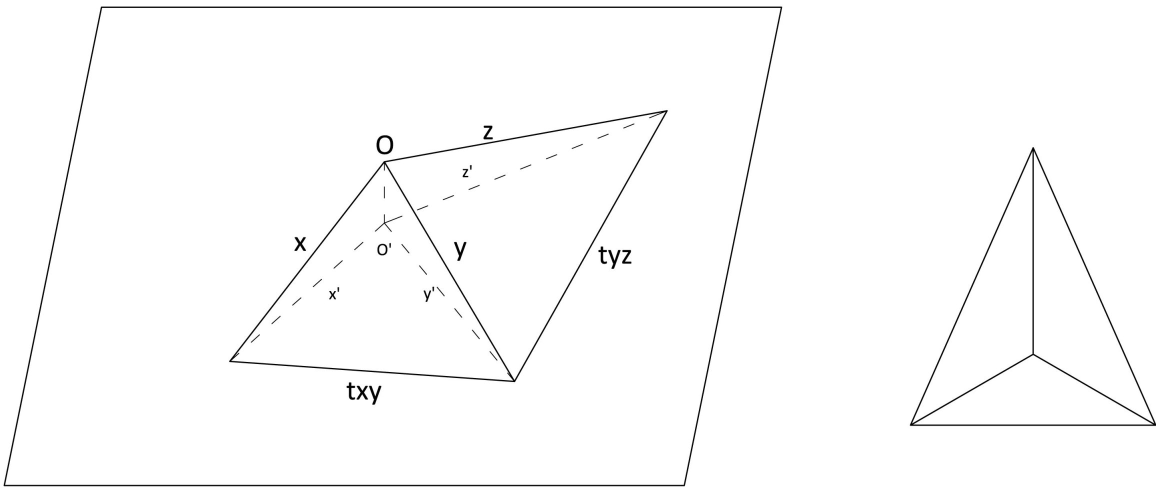


Fig. 114

- **trimetrica**: il piano assonometrico interseca il triedro in modo che la proiezione dei tre assi formi tre angoli diversi (Fig. 115).

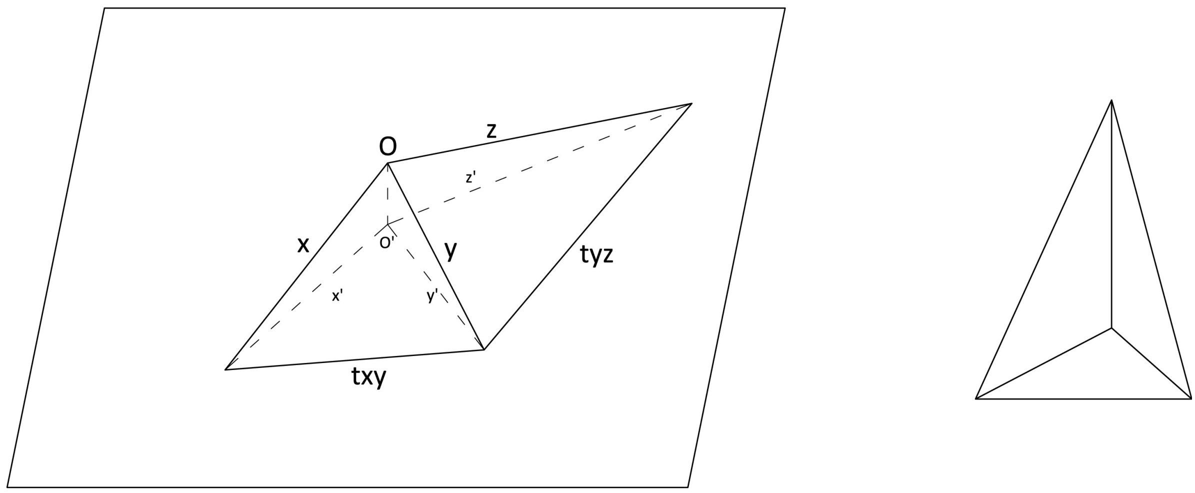


Fig. 115

Abbiamo quindi introdotto i due elementi fondamentali che ci permetteranno di identificare le assonometrie:

- la direzione dei raggi visuali rispetto al quadro (che le differenzia in **ortogonali** e **oblique**);

- gli angoli che la proiezione del triedro forma rispetto al quadro (che le differenzia in **monometriche (isometriche)**, **dimetriche** e **trimetriche** - Fig. 116).

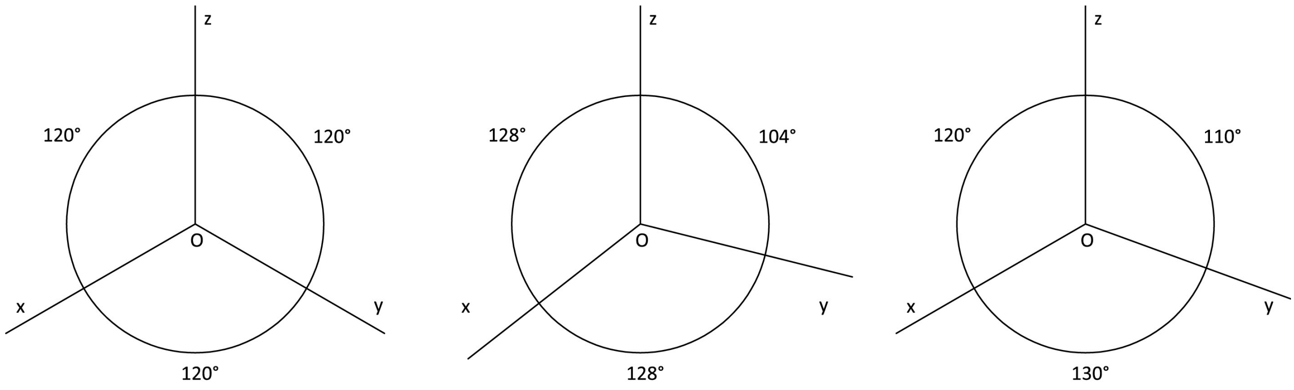


Fig. 116

Ribadiamo, a scanso di equivoci, che gli aggettivi "monometrico" e "isometrico" sono sinonimi. M*onos* in greco vuol dire unico, quindi monometrico significa: *misura unica. Isos* in greco vuol dire uguale, quindi isometrico significa: *misura uguale*.

3.2. L'assonometria ortogonale

In questo tipo di assonometria, come abbiamo visto, i raggi visuali sono ortogonali rispetto al quadro. La posizione della terna cartesiana può variare nello spazio, purché non si verifichi la condizione che uno degli assi sia perpendicolare al quadro; in tal caso, infatti, si verificherebbero le stesse condizioni proiettive delle proiezioni ortogonali (Fig. 117).

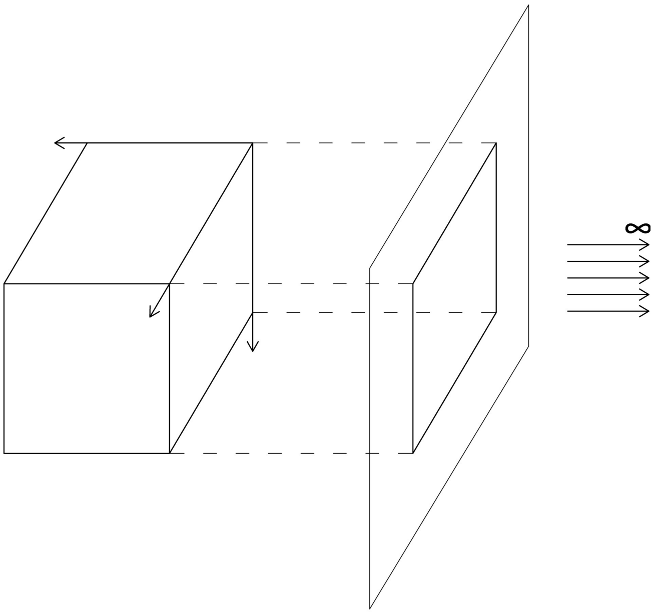


Fig. 117

Nell'assonometria ortogonale, quindi, le misure reali degli oggetti da rappresentare, così come i valori metrici staccati sugli assi, subiscono sempre una riduzione, variabile a seconda dell'inclinazione degli assi stessi rispetto al quadro (Fig, 118).

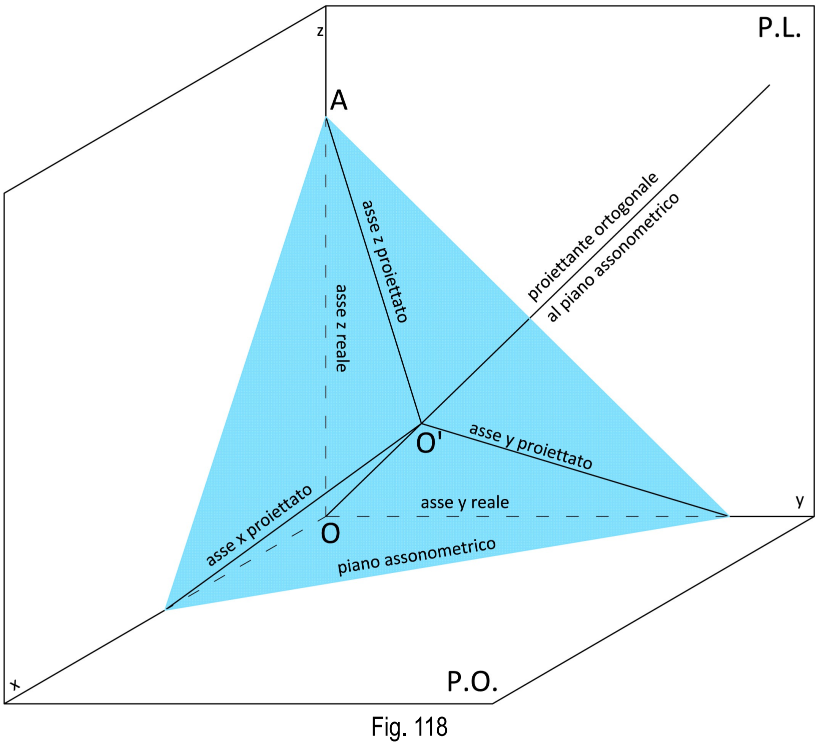


Fig. 118

Da ciò è evidente che nell'assonometria ortogonale **le figure oggettive si proiettano sempre con immagini scorciate**, a meno che esse non giacciano su un piano parallelo al piano assonometrico.

Quindi nell'assonometria ortogonale occorre definire i rapporti di riduzione subiti dalla proiezione degli assi, e l'applicazione degli stessi rapporti di riduzione a tutti gli elementi della figura da costruire sul piano assonometrico.

Per realizzare un'assonometria ortogonale, dati i coefficienti angolari degli assi, occorre:

1. Calcolare i rapporti di riduzione degli assi assonometrici proiettati sul quadro;
2. Costruire il disegno applicando alle dimensioni dell'oggetto i relativi rapporti di riduzione.

3.2.1. Calcolo del rapporto di riduzione degli assi assonometrici.

Il rapporto si può ricondurre a un numero, corrispondente al rapporto fra la dimensione oggettiva di un segmento di valore unitario preso sull'asse e la dimensione ridotta del medesimo segmento proiettato sul quadro. Se l'assonometria è monometrica (isometrica), il rapporto di riduzione sarà unico per i tre assi; i rapporti di riduzione saranno due se l'assonometria è dimetrica, tre se l'assonometria è trimetrica.

Il calcolo grafico del rapporto di riduzione si effettua mediante due passaggi:

1. determinazione della intersecazione del piano assonometrico (o quadro, coincidente col foglio da disegno) con il triedro;
2. ritrovamento del rapporto di riduzione.

Determinazione della intersecazione del piano assonometrico con il triedro.

a. Si tracciano gli assi X, Y e Z. Di norma l'asse Z si dispone verticalmente. Gli angoli fra gli assi possono essere fissati in modo arbitrario. Stabiliamo un angolo di 130° fra gli assi XY e 120° fra gli assi XZ; ne consegue che fra gli assi YZ l'angolo sarà di 110° (la somma dovrà essere di 360°). Da quanto detto in precedenza, l'assonometria sarà **trimetrica** (Fig. 119);

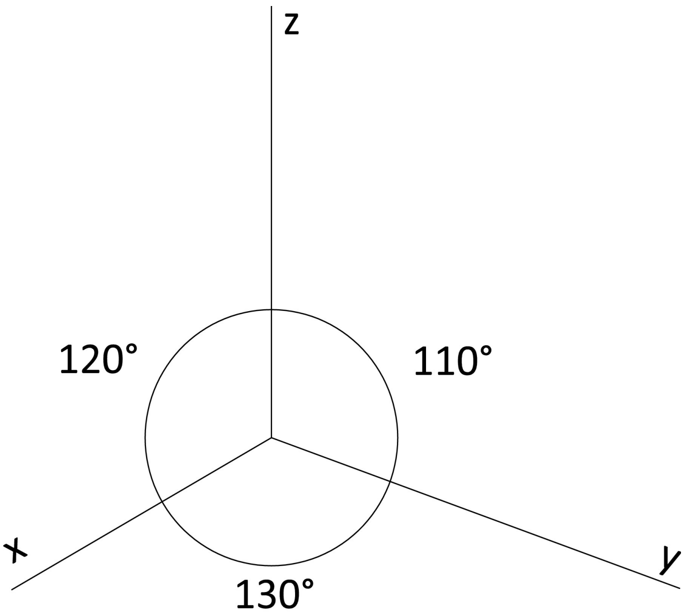


Fig. 119

b. Si prolunga l'asse Y oltre O[1] e si traccia una perpendicolare all'asse Y; essa intersecherà gli assi Z e X nei punti A e B (Fig. 120);

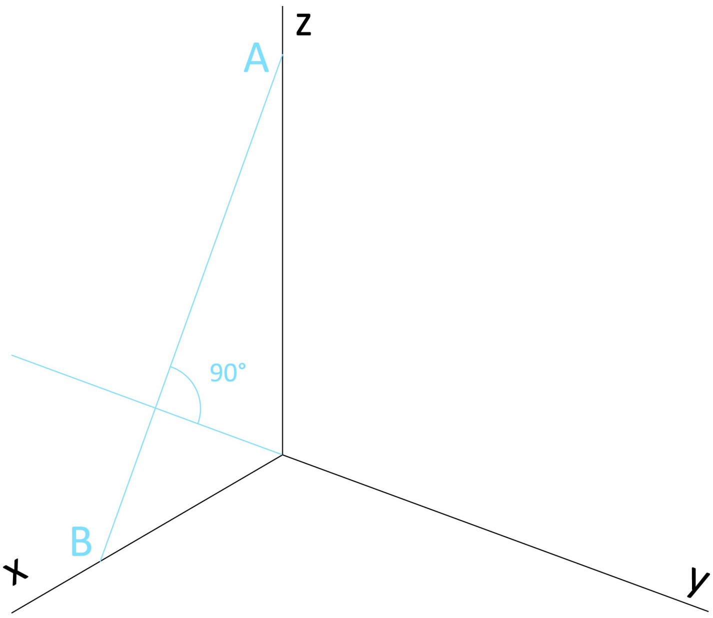


Fig. 120

c. Si prolunga l'asse X oltre O[1] e si traccia una perpendicolare all'asse X uscente da A; essa intersecherà l'asse Y nel punto C (Fig. 121);

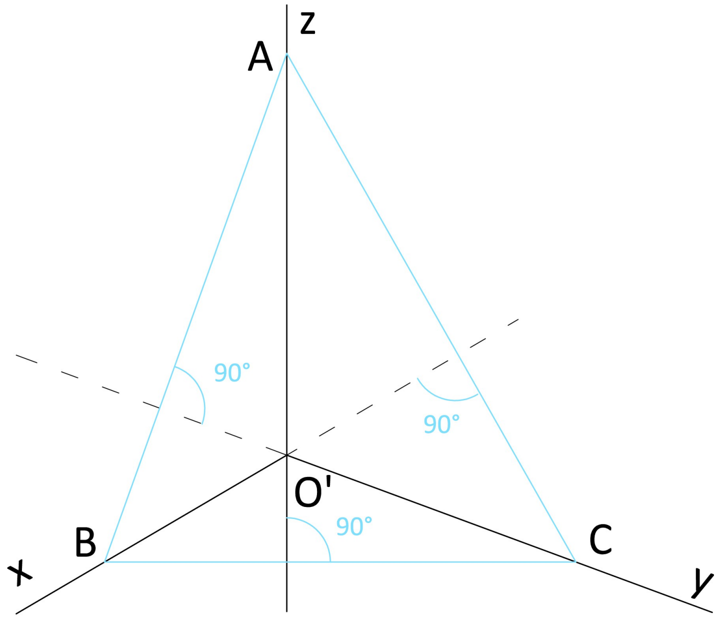


Fig. 121

d. Si unisce B con C e, volendo, si verifica se il prolungamento del segmento AO[1] è perpendicolare a BC.

Abbiamo così costruito la proiezione sul piano assonometrico dei tre assi e le tracce di intersecazione del piano assonometrico con i piani del triedro rispetto agli angoli fissati (130°, 120°, 110°).

Ritrovamento del rapporto di riduzione

a. Consideriamo il triangolo A O[1]B. Esso appare, nel disegno sul piano, ottuso in O[1]; in realtà, nello spazio tridimensionale, è un triangolo rettangolo. Dalla geometria elementare, sappiamo che un angolo inscritto in una semicirconferenza è retto. Quindi se individuiamo il punto medio di AB e tracciamo una semicirconferenza di diametro AB, qualunque angolo inscritto in essa sarà retto (Fig. 122).

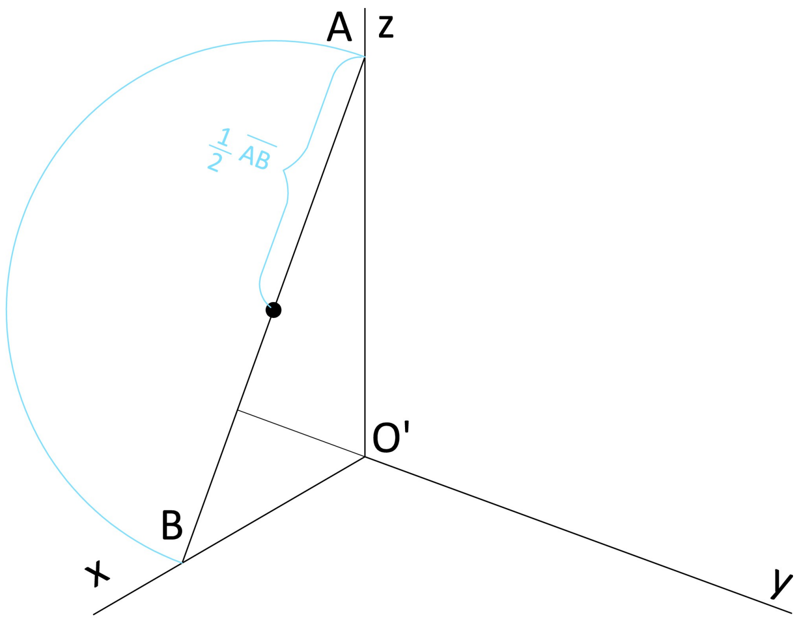


Fig. 122

b. Tracciamo l'altezza del triangolo A O^1B relativa all'ipotenusa AB. Essa è definita dal segmento O^1H (Fig. 123).

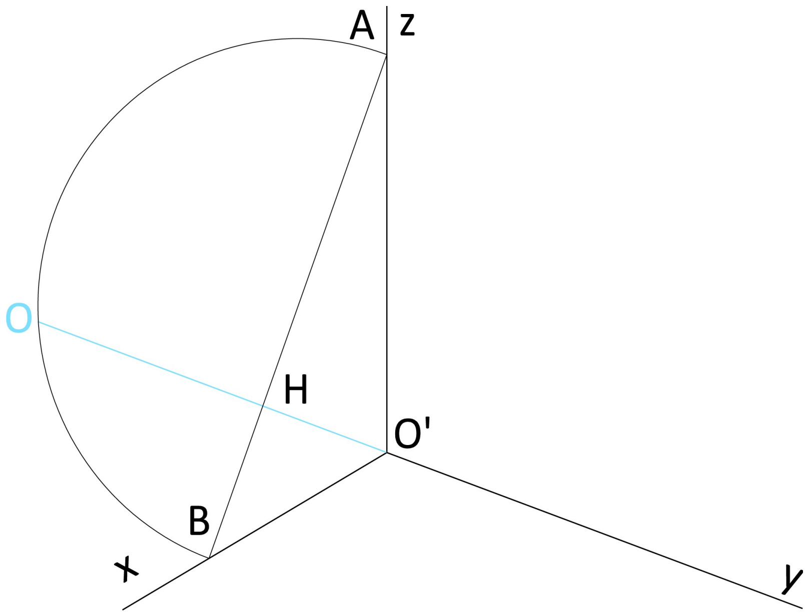


Fig. 123

c. Innalzando da H una perpendicolare ad AB, fissiamo sulla circonferenza il punto O e tracciamo il triangolo AOB. retto in O (Fig. 124).

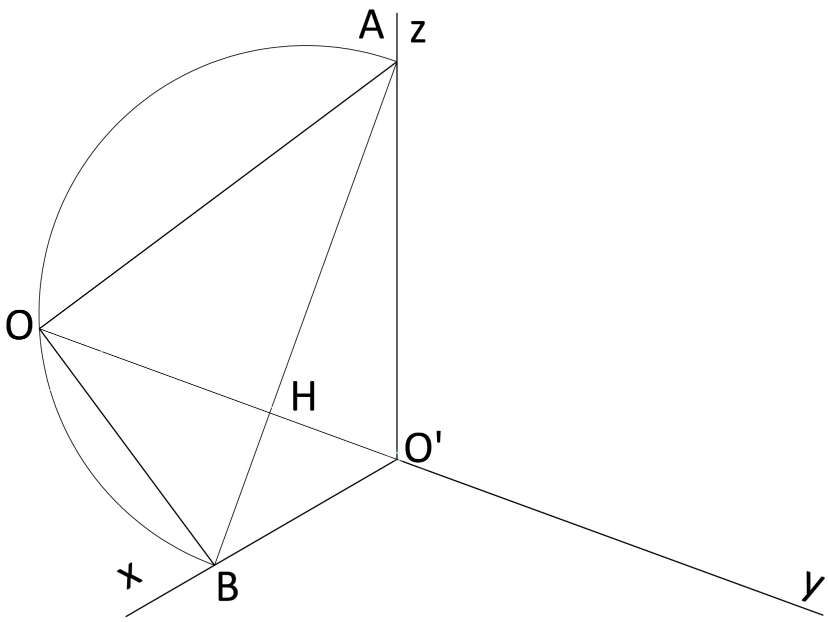


Fig. 124

Il triangolo AOB non è altro che il ribaltamento (immagine in vera forma e vera grandezza) del triangolo rettangolo A O^1B che, invece, appare deformato per effetto dello scorcio assonometrico. In altre parole, abbiamo effettuato il ribaltamento del triangolo A O^1B sul piano assonometrico, determinandone la vera forma. La dimensione reale del cateto BO^1 sarà quindi pari a BO; la dimensione reale del cateto A O^1 sarà pari ad AO.

d. A questo punto possiamo ritrovare il rapporto di riduzione sugli assi X e Z. Il teorema di Talete dimostra che "se un fascio di rette parallele è tagliato da due trasversali, i segmenti sull'una sono proporzionali ai corrispondenti segmenti determinati sull'altra trasversale".

Consideriamo come trasversali i cateti OA e O^1A; fissiamo quindi su OA, cateto in dimensione reale, un segmento di valore unitario OD (p. es. 1 cm). Tracciamo una parallela ad OO^1 passante per D, e all'intersecazione con l'asse Z fissiamo il punto E. Il segmento O^1E rappresenta l'unità di misura ridotta per effetto della proiezione assonometrica. Esso è pari a cm 0,927. Il coefficiente di riduzione assonometrica sull'asse Z è quindi 0,927; per questo valore devono essere moltiplicate le misure di tutti gli elementi paralleli all'asse Z (altezze) prima di riportarle nel disegno (Fig. 125).

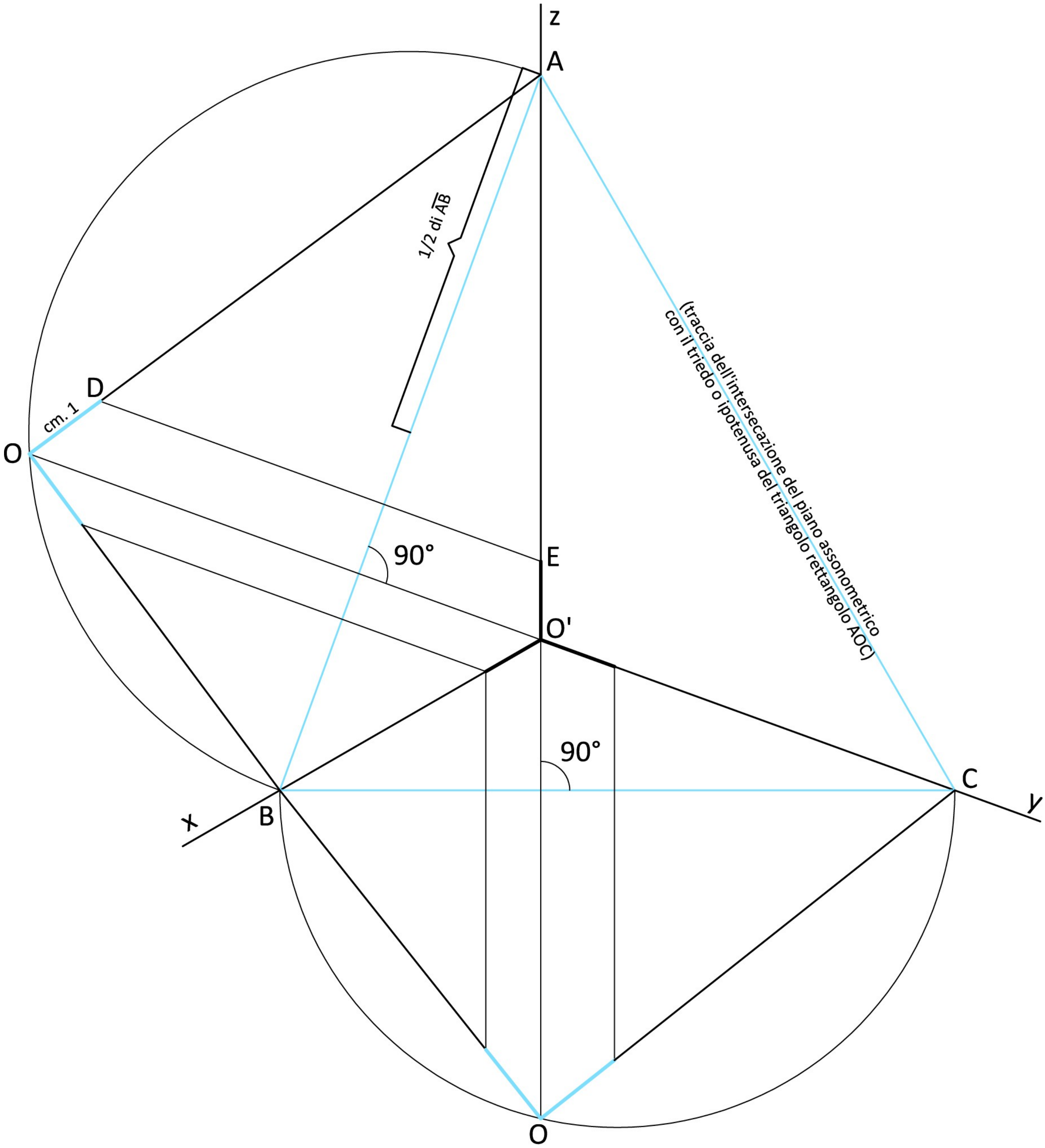


Fig. 125

e. Con procedimento analogo si determinano i coefficienti i riduzione assonometrica sugli assi X e Y.

3.2.2. Costruzione di assonometrie ortogonali

La costruzione di assonometrie ortogonali può avvenire secondo due procedimenti: il metodo diretto e il metodo indiretto. Il primo è più immediato; il suo uso risulta conveniente quando la figura da disegnare è semplice. Il secondo metodo si utilizza quando la figura da disegnare è più complessa, e quindi conviene realizzare un primo disegno per calcolare i coefficienti di riduzione, e un secondo disegno contenente la figura in proiezione assonometrica.

3.2.3. Assonometria ortogonale di un parallelepipedo col metodo diretto

Dopo avere impostato il sistema di assi assonometrici (in questo esempio, gli angoli sono di 140°, 106°, 114°), si procede come segue:

1. Si ruotano due triangoli del triedro trirettangolo, seguendo il procedimento spiegato nelle figure 120-124;
2. Sui cateti ruotati si riportano le dimensioni reali degli spigoli del parallelepipedo;
3. Dai cateti ruotati si riportano le stesse dimensioni sui cateti scorciati;
4. Si completa la figura proiettando gli spigoli del parallelepipedo parallelamente agli assi assonometrici (Fig. 126).

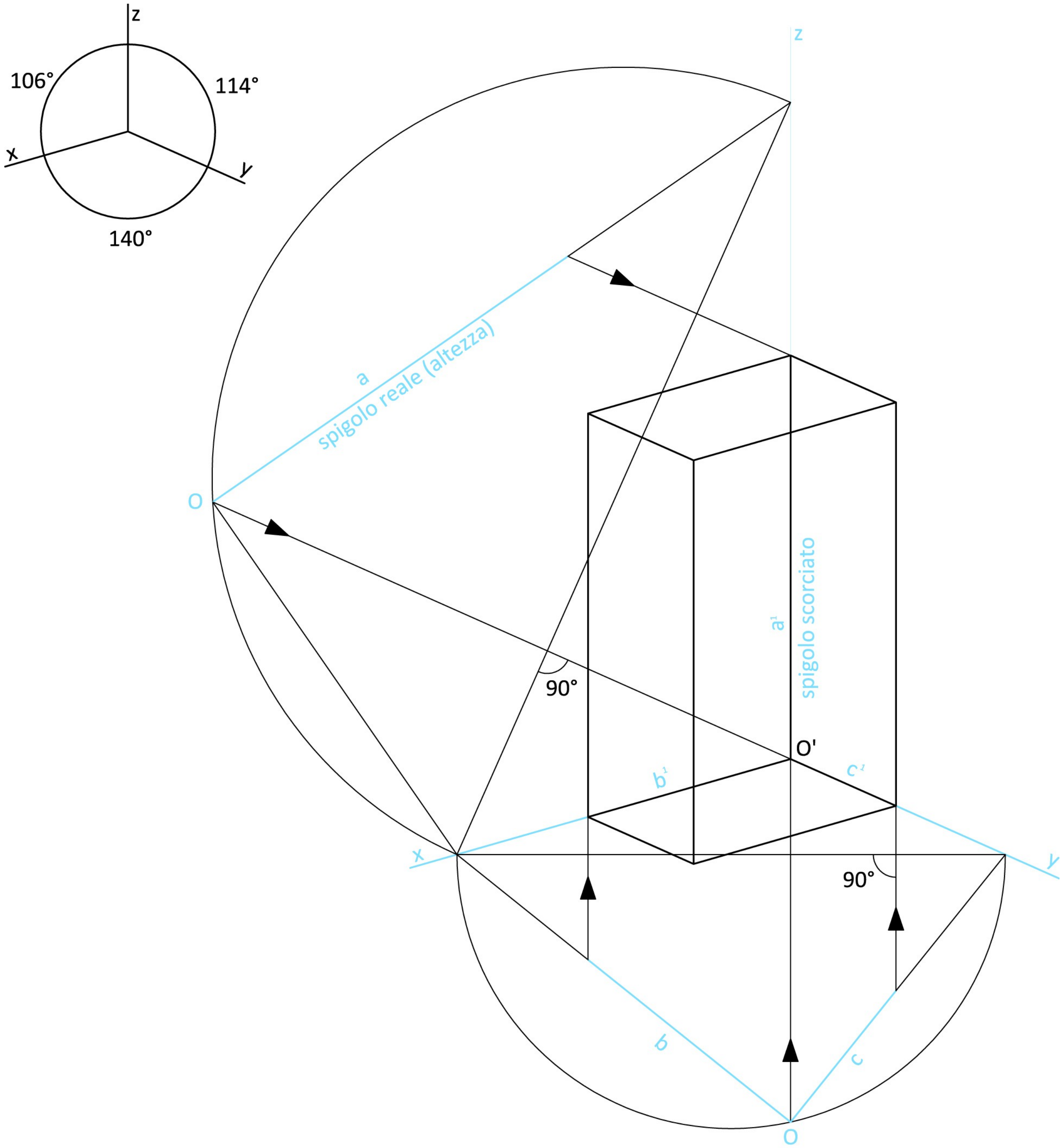


Fig. 126

3.2.4. Assonometria ortogonale di un parallelepipedo col metodo indiretto

Dopo avere impostato il sistema di assi assonometrici (anche in questo caso, gli angoli sono pari a 140°, 106°, 114°), si procede come segue:

1. Si trova il coefficiente di riduzione assonometrica sui tre assi, secondo le modalità spiegate nelle figure 120-125; in questo caso, si otterrà che i coefficienti sono di 0,811 per l'asse X, 0,695 per l'asse Y, 0,927 per l'asse Z (Fig. 127);

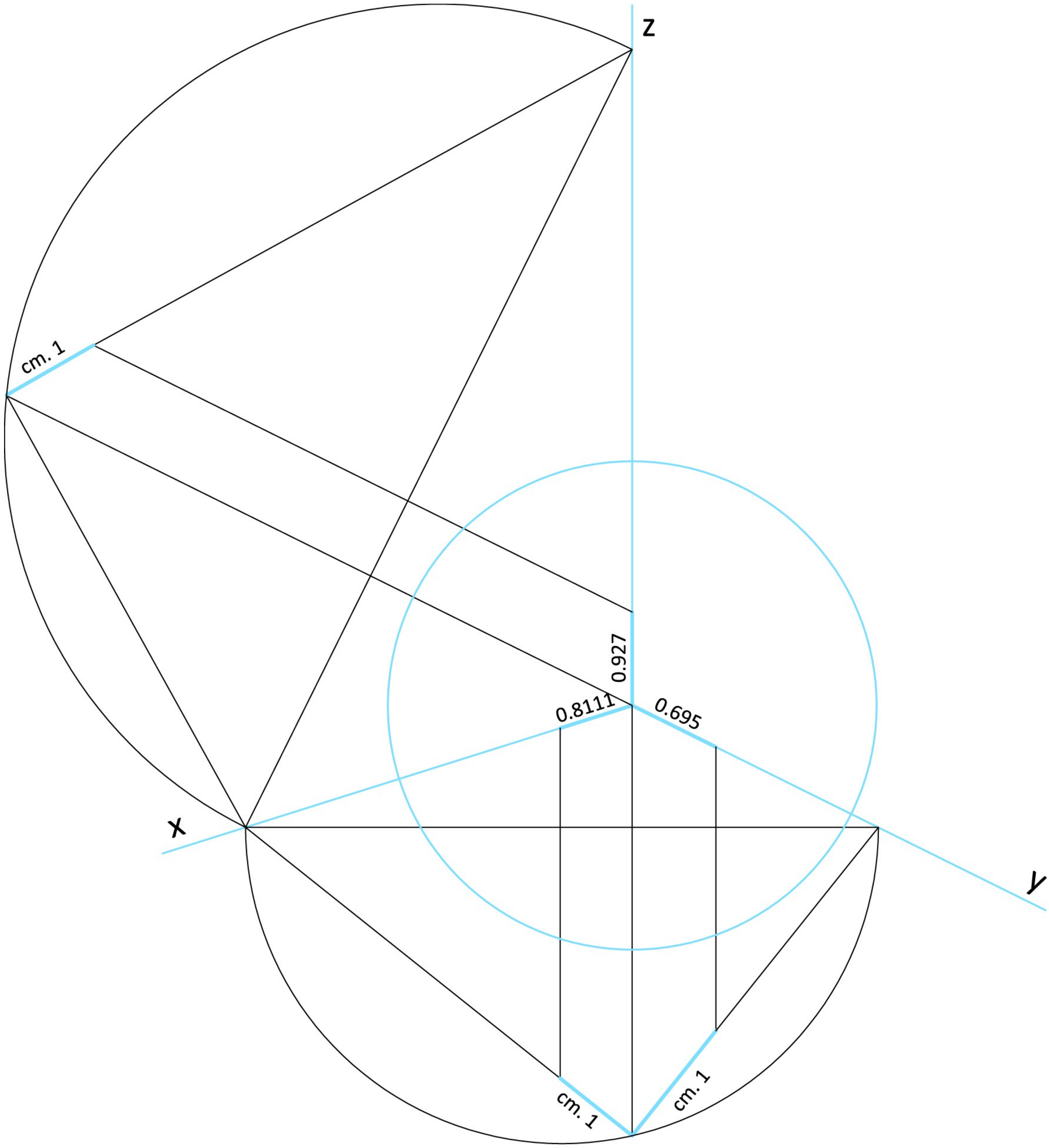


Fig. 127

2. Si imposta un nuovo sistema di assi assonometrici (con i medesimi coefficienti angolari), per poter costruire su di esso il disegno;

3. Si riportano sugli assi assonometrici gli spigoli del parallelepipedo con le misure ridotte secondo i coefficienti individuanti al punto precedente e si completa la figura proiettando gli spigoli del parallelepipedo parallelamente agli assi assonometrici (Fig. 128).

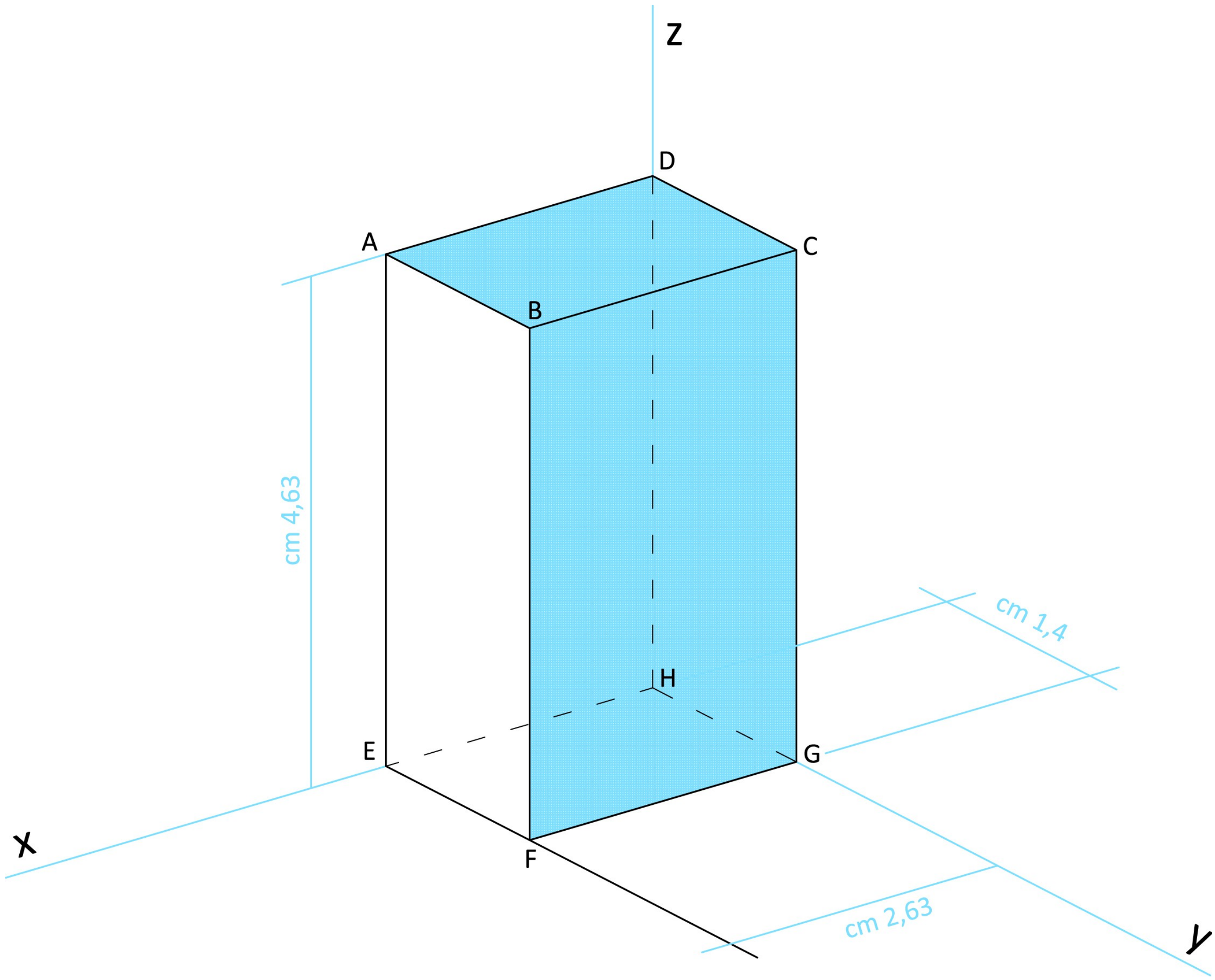


Fig. 128

Da quanto abbiamo visto, non è possibile ottenere un'assonometria ortogonale con piano assonometrico parallelo a uno dei tre piani del triedro. Per questo motivo è impossibile usare direttamente le piante o i prospetti di una figura per costruire un'assonometria ortogonale. Come vedremo, ciò sarà possibile nel caso in cui si decida di utilizzare un'assonometria obliqua.

3.3. L'assonometria obliqua

Come già detto in precedenza, nell'assonometria obliqua i raggi proiettanti che fuoriescono dall'ideale punto di vista intersecano il piano assonometrico formando un angolo diverso da 90° (vedi Fig.109).

La posizione della terna di riferimento può essere comunque disposta nello spazio (eventualmente, **anche con due assi paralleli al quadro**). Si possono quindi avere infinite assonometrie oblique, sia variando la posizione degli assi rispetto al quadro, sia variando la direzione dei raggi proiettanti. Naturalmente, anche per l'assonometria obliqua parleremo di assonometria *obliqua monometrica* (o *isometrica*), *obliqua dimetrica* e *obliqua trimetrica*.

3.3.1. Assonometrie oblique più usate

In teoria, è possibile realizzare innumerevoli tipi di assonometria. Il *teorema di Pohlke* permette di dimostrere che *disegnando tre segmenti uscenti da uno stesso punto e aventi lunghezze diverse e direzioni arbitrarie, esiste sempre un centro di proiezione all'infinito tale che i tre segmenti possano considerarsi come la proiezione sul quadro di tre segmenti di uguale lunghezza a due a due ortogonali fra di loro.*

Nella pratica effettiva del disegno si utilizza un numero limitato di assonometrie oblique. Per esempio, l'assonometria trimetrica è poco utilizzata in quanto è di scomoda costruzione. Anche per gli angoli da assegnare alle rette costituenti gli assi, di solito si utilizzano ancora oggi valori facilmente ottenibili con gli strumenti tradizionali da disegno.

Fra queste, l'**assonometria cavaliera**. Si tratta di un'assonometria obliqua in cui il piano di proiezione viene disposto parallelamente a uno dei piani del triedro. In questo modo, si ottiene un sistema di assi in cui si ha sempre un angolo di 90°, solitamente coincidente con la pianta, il prospetto frontale o il prospetto laterale dell'edificio da rappresentare (Fig. 129).

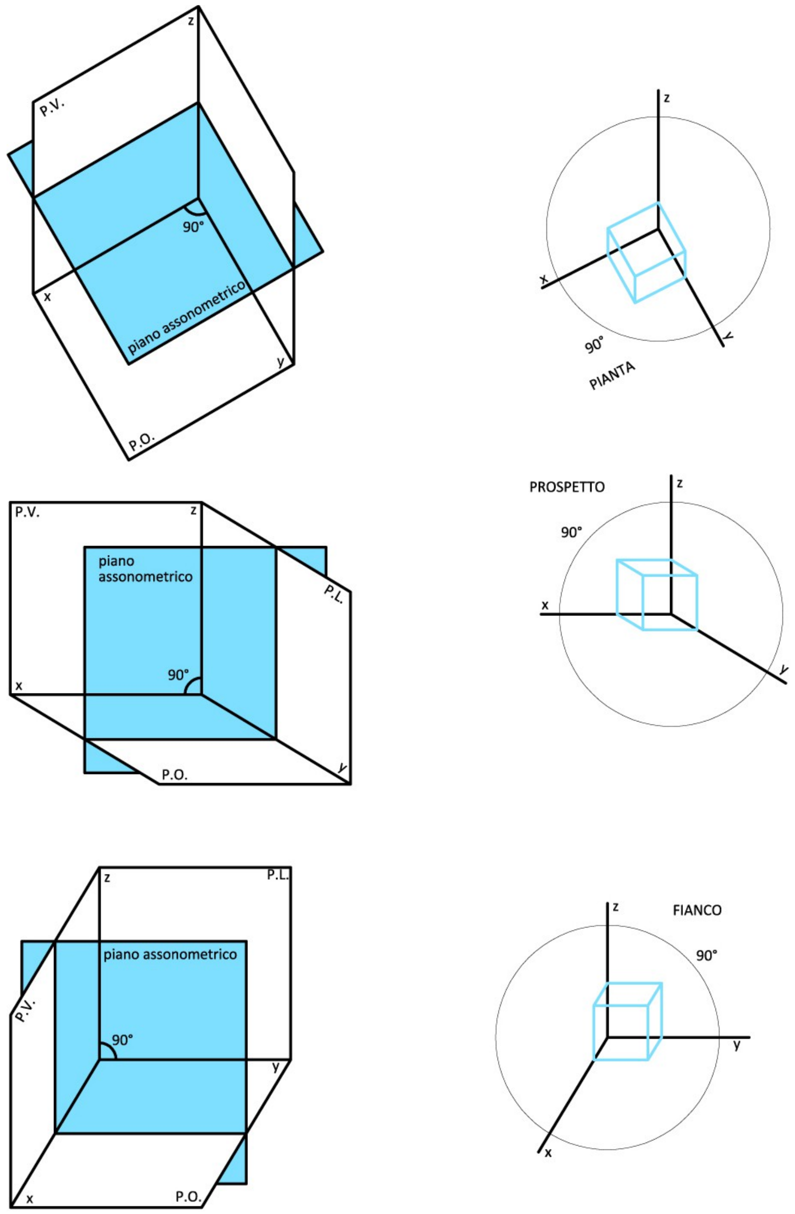


Fig. 129

Naturalmente, anche le assonometrie cavaliere sono infinite; esse sono tante quanti i possibili angoli che il sistema di assi può avere (oltre l'angolo di 90°). Nella pratica, le più usate sono:

- **l'assonometria cavaliera rapida** (dimetrica). Questo tipo di assonometria prevede un angolo di 90° sul piano verticale e due angoli di 135° sui piani laterale e orizzontale. L'immagine che ne deriva privilegia la visualizzazione del prospetto, e spesso produce una dimensione eccessiva degli oggetti disposti sull'asse delle profondità. Per questo motivo, quasi sempre si usa ridurre della metà (o di un quarto) il valore delle misure sull'asse Y (Fig. 130);

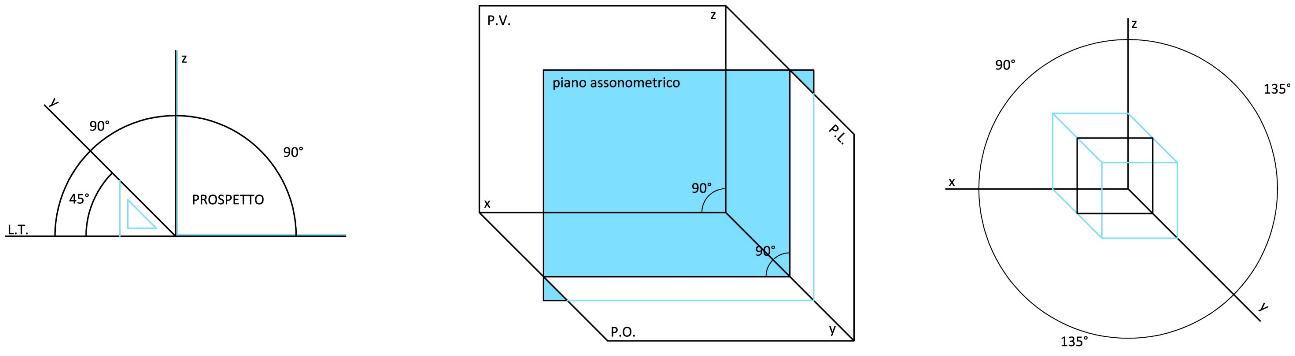


Fig. 130

- **l'assonometria cavaliera militare** (distinta nei tipi "a 30° e 60°" e "a 45°"). Questo tipo di assonometria prevede un angolo di 90° sul piano orizzontale, e permette di disegnare direttamente la pianta e poi di alzare le verticali direttamente da essa. Il tipo "a 30° e 60°" privilegia la visione delle coperture e di un prospetto; gli altri angoli sono di 120° fra gli assi relativi al piano parallelo al prospetto maggiormente in evidenza, e 150° fra gli assi relativi al piano parallelo al prospetto più scorciato (Fig. 131).

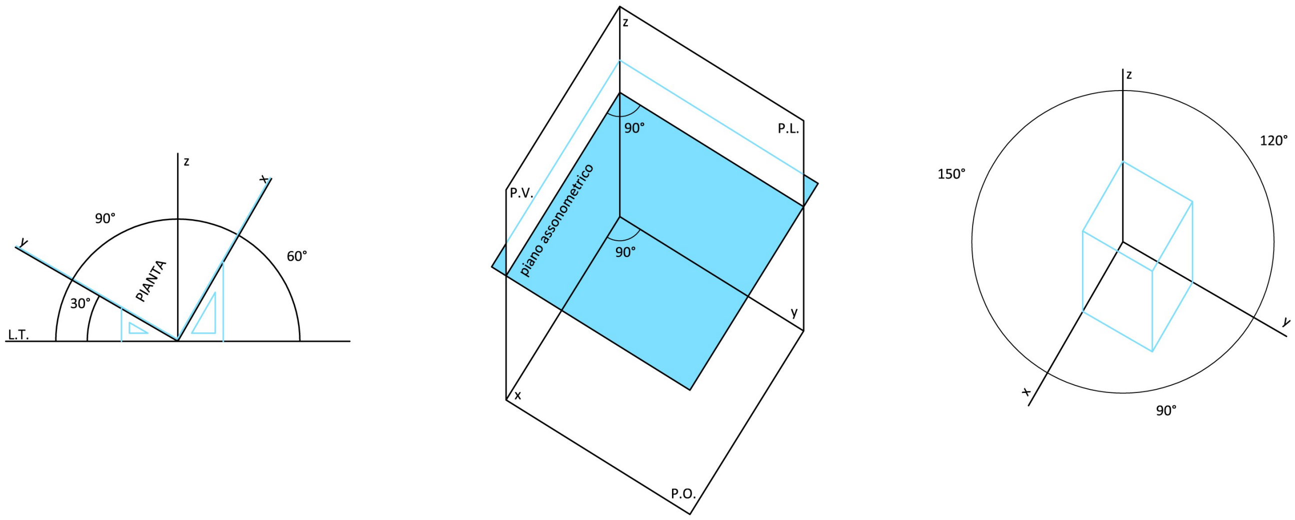


Fig. 131

Il tipo "a 45°" privilegia la visione delle coperture e mostra i due prospetti laterali con lo stesso scorcio (Fig. 132).

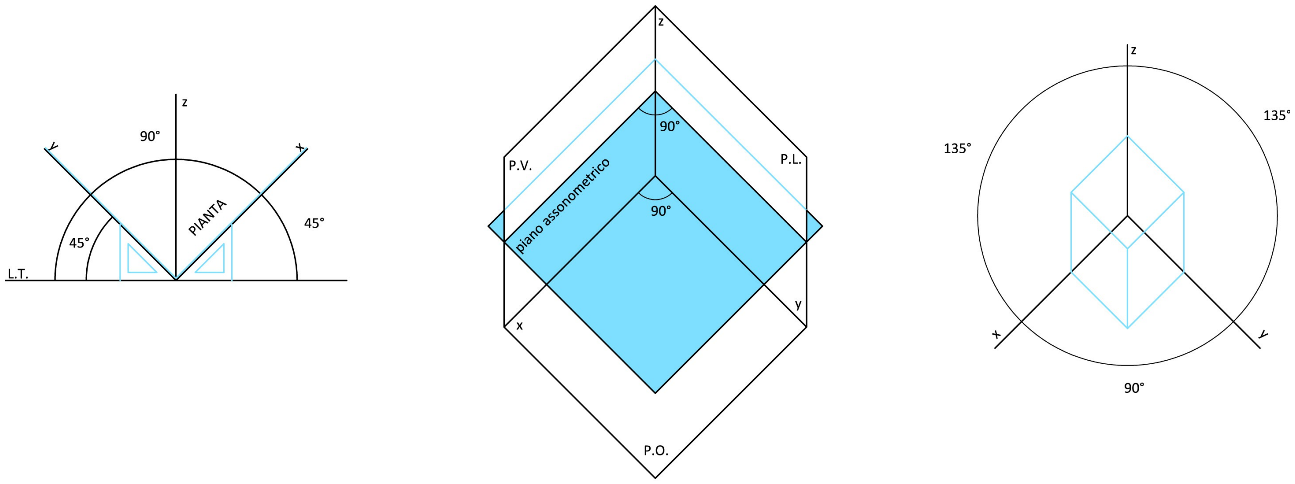


Fig. 132

Tuttavia è possibile costruire un'assonometria cavaliera militare disponendo la pianta con qualsiasi angolazione (Fig. 133).

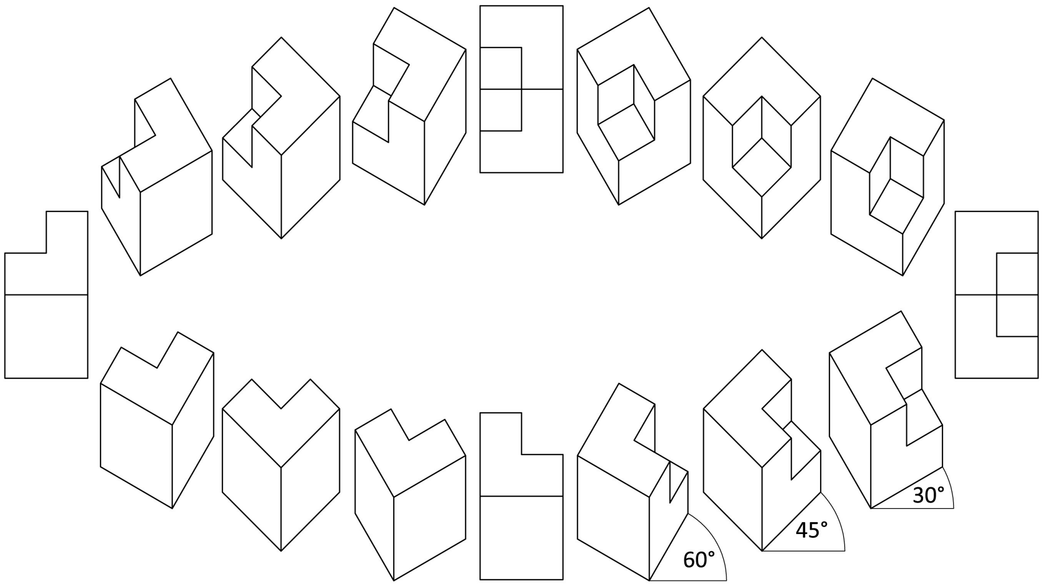


Fig. 133

3.4. Esercizi sull'assonometria

Sia dato un parallelepipedo con spigoli pari a cm 4, cm 6, cm 8, sormontato da una piramide retta a base quadrata con l pari a cm 3 e h pari a cm 5. Rappresentare il parallelepipedo e la piramide nei seguenti tipi di assonometria:

- ortogonale isometrica, metodo diretto e metodo indiretto;
- ortogonale dimetrica, coefficienti angolari a scelta, metodo diretto e indiretto;
- ortogonale trimetrica, coefficienti angolari a scelta, metodo diretto e indiretto;
- cavaliera rapida (dimetrica), con riduzione delle profondità pari a 0,5;
- cavaliera militare "a 30° e 60°";
- cavaliera militare "a 45°";
- cavaliera planometrica (con l'asse delle x orizzontale e gli assi y e z verticali, sovrapposti sul piano del foglio da disegno).

3.5. Uso dell'assonometria nel disegno di architettura

Per gli argomenti relativi a questo tema, si rimanda al capitolo dedicato all'assonometria del volume Daniele Colistra, *Il disegno dell'architettura e della città*, Iiriti, Reggio Calabria, 2003.

CAPITOLO 4
LA PROSPETTIVA

4.1. Condizioni proiettive

La prospettiva è una rappresentazione bidimensionale in grado di esprimere la tridimensionalità, la profondità dello spazio e la posizione degli oggetti all'interno di esso mediante un'immagine che simula la visione umana.

La prospettiva è caratterizzata da uno scorcio più o meno accentuato. Lo scorcio è la riduzione delle dimensioni degli oggetti all'aumentare della distanza dall'osservatore.

A differenza dell'assonometria, la prospettiva è una proiezione *conica* (o *centrale*); il punto di vista (centro di proiezione) è collocato a una distanza finita e, quindi, la sua posizione è definita e misurabile.

L'obiettivo di una prospettiva è ottenere sul piano uno schema apparentemente tridimensionale e verosimigliante, nonostante le dimensioni delle figure reali non siano immediatamente desumibili dal disegno.

La Fig. 134 riproduce le condizioni proiettive di una prospettiva: una figura oggettiva da rappresentare (un cubo), un quadro verticale π (corrispondente al foglio da disegno), un punto di vista a distanza finita (occhio dell'osservatore). L'immagine che si ottiene sul quadro in seguito all'intersecazione dei raggi visuali che uniscono il punto di vista con i punti caratteristici del cubo, è la prospettiva del cubo stesso.

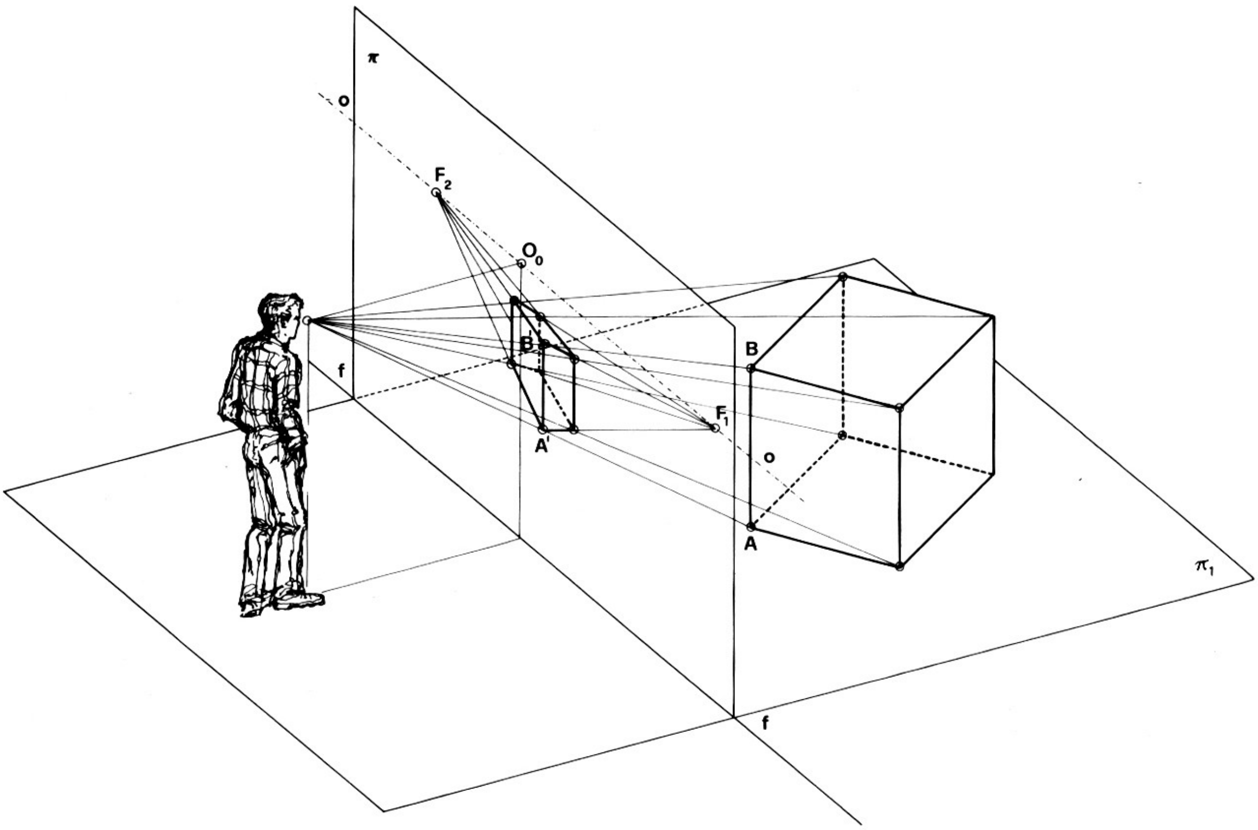


Fig. 134

La figura 134 mostra una situazione generica; si possono infatti avere diversi "modelli" di prospettiva. Essi derivano dalle reciproche posizioni del punto di vista, dell'oggetto e del quadro.

Se il quadro è verticale e parallelo a una delle facce dell'oggetto da rappresentare (immaginiamo sempre di voler rappresentare uno spazio di forma parallelepipeda), si ottiene un modello che prende il nome di **prospettiva centrale** (Fig. 135).

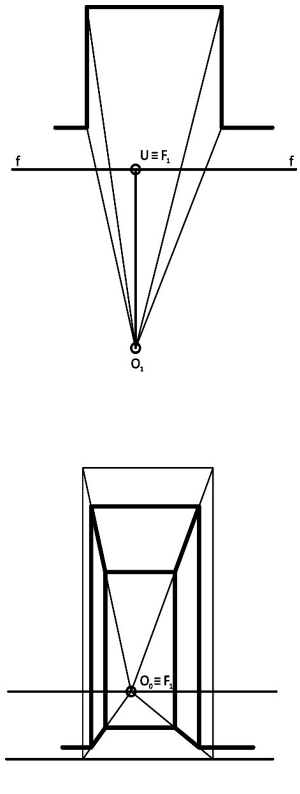


Fig. 135

Se il quadro è verticale ma parallelo a nessuna delle facce del parallelepipedo, il modello prende il nome di **prospettiva accidentale** (Fig. 136).

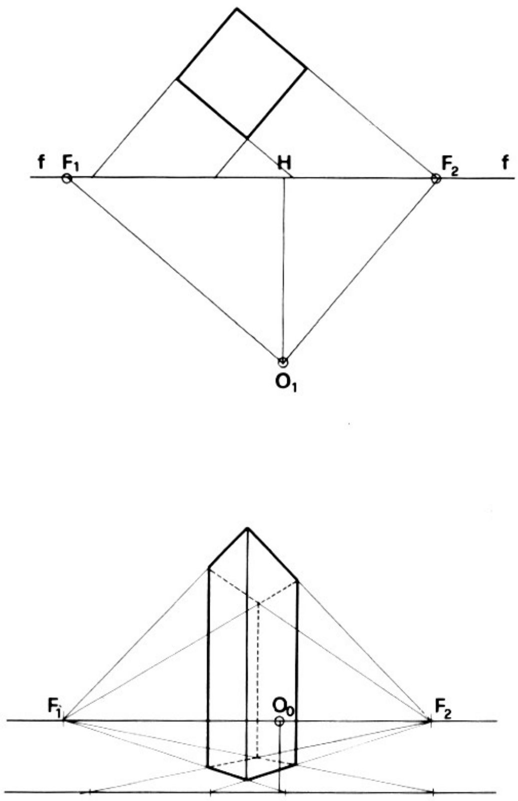


Fig. 136

Se, infine, il quadro è inclinato rispetto alla verticale, si ottiene un modello che prende il nome di **prospettiva a quadro inclinato** (Fig. 137).

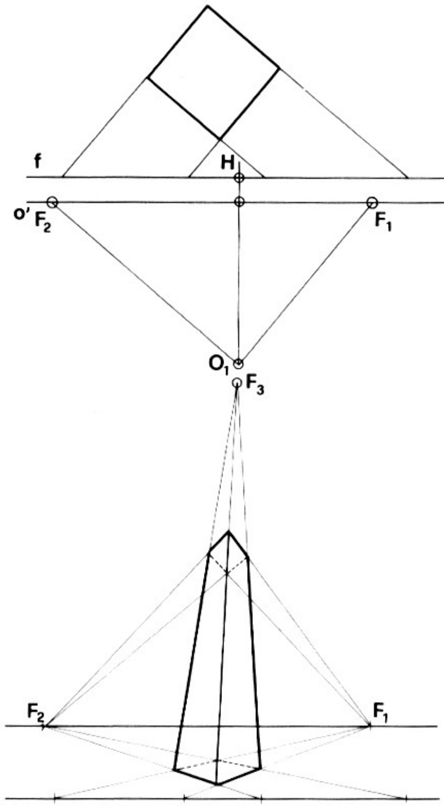


Fig. 137

Le espressioni "prospettiva a un punto di fuga", "prospettiva a due punti di fuga", "prospettiva a tre punti di fuga" **sono errate e non devono essere usate MAI**. Chiariremo meglio questo concetto più avanti.

4.1.1. Elementi per la costruzione di una prospettiva (da memorizzare!!)

Per la costruzione di una prospettiva occorre definire (Fig. 138):

- un piano π, detto **quadro**, disposto verticalmente;
- un piano ausiliario π_1, detto **geometrale**, disposto orizzontalmente;
- la retta di intersezione fra π e π_1**,** detta **linea di terra** (f-f);
- un **punto di vista** O;
- la proiezione O_0 di O sul quadro, detta **punto principale**;
- la distanza O-O_0, detta **distanza principale**;
- la retta parallela alla linea di terra passante per O_0, detta **linea di orizzonte**;
- la proiezione O_1 di O sul geometrale, prima **proiezione del punto di vista**;
- la distanza fra O e O_1, detta **altezza del punto di vista**;
- la proiezione di O_0 sul geometrale (punto H);
- il cerchio, tracciato sul quadro con centro in O_0 e raggio pari alla distanza principale, detto **cerchio di distanza**;
- i punti di intersezione della linea di orizzonte col cerchio di distanza, detti **punto di distanza destro** (Dd) e **punto di distanza sinistro** (Ds).

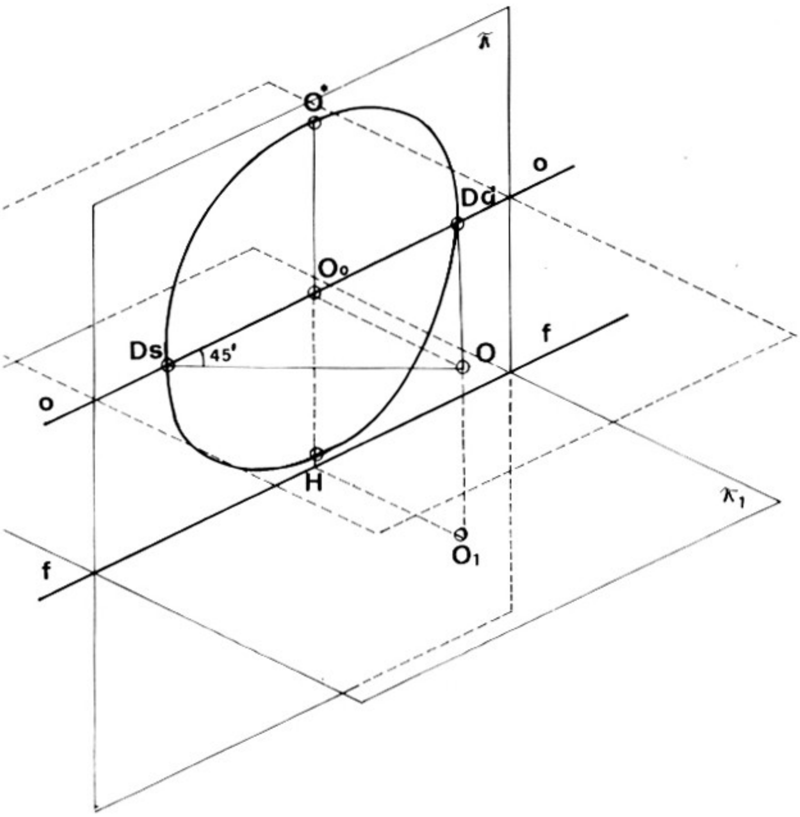


Fig. 138

Gli elementi visualizzati nella Fig. 138, però, non possono essere rappresentati in un'unica proiezione ortogonale. Occorre quindi riprodurli utilizzando il Metodo di Monge (doppia proiezione ortogonale), ampiamente trattato nel Capitolo 2 (Fig. 139). In questo disegno si nota come la pianta e il prospetto, a differenza del Metodo di Monge, siano staccati l'uno dall'altra. La linea di terra (f-f), quindi, è stata disegnata due volte, e ciò permette di avere lo spazio sufficiente a disegnare la pianta degli oggetti sul P.O. sopra la linea di terra, senza sovrapposizioni al disegno in prospettiva, che come vedremo verrà eseguito sul P.V.

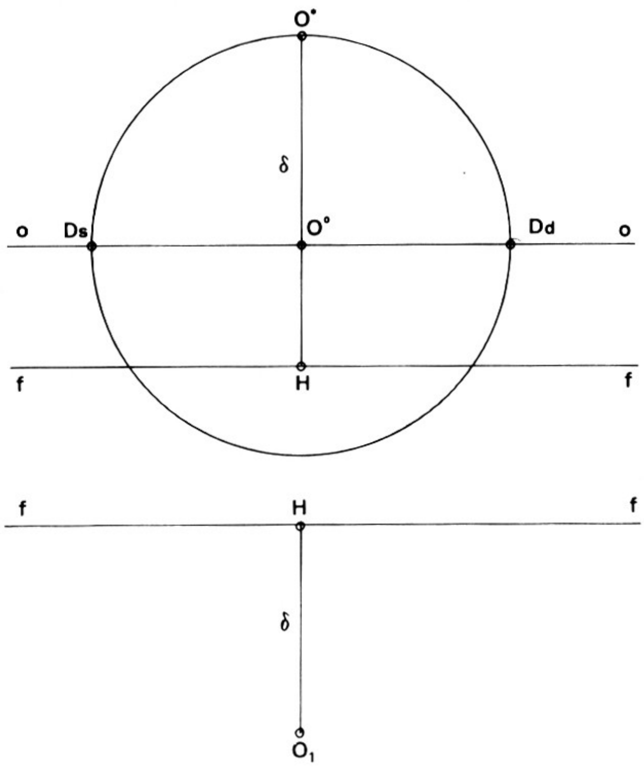


Fig. 139

4.2. Rappresentazione in prospettiva di enti geometrici

4.2.1. Rappresentazione in prospettiva di un quadrato disposto in posizione generica sul geometrale (Fig. 140)

Dovendo rappresentare il lato AB di un quadrato **disposto sul geometrale**, innanzitutto si costruisce la retta r passante per esso e la si prolunga fino a incontrare la linea di terra nel punto Tr (**traccia** di r).

A questo punto dobbiamo costruire l'immagine della retta r. Per far ciò, dobbiamo individuare almeno due punti appartenenti ad essa proiettandoli dal punto di vista O sul quadro π . Il primo punto che sceglieremo sarà Tr; esso infatti appartiene sia alla retta r che al quadro π, e la sua immagine coincide con se stesso.

Il secondo punto che sceglieremo sarà il punto improprio (ossia all'infinito) della retta r. La sua proiezione si otterrà mandando la parallela ad r da O. Tale parallela incontrerà il quadro nel punto Fr, **punto di fuga** della retta r e immagine del punto all'infinito di r sul quadro.

A questo punto, basterà unire Tr con Fr per ottenere r', immagine prospettica della retta r.

Per ottenere l'immagine prospettica dei punti A e B, è sufficiente congiungerli con O e trovare l'intersezione dei raggi visuali con r'. Tali intersezioni determineranno A' e B', immagini prospettiche di A e B.

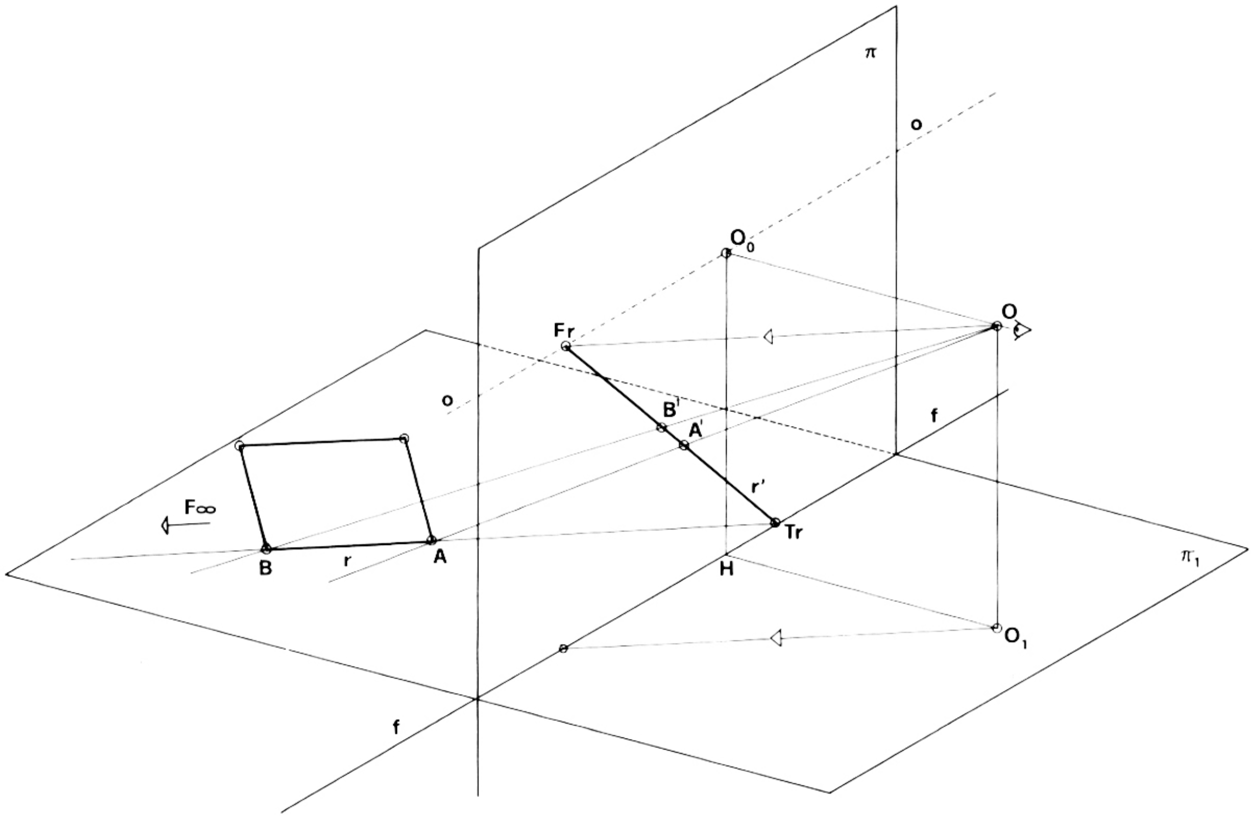


Fig. 140

Ma tutto questo avviene nello spazio. Spostiamo il problema sul piano da disegno, utilizzando il metodo della doppia proiezione ortogonale (Fig. 141).

Il procedimento di costruzione è il seguente:

1. Si disegna in pianta il quadrato ABCD;
2. Si fa passare per il lato AD una retta r; l'intersezione di r con la linea di terra sarà Tr (traccia di r);
3. Si riporta HTr sul P.V. (quadro);
4. In pianta, da O_1 si manda la parallela ad r fino a incontrare la linea di terra nel punto Fr (proiezione in pianta della fuga della retta r);
5. Dal P.O. si riporta sul quadro (P.V.) il punto Fr, sulla linea di orizzonte. Il punto Fr sul P.V. è la fuga della retta r;
6. Si congiunge, sempre sul piano del quadro, Tr con Fr, ottenendo l'immagine prospettica della retta su cui giace uno dei lati del quadrato.

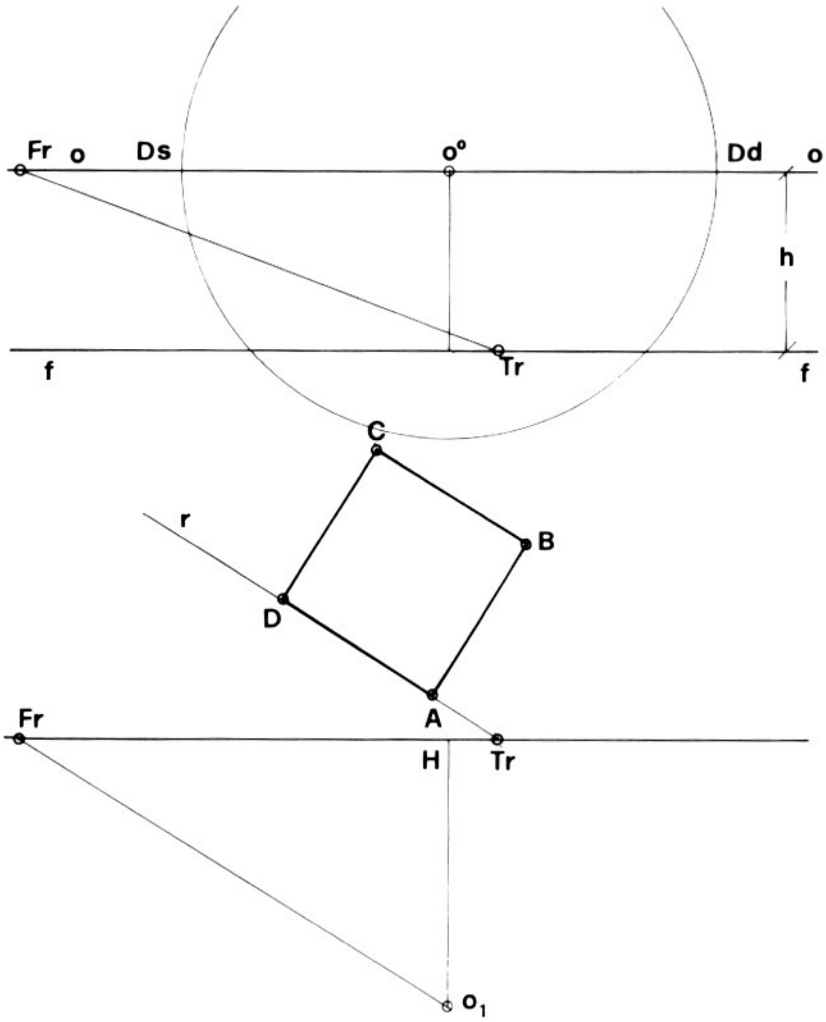


Fig. 141

Con lo stesso procedimento si ottengono le immagini prospettiche delle altre tre rette su cui giacciono i lati del quadrato; le loro intersezioni determinano i vertici A, B, C. D (Fig. 142).

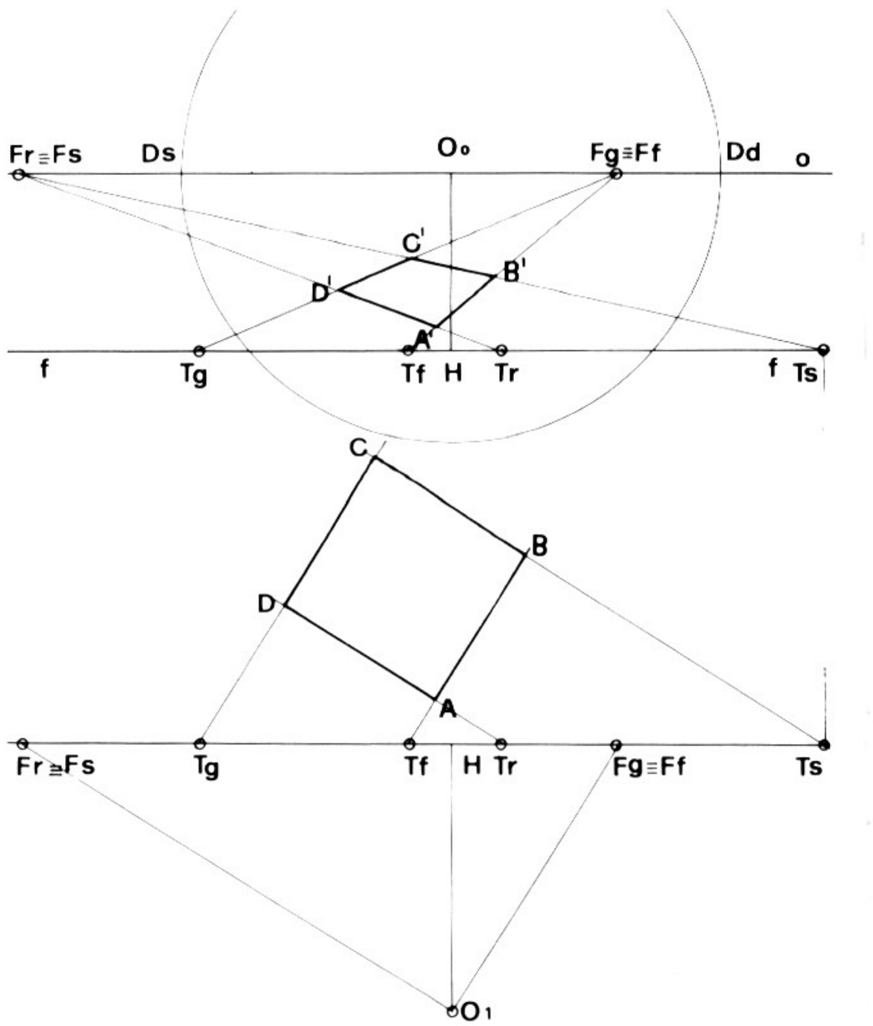


Fig. 142

Osservando la Fig. 142 è evidente una proprietà fondamentale della prospettiva, ossia: **rette parallele convergono tutte in un unico punto di fuga**.

Tale punto può essere **improprio** (se le rette sono parallele al quadro) o **proprio** (se le rette non sono parallele al quadro). Nel caso esaminato le rette non sono parallele al quadro e, quindi, i punti di fuga sono propri. I punti di fuga, quindi, sono tanti quante le direzioni delle rette presenti nella figura da rappresentare.

4.2.2. Quadrato posto sul geometrale con lato parallelo alla linea di terra (Fig. 143).

Si inizia la costruzione come nel caso precedente, ossia:

1. Si determina Tr;

2. Si conduce da O_1 la parallela alla retta r fino a ottenere sulla linea di terra il punto Fr (esso coincide col punto H e, sul quadro, col punto O_0; ciò significa che nella prospettiva, **le rette perpendicolari al quadro hanno il punto di fuga coincidente col punto principale**);

3. Si ripete lo stesso procedimento per la retta s.

Per quanto riguarda la retta g, il procedimento non si può applicare in quanto, essendo parallela alla linea di terra, ha la traccia impropria. Inoltre, conducendo per O_1 la parallela a g per trovare la sua fuga, si noterà che è anch'essa impropria. Di conseguenza, l'immagine prospettica della retta g, avendo traccia e fuga improprie, sarà parallela alla linea di terra e alla linea di orizzonte. Bisogna quindi ricorrere a una retta ausiliaria, come la diagonale del quadrato d.

4, Si prolunga d ottenendo Td (traccia di d);

5. Si manda da O_1 la parallela a d, ottenendo Fd (fuga di d);

6. Si riportano Td e Fd sul quadro;

Dato che d è inclinata di 45° rispetto alla linea di terra, si nota che il segmento HFd è uguale al segmento O_1H. Considerato che quest'ultimo è uguale alla distanza principale, anche il segmento HFd è uguale ad essa. Ricordando la definizione del cerchio di distanza (cerchio di raggio pari alla distanza principale), possiamo affermare che nella prospettiva **i punti di fuga delle rette inclinate a 45° coincidono con i punti di distanza**, definiti come intersezione fra il cerchio di distanza e la linea di orizzonte;

7. Si congiunge Td con Fd e si ottiene la retta d'; tale retta interseca r' nel punto D' e s' nel punto A';

8. Si manda da A' la parallela alla linea di terra fino a incontrare la retta r'; nel punto di intersezione si troverà B';

9. Si manda da D' la parallela alla linea di terra fino ad incontrare la retta s'; nel punto di intersezione si troverà C', immagine prospettica dell'ultimo lato del quadrato.

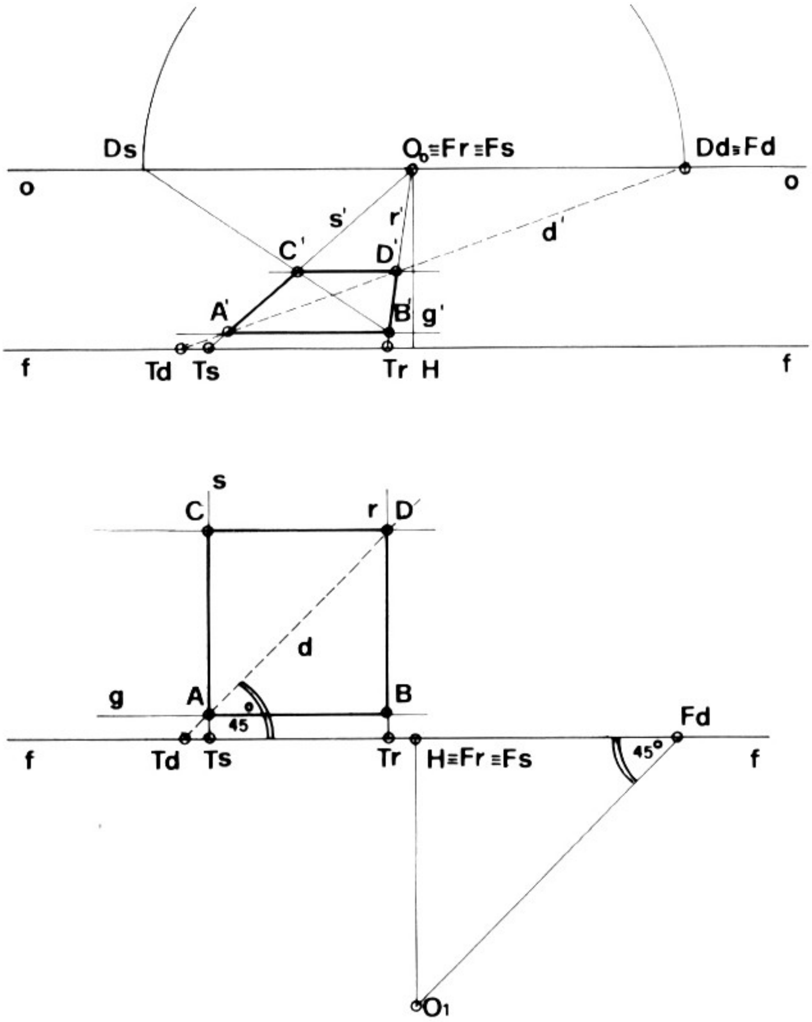


Fig. 143

4.2.3. Rette parallele al geometrale (Fig. 144)

Sia data una retta r parallela al geometrale (in questo caso coincide con uno spigolo del cubo). La sua immagine prospettica si determina nel seguente modo:

1. Si prolunga la retta r fino ad incontrare il quadro nel punto Tr (traccia di r);

2. Dal punto di vista O si costruisce una retta parallela ad r, fino ad incontrare il quadro nel punto Fr (fuga di r). Visto che r è parallela al geometrale, il punto Fr giacerà sulla linea di orizzonte;

3. Si congiunge Tr con Fr.

Consideriamo ora la retta r_1, proiezione sul geometrale di r. È evidente che r ed r_1 sono parallele e, quindi, Fr_1 (fuga di r_1) e Fr (fuga di r) coincideranno. La traccia Tr_1 è situata sulla stessa verticale di Tr; la distanza fra le due tracce Tr_1 e Tr è uguale all'altezza h che separa la retta r dalla sua proiezione r_1. Quindi, per la costruzione prospettica di una retta parallela al geometrale, è sufficiente riportare, a partire da Tr_1, un segmento perpendicolare alla linea di terra di altezza h pari all'altezza intercorrente fra la retta r e la sua proiezione r_1 per individuare Tr e poi, congiungendola con Fr, costruire l'immagine prospettica della retta r.

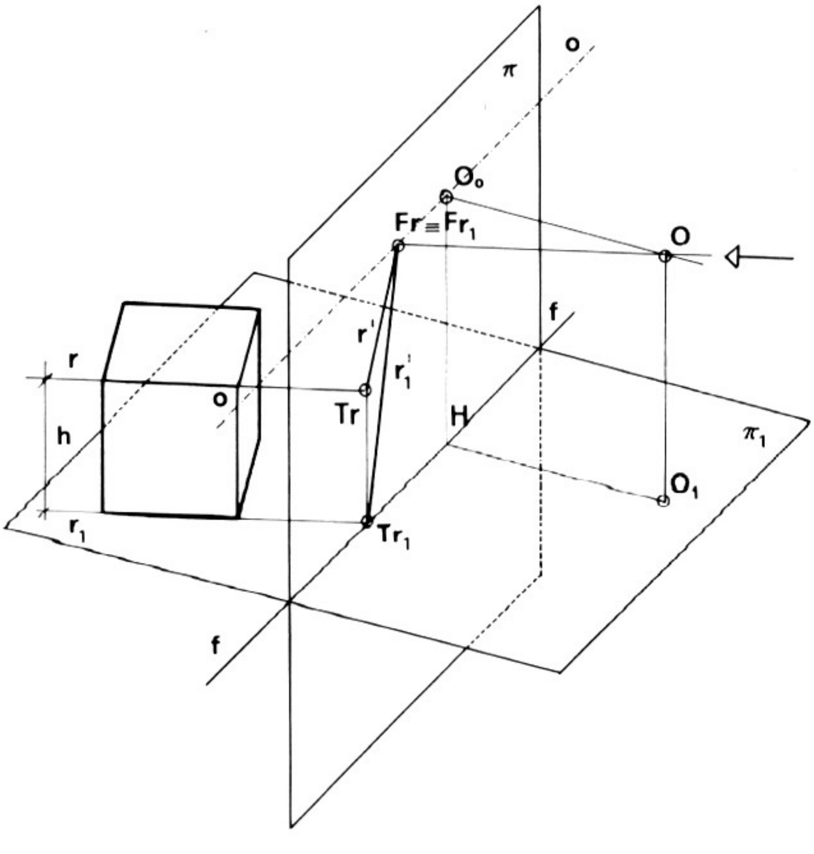


Fig. 144

La Fig. 145 riassume i concetti finora esposti; riproduce due cubi, poggiati sul geometrale, disposti in posizione differente rispetto al quadro.

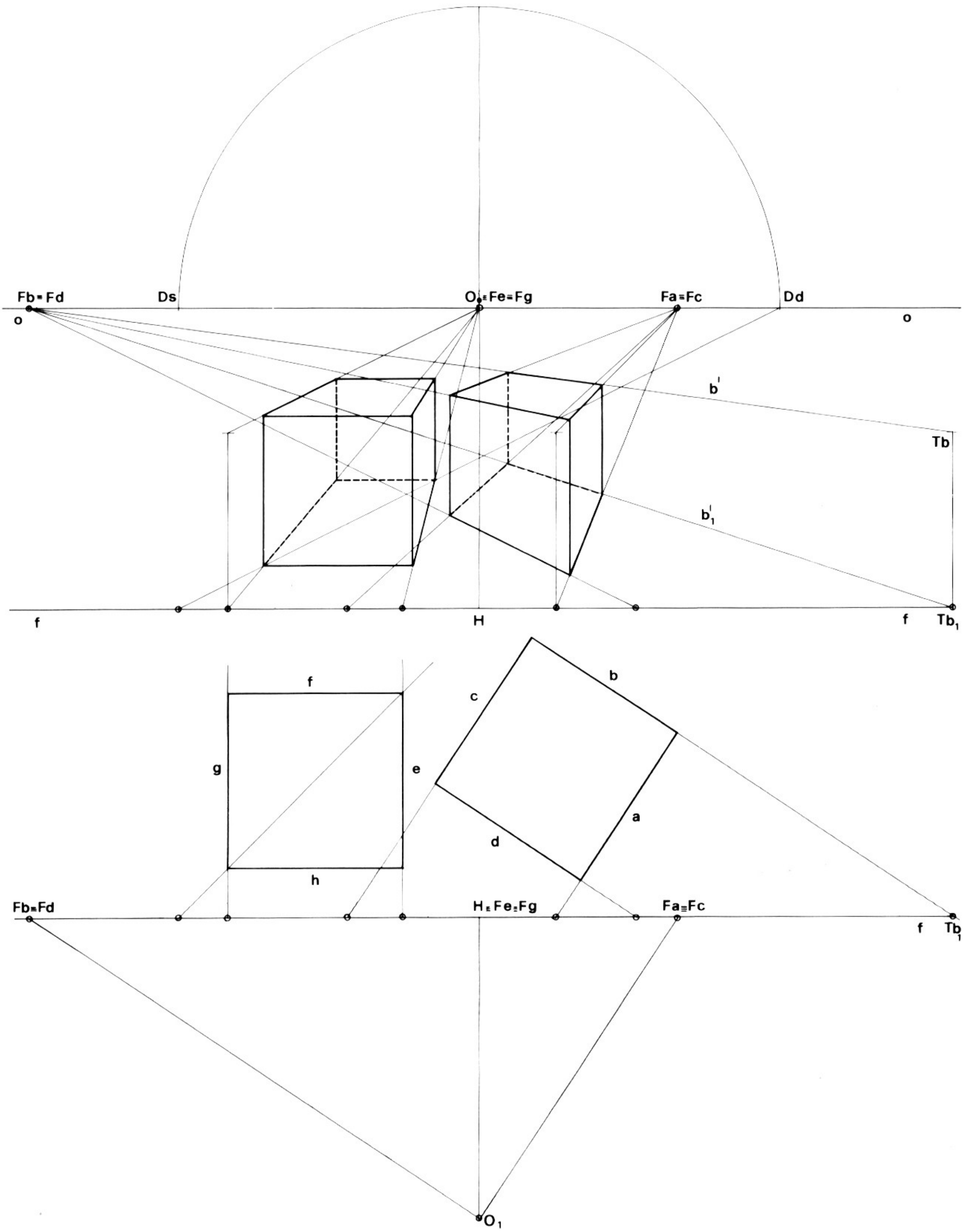


Fig. 145

4.3. Uso della prospettiva nel disegno di architettura

Per gli argomenti relativi a questo tema, si rimanda al capitolo dedicato alla prospettiva del volume Daniele Colistra, *Il disegno dell'architettura e della città*, Iiriti, Reggio Calabria, 2003.

ESERCIZI

1. Rappresentare un punto distante 10 cm dal P.O. e 16 cm dal P.V.

2. Rappresentare un punto appartenente al piano bisettore del primo diedro

3. Rappresentare un punto appartenente alla L.T.

4. Rappresentare un segmento inclinato rispetto ai due P.P.

5. Rappresentare un segmento parallelo al P.O. e inclinato rispetto al P.V.

6. Rappresentare un segmento perpendicolare al P.O.

7. Rappresentare una retta inclinata rispetto ai piani di proiezione (retta “generica”)

8. Rappresentare una retta parallela al P.O. e inclinata rispetto al P.V. (retta “orizzontale”)

9. Rappresentare una retta parallela al P.V. e inclinata rispetto al P.O. (retta “frontale”)

10. Rappresentare una retta perpendicolare rispetto al P.O. (retta “proiettante” in prima proiezione)

11. Rappresentare una retta perpendicolare rispetto al P.V. (retta “proiettante” in seconda proiezione)

12. Rappresentare una retta passante per la linea di terra

13. Rappresentare due rette parallele

14. Rappresentare due rette incidenti, determinando la prima e la seconda proiezione del loro punto di intersezione

15. Rappresentare due rette sghembe

16. Date due tracce T_1r e T_2r, determinare le proiezioni della retta da loro individuate

17. Date due proiezioni di una retta r’ ed r’’, determinare le proiezioni delle tracce

18. Rappresentare un piano inclinato rispetto ai piani di proiezione (piano generico)

19. Rappresentare un piano parallelo al piano verticale

20. Rappresentare un piano perpendicolare al piano orizzontale e inclinato rispetto al piano verticale

21. Rappresentare un piano perpendicolare ai due piani di proiezione (piano di profilo)

22. Rappresentare un piano parallelo alla linea di terra

23. Rappresentare un piano passante dalla linea di terra

24. Rappresentare due piani paralleli fra loro

25. Data una retta, rappresentare un punto appartenente ad essa

26. Dato un piano generico, rappresentare una retta generica appartenente ad esso

27. Dato un piano generico, rappresentare una retta parallela al P.V. e inclinata rispetto al P.O. appartenente ad esso

28. Dato un piano generico, rappresentare una retta parallela al P.O. e inclinata rispetto al P.V. appartenente ad esso

29. Dato un piano perpendicolare al P.O. e inclinato rispetto al P.V., rappresentare una retta perpendicolare al P.O. appartenente ad esso

30. Dato un piano perpendicolare al P.O. e inclinato rispetto al P.V., rappresentare una retta generica appartenente ad esso

31. Dato un piano perpendicolare al P.V. e inclinato rispetto al P.O., rappresentare una retta generica appartenente ad esso

32. Dati due punti distinti, trovare la retta passante per essi

33. Date due rette incidenti, trovare il piano da esse individuato

34. Data una retta, rappresentare tre piani passanti per essa

35. Dati due piani generici, trovare la loro retta comune

36. Dati un piano generico e un piano proiettante rispetto al P.O., trovare la loro retta comune

37. Dati un piano generico e un piano proiettante rispetto al P.V., trovare la loro retta comune

38. Determinare la retta di intersezione fra un piano α generico e un piano β parallelo al P.O.

39. Determinare la retta di intersezione fra due piani paralleli alla L.T.

40. Dati due piani proiettanti rispetto al P.O., trovare la loro retta comune

41. Dati due piani proiettanti rispetto al P.V., trovare la loro retta comune

42. Determinare il ribaltamento di un piano perpendicolare al P.O. e inclinato rispetto al P.V.

43. Determinare il ribaltamento di un piano di profilo

44. Determinare il ribaltamento di un piano inclinato rispetto ai due piani di proiezione

45. Dato un piano generico, determinare la retta di massima pendenza

46. Determinare il ribaltamento di una retta perpendicolare al P.O. giacente su un piano proiettante in prima proiezione

47. Determinare il ribaltamento di una retta parallela al P.O. giacente su un piano proiettante in prima proiezione

48. Determinare il ribaltamento di una retta generica giacente su un piano proiettante in seconda proiezione

49. Determinare il ribaltamento di una retta parallela al P.O. giacente su un piano generico

50. Determinare il ribaltamento di una retta generica giacente su un piano generico

51. Dato un piano α, proiettante in prima proiezione e inclinato rispetto al P.V. determinare l'angolo di α rispetto al P.O. e rispetto al P.V.

52. Dato un piano α, proiettante in seconda proiezione e inclinato rispetto al P.O., determinare l'angolo di α rispetto al P.V. e rispetto al P.O.

53. Dato un piano α, inclinato rispetto ai due piani di proiezione, determinare l'angolo di α rispetto al P.V. e rispetto al P.O.

54. Determinare la vera forma e grandezza di un triangolo giacente su un piano perpendicolare al P.O. e inclinato al P.V.

55. Determinare la vera forma e grandezza di un quadrilatero giacente su un piano perpendicolare al P.V. e inclinato al P.O.

56. Determinare la proiezione di un quadrato giacente su un piano α perpendicolare al P.O. e inclinato rispetto al P.V. Il quadrato ha il lato di cm 4.

57. Determinare la proiezione di un triangolo rettangolo giacente su un piano α perpendicolare al P.V. e inclinato al P.O. Il triangolo ha lati di cm 3, cm 4 e cm 5.

58. Sia dato un piano α, perpendicolare al P.V. e inclinato rispetto al P.O. Sul piano α giace un cerchio il cui diametro è pari a cm 5. Rappresentare il cerchio in prima e seconda proiezione.

59. Sia dato un piano α, perpendicolare al P.V. e inclinato rispetto al P.O. Sul piano α giace un quadrato il cui lato è pari a cm 4. Rappresentare il quadrato in prima e seconda proiezione.

60. Determinare graficamente la sezione in vera grandezza di un parallelepipedo, con base poggiata sul P.O. e facce non parallele al P.V., sezionato con un piano perpendicolare al P.O. e inclinato rispetto al P.V.

61. Determinare graficamente la sezione in vera grandezza di una sfera sezionata con un piano α perpendicolare al P.O. e inclinato rispetto al P.V.

62. Determinare graficamente la sezione in vera grandezza di una piramide, con base quadrata poggiata sul P.O. (nessun lato della base parallelo alla L.T.), sezionata con un piano α perpendicolare al P.O. e inclinato rispetto al P.V.

63. Determinare graficamente la sezione in vera grandezza di un cilindro con base poggiata sul P.O., sezionato con un piano α perpendicolare al P.V. e inclinato rispetto al P.O.

64. Determinare graficamente la sezione in vera grandezza di una piramide con base quadrata poggiata sul P.O. (nessun lato della base parallelo alla L.T.), sezionata con un piano α perpendicolare al P.V. e inclinato al P.O.

65. Determinare graficamente la sezione in vera grandezza di un parallelepipedo con base poggiata sul P.O. e facce non parallele al P.V., sezionato con un piano α perpendicolare al P.V. e inclinato al P.O.

66. Specificare, aiutandosi con grafici, la differenza fra proiezioni coniche e proiezioni cilindriche.

67. Specificare, aiutandosi con grafici, la differenza fra l'assonometria ortogonale e l'assonometria obliqua.

68. Specificare, aiutandosi con grafici, la differenza fra l'assonometria monometrica, dimetrica e trimetrica.

69. Specificare, aiutandosi con grafici, il motivo per cui esiste solo un tipo di assonometria ortogonale monometrica.

70. Specificare, aiutandosi con grafici, le condizioni proiettive che differenziano l'assonometria ortogonale dalle proiezioni ortogonali.

71. Descrivere, aiutandosi con grafici, i tipi di assonometria più comunemente utilizzati nel disegno architettonico, specificandone le diverse condizioni proiettive.

72. Sia dato un parallelepipedo con spigoli pari a cm 4, cm 5, cm 6. Rappresentare il parallelepipedo in assonometria ortogonale isometrica, metodo diretto.

73. Sia dato un parallelepipedo con spigoli pari a cm 4, cm 5, cm 6. Rappresentare il parallelepipedo in assonometria ortogonale dimetrica, coefficienti angolari a scelta, metodo diretto.

74. Sia dato un parallelepipedo con spigoli pari a cm 4, cm 5, cm 6. Rappresentare il parallelepipedo in assonometria ortogonale trimetrica, coefficienti angolari a scelta, metodo diretto.

75. Sia data una piramide retta a base quadrata con l pari a cm 3 e h pari a cm 5. Rappresentare la piramide in assonometria ortogonale isometrica, metodo diretto.

76. Sia data una piramide retta a base quadrata con l pari a cm 3 e h pari a cm 5. Rappresentare la piramide in assonometria ortogonale dimetrica, coefficienti angolari a scelta, metodo diretto.

77. Sia data una piramide retta a base quadrata con l pari a cm 3 e h pari a cm 5. Rappresentare la piramide in assonometria ortogonale trimetrica, coefficienti angolari a scelta, metodo diretto.

78. Sia dato un parallelepipedo con spigoli pari a cm 3, cm 5, cm 4. Rappresentare il parallelepipedo in assonometria ortogonale isometrica, metodo indiretto.

79. Sia dato un parallelepipedo con spigoli pari a cm 3, cm 5, cm 4. Rappresentare il parallelepipedo in assonometria ortogonale dimetrica, coefficienti angolari a scelta, metodo indiretto.

80. Sia dato un parallelepipedo con spigoli pari a cm 3, cm 5, cm 4. Rappresentare il parallelepipedo in assonometria ortogonale trimetrica, coefficienti angolari a scelta, metodo indiretto.

81. Sia dato un parallelepipedo con spigoli pari a cm 4, cm 5, cm 6, sormontato da una piramide retta a base quadrata con l pari a cm 3 e h pari a cm 4. Rappresentare il parallelepipedo e la piramide in assonometria cavaliera rapida (dimetrica), con riduzione delle profondità pari a 0,5.

82. Sia dato un parallelepipedo con spigoli pari a cm 4, cm 5, cm 6, sormontato da una piramide retta a base quadrata con l pari a cm 3 e h pari a cm 4. Rappresentare il parallelepipedo e la piramide in assonometria cavaliera militare "a 30° e 60°";

83. Sia dato un parallelepipedo con spigoli pari a cm 4, cm 5, cm 6, sormontato da una piramide retta a base quadrata con l pari a cm 3 e h pari a cm 4. Rappresentare il parallelepipedo e la piramide in assonometria cavaliera militare "a 45°".

84. Sia dato un parallelepipedo con spigoli pari a cm 4, cm 5, cm 6, sormontato da una piramide retta a base quadrata con l pari a cm 3 e h pari a cm 4. Rappresentare il parallelepipedo e la piramide in assonometria cavaliera "planometrica".

85. Specificare, eventualmente aiutandosi con grafici, le condizioni proiettive che differenziano la prospettiva "a quadro inclinato", la prospettiva "accidentale" e la prospettiva "centrale".

86. Sia dato un parallelepipedo con spigoli pari a cm 4, cm 5, cm 6, e una piramide retta a base quadrata con l pari a cm 3 e h pari a cm 5. Rappresentare il parallelepipedo e la piramide in prospettiva centrale.

87. Sia dato un parallelepipedo con spigoli pari a cm 4, cm 5, cm 6, e una piramide retta a base quadrata con l pari a cm 3 e h pari a cm 5. Rappresentare il parallelepipedo e la piramide in prospettiva accidentale.

INDICE