Daniele Colistra

Fondamenti e Applicazioni di Geometria Descrittiva

Appunti ed Esercizi

1 - GEOMETRIA PROIETTIVA. ELEMENTI GEOMETRICI E CONCETTI FONDAMENTALI

1.1. Gli enti geometrici fondamentali

La **Geometria** si occupa delle proprietà delle figure sul piano e nello spazio. La *Geometria elementare* (euclidea) riguarda le proprietà metriche delle figure. La *Geometria proiettiva* studia le proprietà delle figure che rimangono immutate rispetto alle *trasformazioni proiettive*. Le trasformazioni proiettive si ottengono sottoponendo le figure ad operazioni di proiezione da un punto e sezione con un piano (vedi oltre).

Il **punto**: entità priva di dimensione, indivisibile (nella pratica del disegno, tuttavia, il punto avrà una dimensione perché possa essere visualizzato). Materializzazioni: la punta di uno spillo, l'incontro di due bordi di un foglio, l'incontro di tre spigoli di un cubo.

La **retta**: insieme di infiniti punti allineati. Materializzazioni: il bordo di un foglio, delimitato da due punti (che si definiscono *estremi* del segmento), è una *porzione di retta* (ossia un *segmento*). Prolungando tale porzione all'infinito nelle due direzioni otterremo una retta. Una retta è priva di spessore, ha lunghezza infinita e individua una *direzione* nello spazio. La direzione è la caratteristica comune a un gruppo di rette parallele.

La *distanza fra due punti* è la misura del segmento che ha per estremi i due punti.

La *distanza di un punto da una retta* è la distanza minima fra il punto e la retta, ottenuta tracciando la perpendicolare dal punto alla retta.

Il **piano**: insieme di rette che si intersecano vicendevolmente. Il piano è un elemento di dimensioni illimitate e privo di spessore, definito dall'insieme di infiniti punti che gli appartengono (piano punteggiato) o delle infinite rette che gli appartengono (piano rigato). Materializzazioni: un foglio di carta, delimitato da rette che si intersecano vicendevolmente e che generano segmenti (i bordi del foglio), è una porzione di piano. Il piano definisce una *giacitura*, rappresentata dalla sua posizione nello spazio rispetto a una terna cartesiana di riferimento.

Postulati (da verificare empiricamente con oggetti, come fogli di carta, bacchette di legno, spilli, ecc.):

- per tre punti non allineati passa un piano (*solo un piano*);
- una retta e un punto esterno ad essa definiscono un piano (*solo un piano*);
- due rette incidenti definiscono un piano (*solo un piano*);
- per una retta passano infiniti piani;
- due rette appartenenti ad uno stesso piano individuano sempre un punto: *punto proprio*, se le rette non sono parallele, *punto improprio* (ossia all'infinito) se le rette sono parallele. L'introduzione del concetto di punto improprio, stabilita dalla Geometria proiettiva, permette di ampliare il 5° postulato di Euclide, che espresso con parole semplici asserisce: "rette parallele non si incontrano mai". Ora diciamo: rette appartenenti a un piano si incontrano sempre, in un punto proprio o improprio.

Soffermiamoci sul concetto di elemento improprio. Consideriamo una retta r e un punto S fuori di essa (fig. 1). Facciamo passare per S una retta s, che intersechi r nel punto P.

Facciamo ruotare la retta s intorno al punto S. Il punto di intersezione fra le due rette r ed s si sposterà da P in P_1, P_2, ecc. Nel momento in cui le due rette r ed s saranno parallele, il punto di intersezione P_∞ si sarà portato all'infinito.

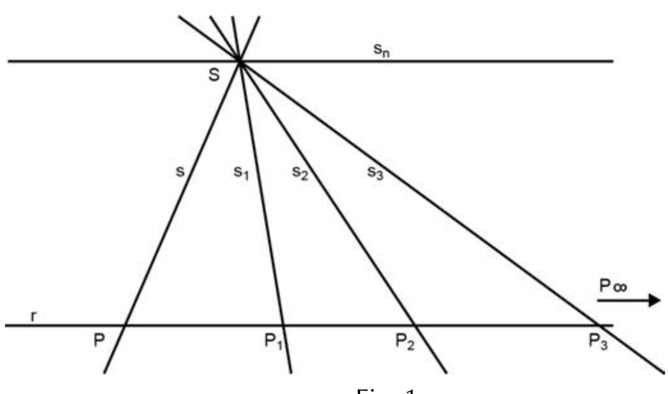

Fig. 1

Un fascio di rette parallele, quindi, ha in comune sia il punto improprio che la direzione, in quanto il punto improprio assume anche il significato di direzione.

Ogni piano ha una retta all'infinito, che è comune a tutti i piani ad esso paralleli.

1.2. Elementi fondamentali di una proiezione

Le operazioni di *proiezione* e *sezione* si realizzano attraverso tre elementi fondamentali:

- un *punto di proiezione o centro proiettivo* o *punto di vista*, dal quale escono i raggi proiettanti;
- una *figura oggettiva* o *oggetto* da rappresentare;
- un *piano di proiezione* o *quadro*, su cui si costruisce l'immagine dell'oggetto. Nella pratica operativa, il quadro coincide col foglio sul quale si disegna.

1.3. Relazioni fra gli elementi di una proiezione

Fra le infinite posizioni spaziali che i tre elementi possono assumere, individuiamo:

- piano di proiezione π dopo il punto di proiezione S e dopo l'oggetto P. In tal caso si realizza un'operazione di *proiezione* (fig. 2);

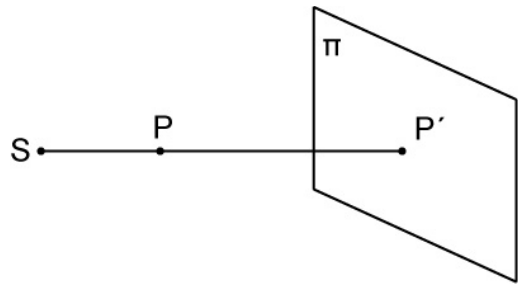

Fig. 2

- piano di proiezione π interposto fra il punto di proiezione S e l'oggetto P. In tal caso si realizza un'operazione di *sezione* (fig. 3).

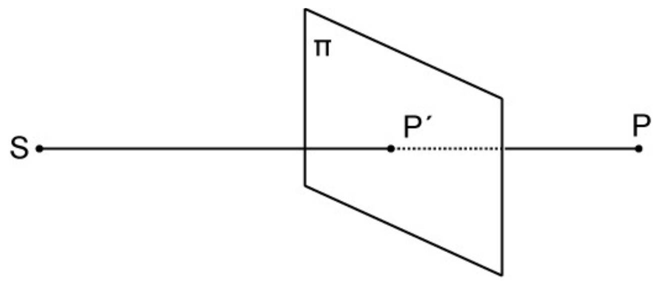

Fig. 3

1.4. Proiezioni coniche e proiezioni cilindriche

Fra le infinite posizioni spaziali che il punto di proiezione può assumere, individuiamo le due posizioni fondamentali:

- punto di proiezione a distanza *finita*;
- punto di proiezione a distanza *infinita*.

Da queste due posizioni derivano i due *sistemi proiettivi fondamentali*:

- il sistema delle *proiezioni coniche* o *proiezioni centrali*, utilizzato nella prospettiva (fig. 4);

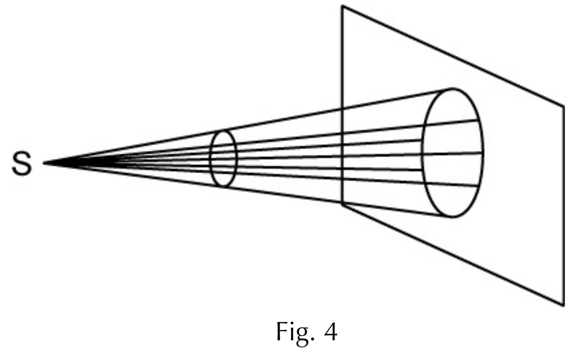

Fig. 4

- il sistema delle *proiezioni cilindriche* o *proiezioni parallele*, utilizzato nelle proiezioni ortogonali e nelle proiezioni assonometriche (fig. 5).

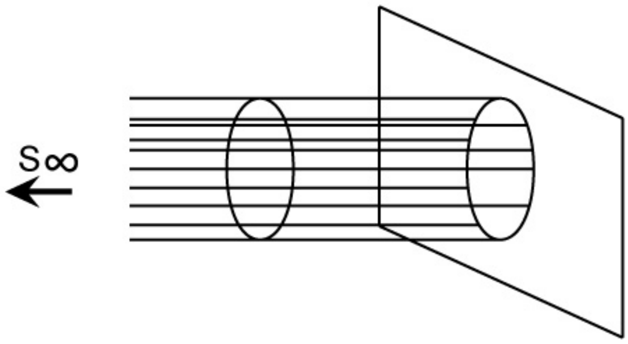

Fig. 5

1.5. Parallelismo, perpendicolarità (da verificare empiricamente con oggetti come fogli di carta, bacchette di legno, ecc.).

Sia dato un piano, e una retta non appartenente ad essa. Se i punti della retta hanno tutti la stessa distanza dal piano, la retta è parallela al piano. Se i punti della retta hanno distanze diverse dal piano, ci sarà un punto a distanza zero e questo punto si definisce di *intersezione* fra la retta e il piano.

Una retta è perpendicolare a un piano se è perpendicolare a due rette del piano.

La distanza di un punto dal piano è la misura del segmento appartenente alla perpendicolare condotta dal punto al piano.

La distanza fra due rette parallele è la misura di un segmento perpendicolare alle due rette.

2 – IL METODO DELLA DOPPIA PROIEZIONE ORTOGONALE (METODO DI MONGE)

2.1.1. Generalità

Le proiezioni ortogonali non costituiscono visioni globali, ma vedute staccate dell'oggetto che devono essere ricomposte in una sintesi spaziale unitaria. Esse si realizzano con proiezioni *cilindriche* basate su una relazione spaziale di tipo S- P- π.

La condizione fondamentale è che il piano di proiezione sia in posizione *ortogonale* rispetto ai raggi proiettanti. Da qui il nome del metodo proiettivo.

La proiezione avviene tramite una retta proiettante, incidente ortogonalmente il piano di proiezione, che fissa sul piano stesso l'immagine di un punto.

Se dobbiamo rappresentare una figura bidimensionale disposta parallelamente al piano di proiezione, una sola proiezione può essere sufficiente. Ma in generale, una sola proiezione ortogonale è *insufficiente* a descrivere un oggetto tridimensionale, per cui è necessario usare come piani di proiezione tutti i piani dello spazio necessari a rappresentare in modo inequivocabile l'oggetto.

2.1.2. I piani fondamentali di proiezione

Fra tutti i piani dello spazio, Monge individuò i *due piani fondamentali di proiezione*: un piano *orizzontale*, chiamato P.O. o π_1 o primo piano di proiezione, intersecato ortogonalmente da un piano *verticale*, chiamato P.V. o π_2 o secondo piano di proiezione (fig. 6).

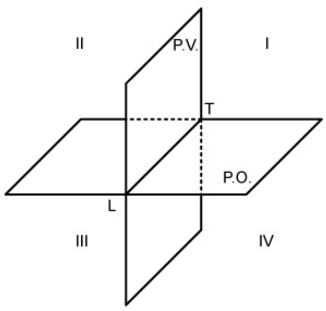

Fig. 6

L'intersecazione ortogonale dei due piani fondamentali definisce una retta chiamata *linea di terra* (L.T.). La L.T. divide lo spazio in 4 *diedri* aventi un'unica origine di riferimento. Per convenzione, denominiamo:

- I diedro, compreso fra il semipiano orizzontale anteriore e il semipiano verticale superiore;
- II diedro, compreso fra il semipiano orizzontale posteriore e il semipiano verticale superiore;
- III diedro, compreso fra il semipiano orizzontale posteriore e il semipiano verticale inferiore;
- IV diedro, compreso fra il semipiano orizzontale anteriore e il semipiano verticale inferiore.

Tutti gli oggetti dello spazio sono contenuti in uno dei quattro diedri, e quindi sono proiettabili ortogonalmente sui semipiani che individuano il diedro in cui sono contenuti. Per facilitare la costruzione grafica delle immagini, Gaspard Monge stabilì di pensare i due semipiani del diedro che contiene l'oggetto da rappresentare come giacenti su un unico piano. Tale piano coincide con il foglio da disegno.

Per ottenere ciò, Monge stabilì che il piano verticale ruotasse attorno alla L.T. di 90°, fino a coincidere con il piano orizzontale (fig. 7).

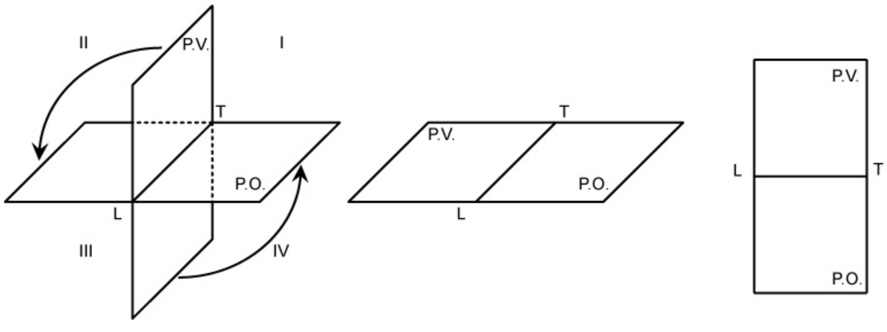

Fig. 7

Nella pratica operativa, salvo casi particolari, tutti i disegni si realizzano effettuando proiezioni ortogonali unicamente nel *primo diedro*. A volte, sui semipiani fondamentali viene inserito ortogonalmente un terzo piano (*piano laterale*, denominato P.L. o π_3) in modo da formare un *triedro* che consente l'esecuzione di una terza proiezione (fig. 8).

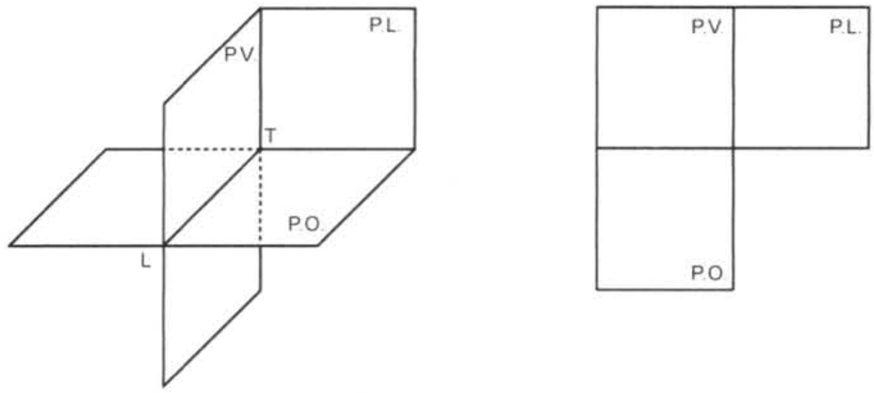

Fig. 8

2.1.3. Procedimento proiettivo

Eseguire le proiezioni ortogonali di una figura dello spazio significa *costruire sui piani fondamentali di proiezione le immagini geometriche della figura stessa*. Ciò si ottiene proiettando ortogonalmente, da un centro di proiezione all'infinito, sui due piani π_1 e π_2 i *punti qualificanti* la figura oggettiva. In questo modo, si descrive la figura oggettiva due volte: dall'alto (sul P.O., o π_1), in modo da ottenere la *pianta*, e di fronte (sul P.V., o π_2), in modo da ottenere il *prospetto*.

2.1.4. Simbologia

- i punti oggettivi si indicano sempre con *lettere maiuscole*: A, B, C, D, ...
- le rette oggettive si indicano sempre con *lettere minuscole*: r, s, t, u, ...
- i piani oggettivi si indicano sempre con *lettere minuscole dell'alfabeto greco*: α, β, γ, δ, ...

Per non confondere le figure oggettive con le immagini proiettate, si usano degli esponenti che indicano a quale piano si riferisce la proiezione.

L'esponente ' (primo) si utilizza per le proiezioni su π_1; L'esponente '' (secondo) si utilizza per le proiezioni su π_2.

Da ciò deriva che:

- il punto oggettivo A proiettato sul P.O. (π_1) viene contrassegnato con A';
- il punto oggettivo A proiettato sul P.V. (π_2) viene contrassegnato con A'';
- la retta oggettiva r proiettata sul P.O. (π_1) viene contrassegnata con r';
- la retta oggettiva r proiettata sul P.V. (π_2) viene contrassegnata con r'';
- il piano oggettivo α proiettato sul P.O. (π_1) viene contrassegnato con α';
- il piano oggettivo α proiettato sul P.V. (π_2) viene contrassegnato con α''.

2.2.1. Proiezioni ortogonali di punti

Dato un punto P posto nel primo diedro, lo si proietta dal punto all'infinito in direzione ortogonale sul P.O. in P′, e dal punto all'infinito in direzione ortogonale sul P.V. in P′′. Le rette passanti per P si dicono *rette proiettanti* (fig. 9).

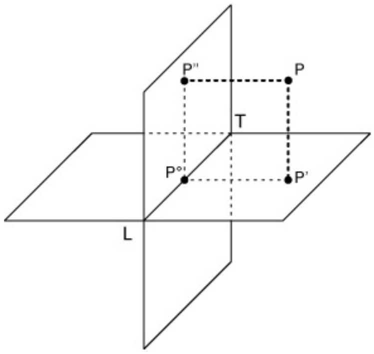

Fig. 9

È interessante osservare come da un punto si ottengano le sue due proiezioni e, al tempo stesso, date le due proiezioni si può risalire al punto P, che rappresenta il punto d'incontro delle due perpendicolari al P.O. e al P.V. da P′ e P′′.

La figura 9 mostra le proiezioni di P su due piani distinti, ma il metodo di Monge prevede che gli elementi da proiettare siano disegnati sullo stesso foglio. Occorre quindi, come abbiamo visto, ribaltare attorno alla linea di terra uno dei due piani, fino a che non coincida con l'altro. In questo modo, le due proiezioni (orizzontale e verticale) si troveranno su un unico piano (fig. 10).

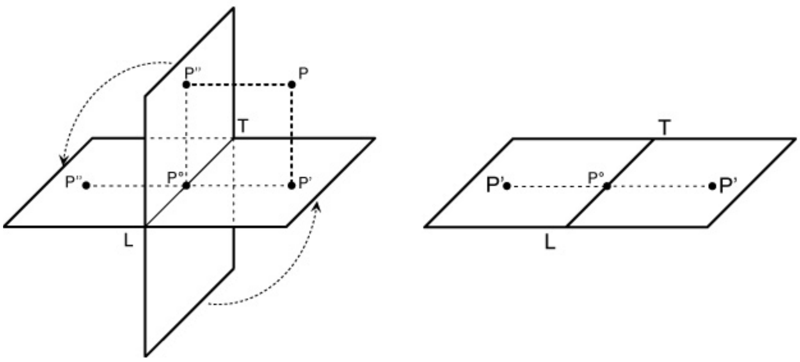

Fig. 10

Osservando la figura, si vede come P′′ descrive nel piano che contiene P, P′ e P′′ (si tratta di un piano normale sia al P.O. che al P.V.) un arco di circonferenza con centro in P° e raggio pari alla distanza fra P°e P′′. A ribaltamento avvenuto, il punto P′ ricade sulla retta che contiene i punti P′′ e P°. Tale retta è perpendicolare alla linea di terra. Quindi per rappresentare un punto col metodo di Monge occorre (fig. 11):

- tracciare un tratto della linea di terra (L.T.);
- tracciare una perpendicolare ad essa (retta di richiamo);
- individuare la proiezione P′ sul P.O. e la proiezione P′′ sul P.V.

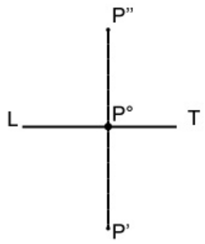

Fig. 11

La distanza da P′′ alla L.T. si chiama *quota*; la distanza da P′ alla L.T. si chiama *aggetto*.

È importante notare fin da ora che P° si può considerare come la proiezione sul P.V. di P′; e naturalmente anche come la proiezione sul P.O. di P′′ (una considerazione che più avanti si rivelerà fondamentale).

2.2.2. Proiezioni ortogonali di punti. Posizioni particolari

Se un punto giace sul semipiano orizzontale anteriore, la proiezione sul P.O. coincide con il punto stesso (punto unito), mentre la proiezione sul P.V. cade sulla L.T. (fig. 12).

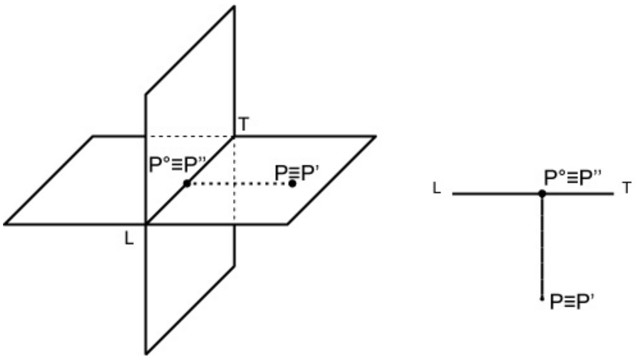

Fig. 12

Se un punto giace sul semipiano verticale superiore, la proiezione sul P.V. coincide con il punto stesso (punto unito), mentre la proiezione sul P.O. cade sulla L.T. (fig. 13).

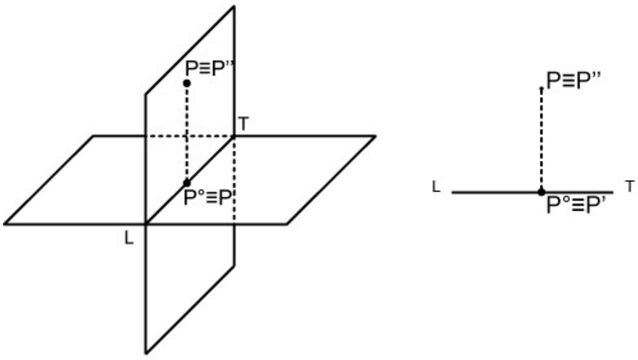

Fig. 13

Se un punto appartiene alla linea di terra, le sue proiezioni coincidono con il punto stesso e il punto si definisce *unito* (fig. 14).

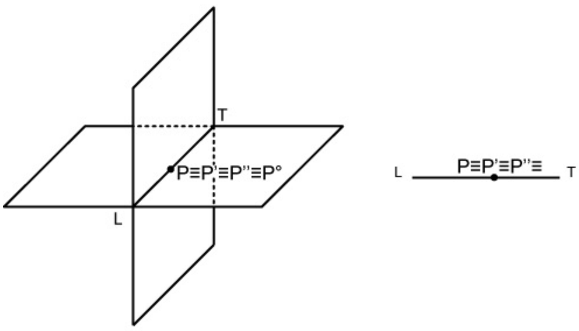

Fig. 14

2.2.3. Proiezioni ortogonali di punti. Esercizi di verifica

Proiettare un punto distante 10 cm dal P.O. (quota) e 16 cm dal P.V. (aggetto)

Proiettare un punto appartenente al P.O. e distante 14 cm dal P.V. (in tal caso, e nel caso seguente, la figura oggettiva coincide con una delle due immagini proiettate e si definisce *punto unito*).

Proiettare un punto appartenente al P.V. e distante 11 cm dal P.O.

Proiettare un punto appartenente al piano bisettore del primo diedro.

Proiettare un punto appartenente alla L.T.

2.3.1. Proiezioni ortogonali di segmenti

Si definisce *segmento* una parte di retta limitata da due punti, detti *estremi* del segmento. La proiezione ortogonale di segmenti si può ricondurre alla proiezione ortogonale dei punti che ne costituiscono le estremità.

Le innumerevoli posizioni spaziali si riducono alle seguenti categorie:

- segmenti inclinati rispetto ai piani di proiezione;
- segmenti perpendicolari a un piano di proiezione (e, quindi, paralleli all'altro);
- segmenti paralleli a un piano di proiezione e inclinati rispetto all'altro
- segmenti paralleli a entrambi i piani di proiezione.

2.3.2. Rappresentazione di un segmento inclinato ai due P.P.

Per rappresentare il segmento occorre ricavare le proiezioni dei due estremi. Il problema si può quindi ricondurre alla proiezione ortogonale di punti. La figura 15 mostra le proiezioni ortogonali di un segmento inclinato rispetto ai due piani di proiezione.

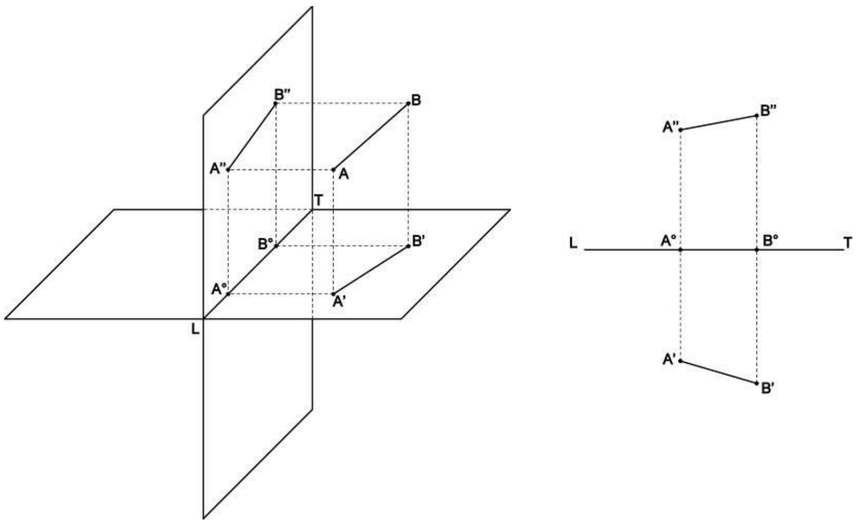

Fig. 15

2.3.3. Rappresentazione di un segmento perpendicolare al P.O.

Sul P.O. il segmento appare come un punto, costituito da A' e B' coincidenti, mentre la proiezione sul P.V. è perpendicolare alla linea di terra. Le dimensioni del segmento proiettato sul P.V. (A''B'') sono uguali alla lunghezza reale del segmento AB (fig. 16).

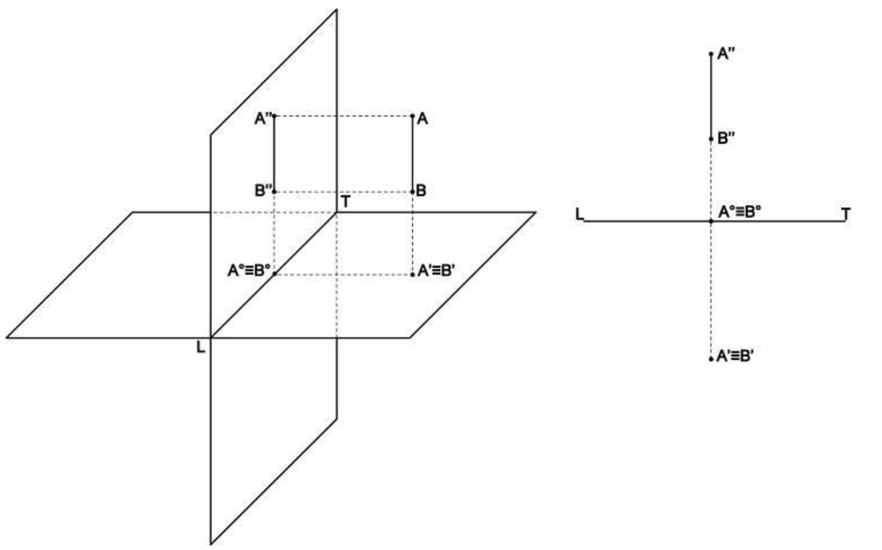

Fig. 16

2.4.1. Proiezioni ortogonali di rette

La proiezione ortogonale di una retta su un piano è un'altra retta; si realizza attraverso infinite proiettanti ortogonali al piano di proiezione e passanti per gli infiniti punti della retta; tale proiettanti definiscono un piano ortogonale al piano di proiezione.

I punti di intersecazione di una retta coi piani del diedro si chiamano *tracce della retta*. Si indicano col simbolo "T" al quale si affianca un numero corrispondente al piano secato e una lettera corrispondente al nome della retta ("T_1r", "T_2r", "T_2s", "T_1t", ecc.).

Poiché "per due punti si può condurre una e una sola retta", *una retta risulta individuata dalle sue tracce*.

Naturalmente, le tracce reali (cioè i punti di intersecazione della retta con i piani del diedro) sono proiettabili sugli altri piani. Questo concetto è di fondamentale importanza per la costruzione delle rette con il metodo di Monge; infatti, visto che per due punti si può condurre una e una sola retta, tali punti possono essere costituiti sia dalle tracce oggettive della intersecazione della retta con il piano, sia dalle proiezioni delle tracce sui piani.

Per cui *le proiezioni ortogonali di una retta si ottengono proiettando su ogni piano del diedro due punti appartenenti alla retta oggettiva e conducendo per essi, piano per piano, una linea, la quale rappresenta la retta-immagine su quel piano.*

Le innumerevoli posizioni spaziali si possono ricondurre alle seguenti categorie:

- *rette generiche*, appartenenti a piani variamente inclinati ai piani del diedro;
- *rette parallele a un piano di proiezione* ("orizzontali", "frontali");
- *rette di profilo;*
- *rette perpendicolari a un piano di proiezione* ("proiettanti").

Ripetiamo ancora questo concetto fondamentale: nel metodo di Monge, una retta si rappresenta mediante le sue *tracce* e le sue *proiezioni*. Le *tracce di una retta* sono i punti di intersezione della retta stessa con i piani di proiezione. L'intersezione della retta con il P.O. si chiama traccia orizzontale. L'intersezione della retta con il P.V. si chiama traccia verticale. Le *proiezioni di una retta* sono il luogo geometrico delle proiezioni di tutti i suoi punti sui piani di proiezione. Per determinare le proiezioni di una retta r bisogna considerare due piani che contengono la retta, uno perpendicolare al P.O. e l'altro perpendicolare al P.V. (fig. 17).

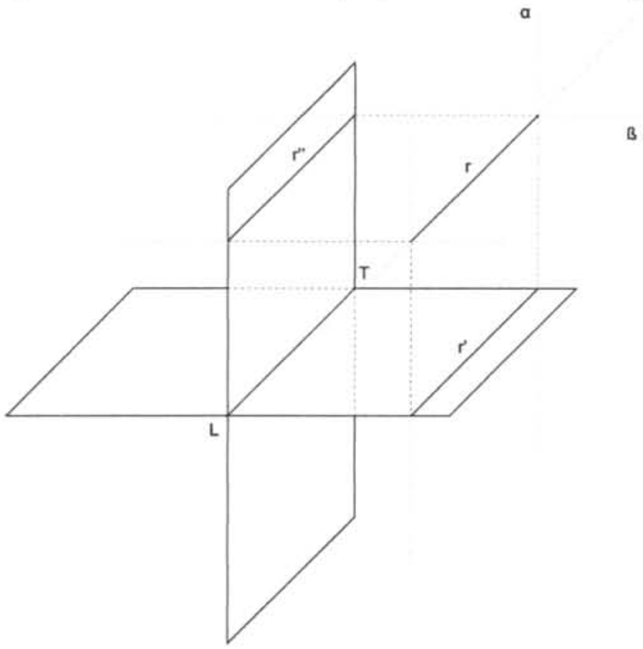

Fig. 17

Questi piani (α, β) si chiamano *piani proiettanti*. Le rette di intersezione dei piani proiettanti contenenti la retta con i piani di proiezione costituiscono le proiezioni della retta (r', proiezione orizzontale, r'', proiezione verticale).

In questo esempio, le tracce della retta sono all'infinito. Infatti la retta, essendo parallela ai due piani di proiezione, li interseca in un punto improprio.

2.4.2. Retta inclinata ai piani di proiezione (retta "generica")

Sia data una retta generica r, inclinata ai piani di proiezione (fig. 18). Indichiamo con T_1r la traccia orizzontale e con T_2r la traccia verticale. Per determinare le due proiezioni, occorre considerare, come già visto nella fig. 17, due piani α e β, contenenti la retta r e perpendicolari rispettivamente al P.O e al P.V. I due piani determinano le proiezioni r′ e r″.

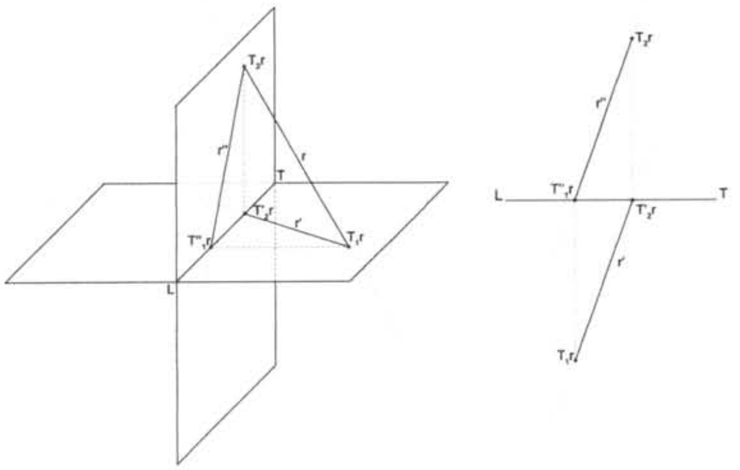

Fig. 18

Per rappresentare la retta sul piano del foglio da disegno, si procede nel seguente modo:

- si traccia una linea orizzontale (L.T.);
- si fissano T_1r (traccia orizzontale di r) e T_2r (traccia verticale di r);
- si proiettano, sulla linea di terra, T'_2r (proiezione di T_2r sul P.O.) e T''_1r (proiezione di T_1r sul P.V.);
- si congiunge T_1r con T'_2r, determinando r′; si congiunge T_2r con T''_1r, determinando r″.

2.4.3. Retta parallela al P.O. e inclinata al P.V. (retta "orizzontale")

Sia data una retta r parallela al P.O. e inclinata al P.V. (fig. 19). La proiezione mediante piani contenenti la retta e ortogonali al P.O. e al P.V. determinerà le proiezioni r′ e r″. È interessante notare il fatto che r″ sia parallela alla L.T., e che T_1r sia all'infinito.

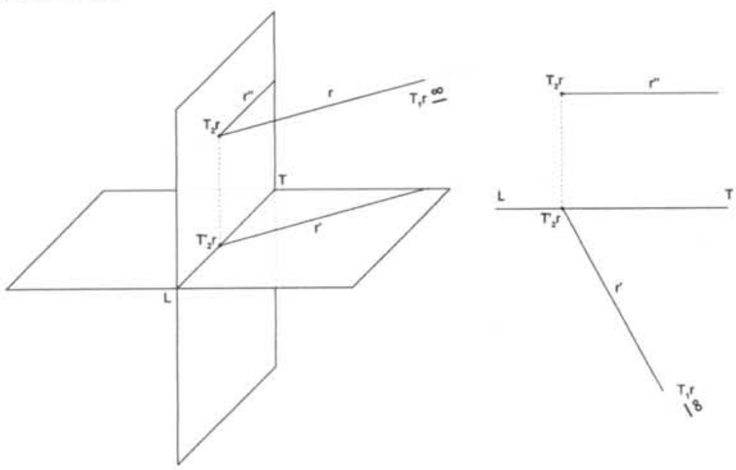

Fig. 19

Per rappresentare la retta sul piano del foglio da disegno, si procede nel seguente modo:

- si traccia una linea orizzontale (L.T.);
- si fissa la direzione di T_1r (traccia orizzontale di r, posta all'infinito) e T_2r (traccia verticale di r);
- si proietta, sulla linea di terra, T'_2r (proiezione di T_2r sul P.O.);
- si costruisce la semiretta con vertice T'_2r in direzione di T_1r, determinando r′; si costruisce la semiretta con vertice T_2r in direzione parallela alla L.T. (la retta è orizzontale e tutti i suoi punti hanno uguale quota), determinando r″.

2.4.4. Retta parallela al P.V. e inclinata al P.O. (retta "frontale")

Sia data una retta r parallela al P.V. e inclinata al P.O. (fig. 20). Si tratta di un caso analogo al precedente. Naturalmente, stavolta r′ è parallela alla L.T., mentre T_2r è all'infinito.

Per rappresentare la retta sul piano del foglio da disegno, si procede nel seguente modo:

- si fissa la T_1r (traccia orizzontale di r) e la direzione di T_2r (traccia verticale di r, posta all'infinito);
- si proietta, sulla linea di terra, T''_1r (proiezione di T_1r sul P.V.);
- si costruisce la semiretta con vertice T''_1r in direzione di T_2r, determinando r′′; si costruisce la semiretta con vertice T_1r in direzione parallela alla L.T., determinando r′.

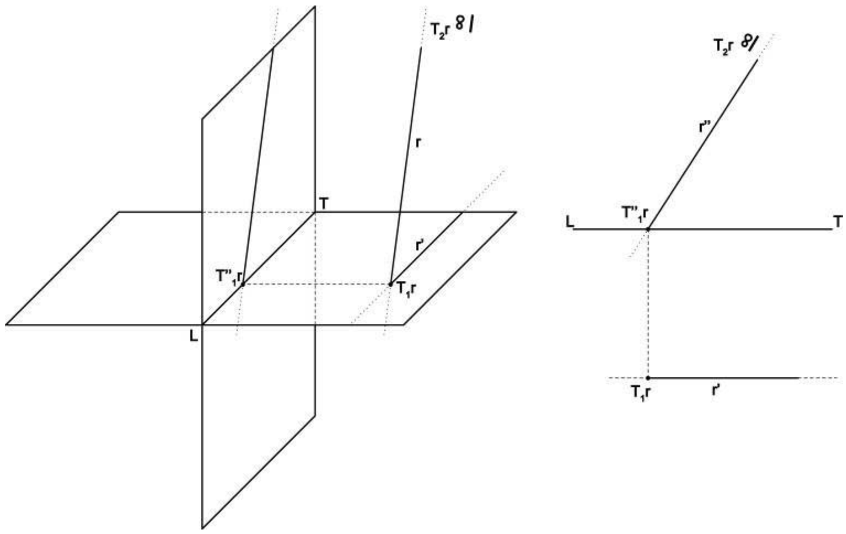

Fig. 20

2.4.5. Retta perpendicolare al P.O. (retta "proiettante" in prima proiezione)

Sia data una retta r perpendicolare al P.0. (fig. 21). La proiezione mediante un unico piano ortogonale sia al P.O. che al P.V. determinerà, sul P.O., un punto che corrisponderà sia a T_1r che a r′. Sul P.V., invece, T_2r sarà all'infinito.

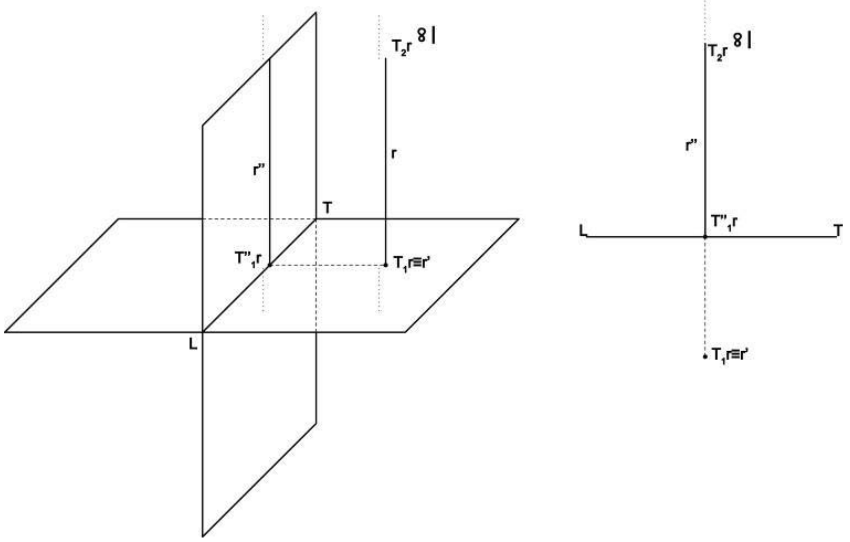

Fig. 21

Per rappresentare la retta sul piano del foglio da disegno, si procede nel seguente modo:

- si fissa la T_1r e la direzione di T_2r;
- si proietta, sulla linea di terra, T''_1r (proiezione di T_1r sul P.V.);
- si costruisce la semiretta con vertice T''_1r in direzione di T_2r, determinando r′′ (mentre r′, come già visto, è un punto coincidente con T_1r).

2.4.6. Retta passante per la linea di terra

Sia data una retta r passante per la L.T. (fig. 22). La proiezione mediante piani contenenti la retta e ortogonali al P.O. e al P.V. determinerà le proiezioni r′ e r′′. Per tracciare le proiezioni occorrerà individuare un punto ausiliario P, ad essa appartenente.

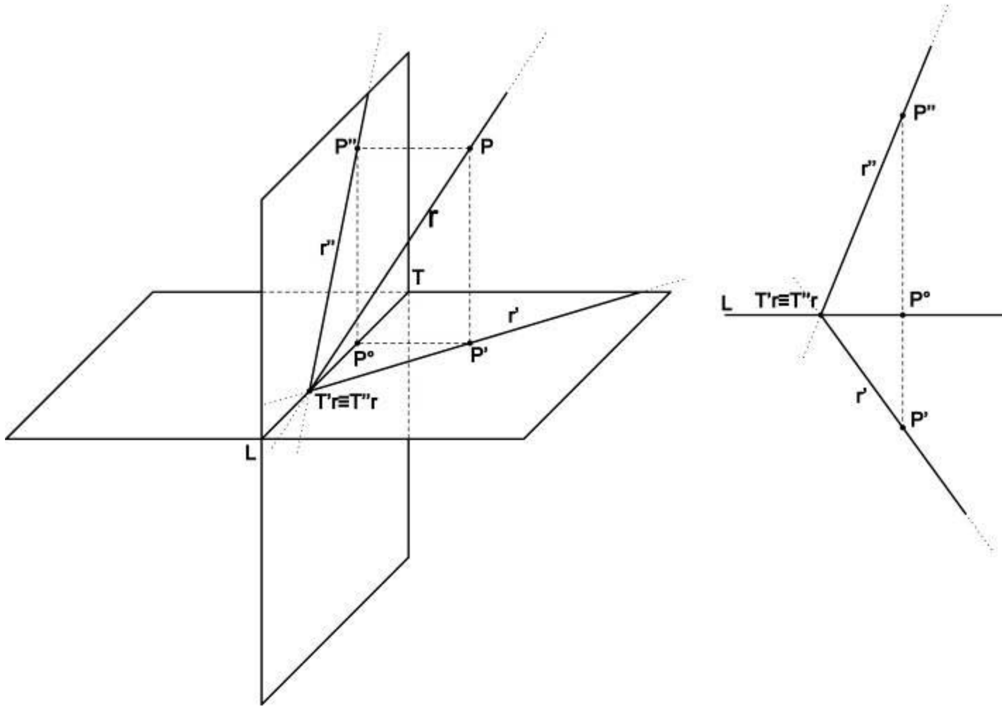

Fig. 22

Per rappresentare la retta sul piano del foglio da disegno, si procede nel seguente modo:

- si traccia una linea orizzontale (L.T.);
- si fissa sulla linea di terra T_1r e T_2r;
- si determinano P′ e P′′, proiezioni del punto ausiliario appartenenti a r;
- visto che il punto P appartiene alla retta, anche le sue proiezioni apparterranno alle proiezioni della retta; pertanto si congiunge T_1r con P′, e T_2r con P′′, determinando r′ e r′′.

2.4.7. Rette parallele

Due rette sono parallele se le proiezioni omonime sono parallele (fig. 23).

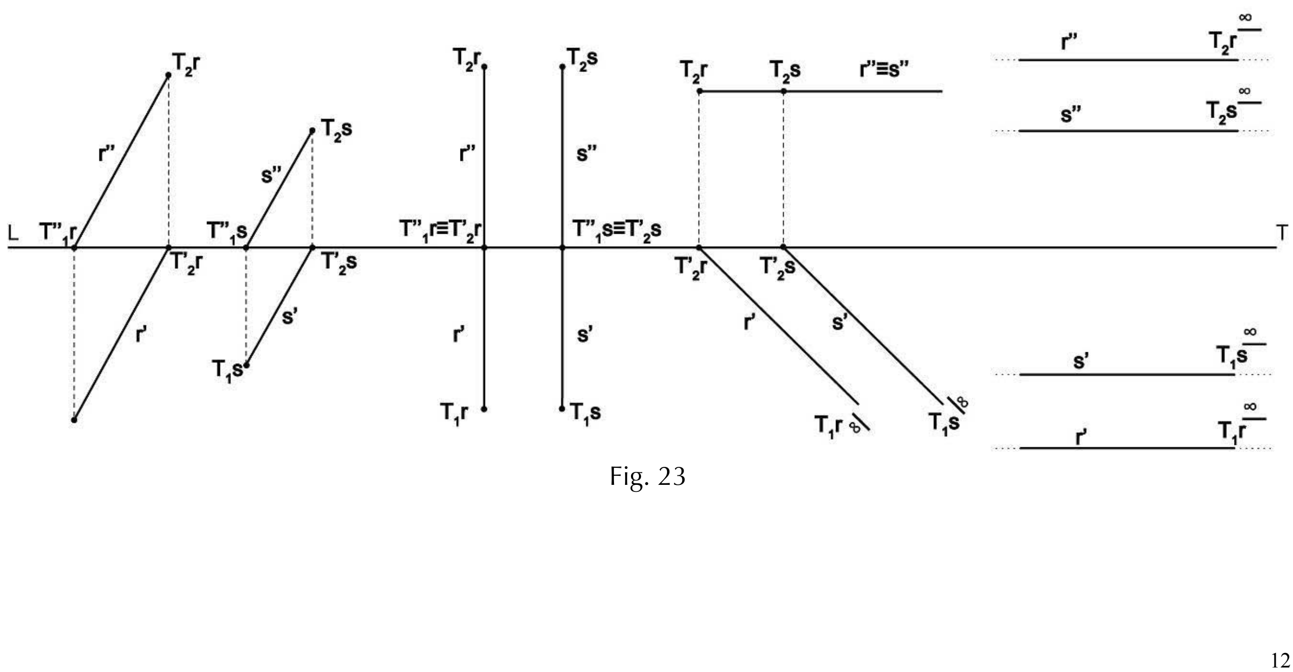

Fig. 23

2.4.8. Rette incidenti. Rette sghembe

Due rette si dicono incidenti quando hanno un punto in comune; il punto d'intersezione delle loro proiezioni omonime appartiene alla stessa retta di richiamo (fig. 24).

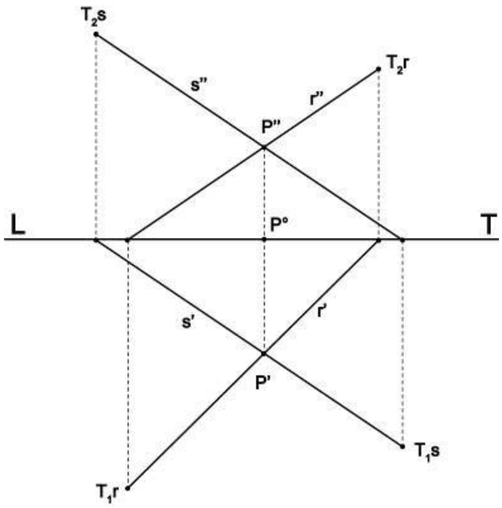

Fig. 24

Due rette si dicono sghembe quando non appartengono allo stesso piano; il punto di intersezione delle loro proiezioni omonime non appartiene alla stessa retta di richiamo (fig. 25).

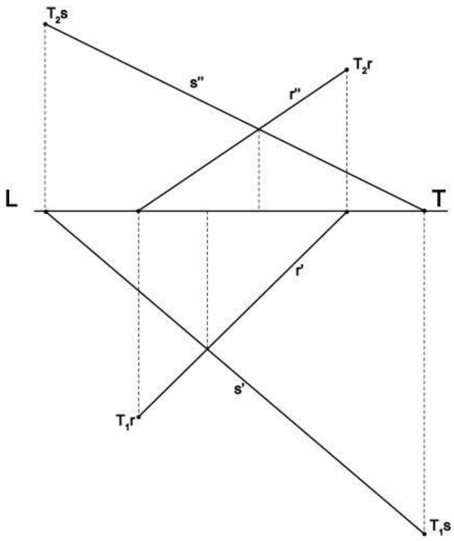

Fig. 25

2.4.9. Proiezioni ortogonali di segmenti e rette. Esercizi di verifica

Disegnare un segmento parallelo alla L.T. e ai due piani di proiezione

Disegnare un segmento parallelo al P.O. e inclinato al P.V.

Disegnare un segmento parallelo al P.V. e inclinato al P.O.

Disegnare un segmento perpendicolare al P.V.

Date due tracce T_1r e T_2r, determinare le proiezioni della retta da loro individuate

Date due proiezioni di una retta r' ed r'', determinare le proiezioni delle tracce

Disegnare una retta parallela alla linea di terra

Disegnare una retta perpendicolare al P.V. (retta "proiettante" in seconda proiezione)

Disegnare una retta di profilo

Disegnare due rette incidenti, determinando la prima e la seconda proiezione del loro punto di intersezione

Disegnare due rette sghembe

2.5.1. Proiezioni ortogonali di piani

Un piano può essere individuato da due rette o da tre punti non allineati. Un piano α in proiezione ortogonale si rappresenta mediante le sue *tracce*, cioè le rette di intersezione del piano stesso con i piani di proiezione. La retta di intersezione del piano α con il Piano Orizzontale si definisce $t_1\alpha$; la retta di intersezione del piano α con il Piano Verticale si definisce $t_2\alpha$.

2.5.2. Piano inclinato ai piani di proiezione (piano generico)

Sia dato un piano α, inclinato ai piani di proiezione (fig. 26). Sul piano del disegno, le tracce risulteranno inclinate alla L.T.

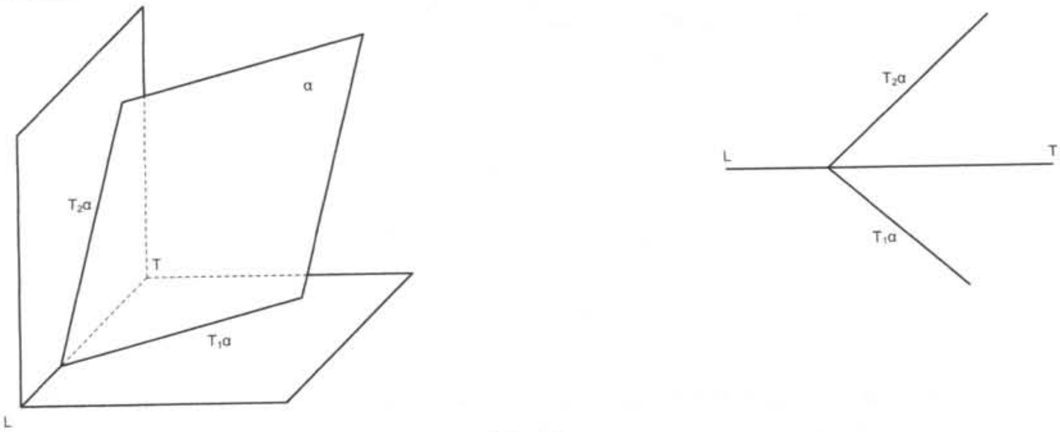

Fig. 26

2.5.3. Piano parallelo al piano verticale

Sia dato un piano α, parallelo al P.V. (fig. 27). La traccia $t_1\alpha$ è parallela alla L.T., mentre la traccia $t_2\alpha$ è all'infinito. Sul piano del disegno, si traccia solo $t_1\alpha$.

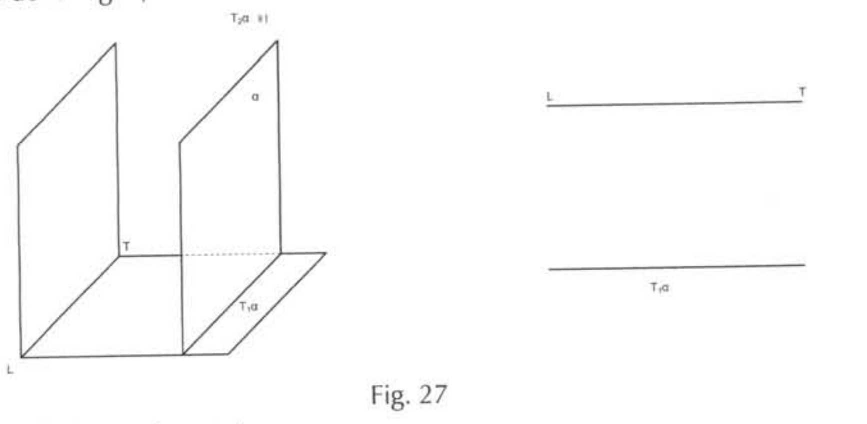

Fig. 27

2.5.4. Piano parallelo al piano orizzontale

Sia dato un piano α, parallelo al P.O. (fig. 28). La traccia $t_2\alpha$ è parallela alla L.T., mentre la traccia $t_1\alpha$ è all'infinito. Sul piano del disegno, si traccia solo $t_2\alpha$.

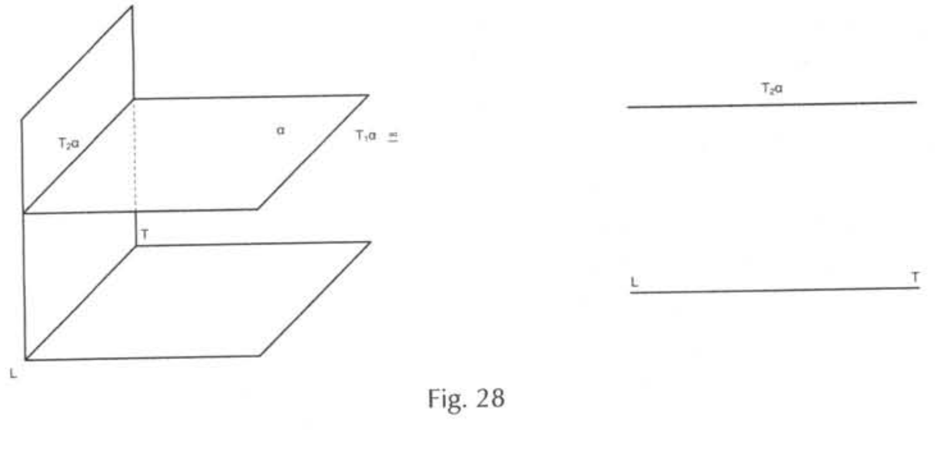

Fig. 28

2.5.5. Piano perpendicolare al piano orizzontale e inclinato al piano verticale

Sia dato un piano α, perpendicolare al piano orizzontale e inclinato al piano verticale (fig. 29). La traccia $t_1\alpha$ è inclinata alla L.T., mentre la traccia $t_2\alpha$ è perpendicolare alla L.T.

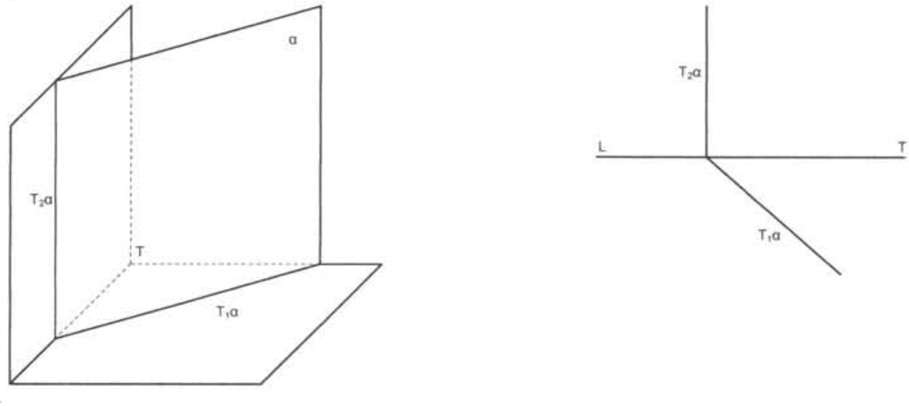

Fig. 29

2.5.6. Piano perpendicolare al piano verticale e inclinato al piano orizzontale

Sia dato un piano α, perpendicolare al piano verticale e inclinato al piano orizzontale (fig. 30). La traccia $t_1\alpha$ è perpendicolare alla L.T., mentre la traccia $t_2\alpha$ è inclinata alla L.T.

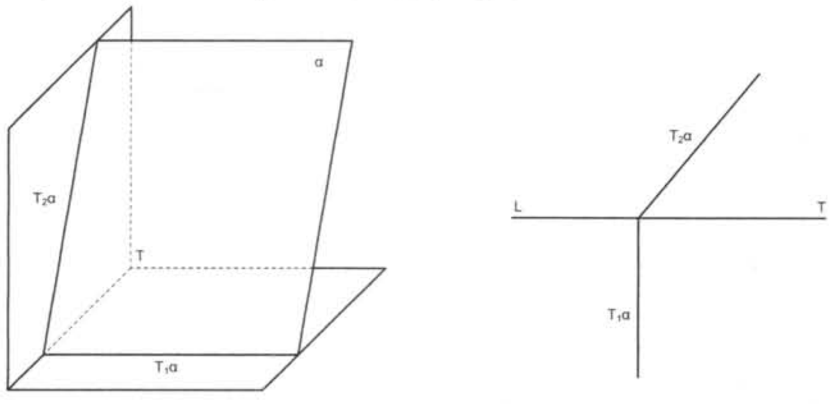

Fig. 30

2.5.7. Piano perpendicolare ai due piani di proiezione (piano di profilo)

Sia dato un piano α, perpendicolare a entrambi i piani di proiezione (fig. 31). Le tracce $t_1\alpha$ e $t_2\alpha$ sono entrambe perpendicolari alla L.T.

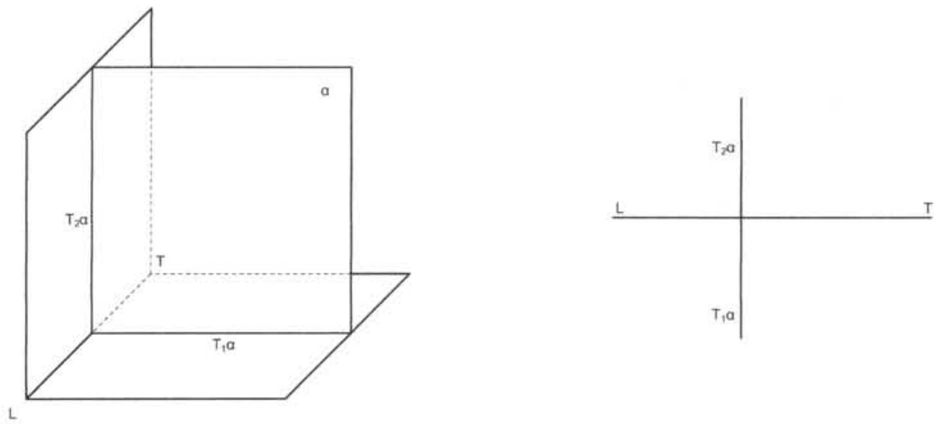

Fig. 31

2.5.8. Piano parallelo alla linea di terra e appoggiato ai due piani di proiezione

Sia dato un piano α, parallelo alla L.T. e appoggiato ai due piani di proiezione (fig. 32). Le tracce $t_1\alpha$ e $t_2\alpha$ sono entrambe parallele alla L.T.

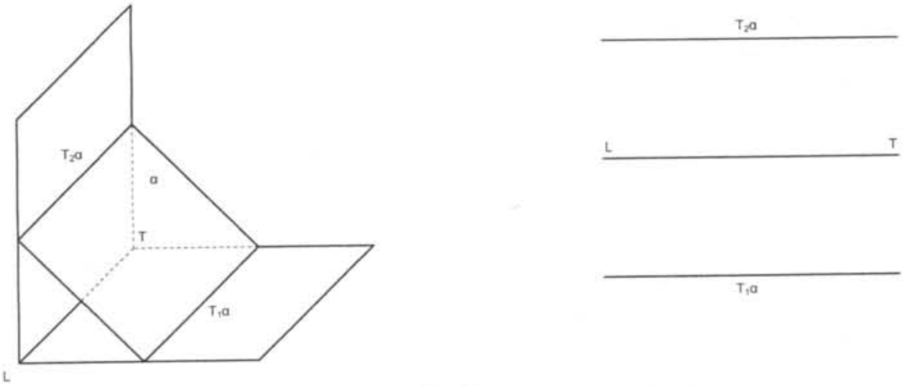

Fig. 32

2.5.9. Piano passante dalla linea di terra

Sia dato un piano α, passante dalla L.T. (fig. 33). Le tracce $t\alpha_1$ e $t\alpha_2$ coincidono con la L.T.

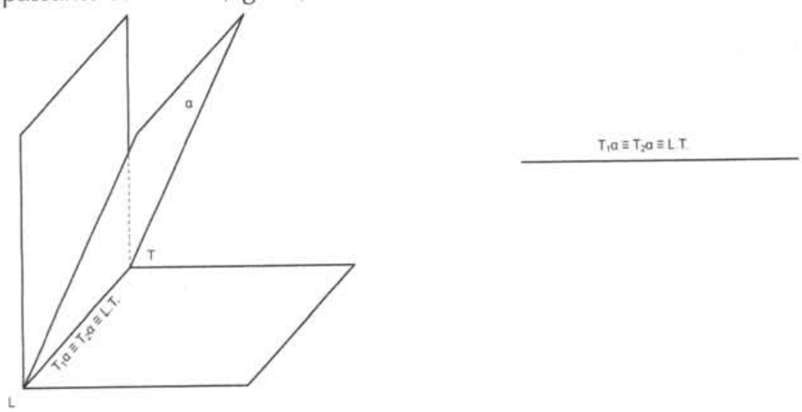

Fig. 33

Tuttavia, dal momento che dalla linea di terra passano infiniti piani, per poter individuare l'esatta posizione di α occorre fissare un punto P appartenente ad esso e far passare dal punto P un terzo piano di proiezione γ (Piano Laterale). Sarà cosi possibile effettuare la proiezione ortogonale del punto P sui tre piani di proiezione (P.O., P.V., P.L.) determinando la traccia $T_3\alpha$, la quota e l'aggetto del punto P e, quindi, la posizione nello spazio del piano α (fig. 34).

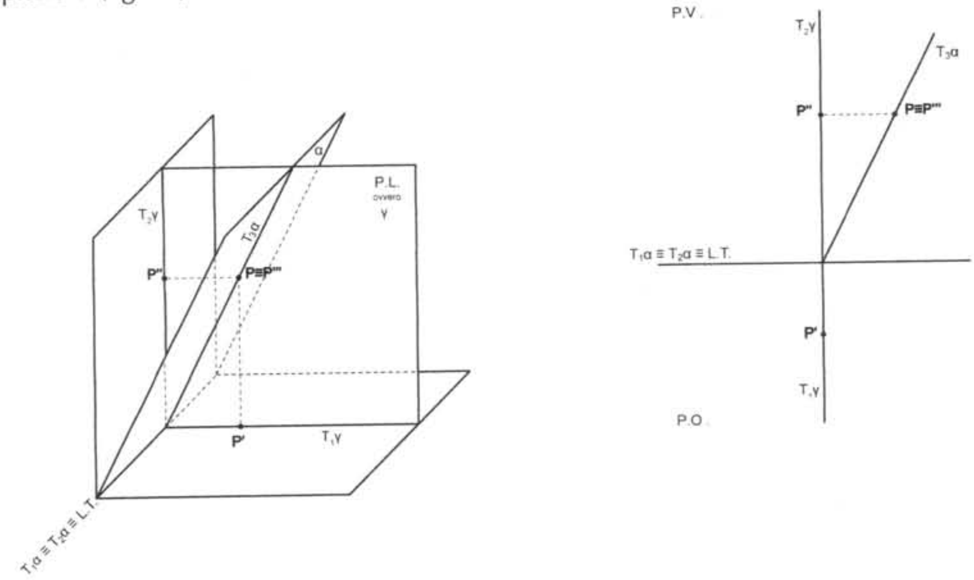

Fig. 34

2.5.10. Piani paralleli fra loro

Nelle proiezioni di Monge, due piani sono paralleli quando le tracce omonime sono parallele (fig. 35).

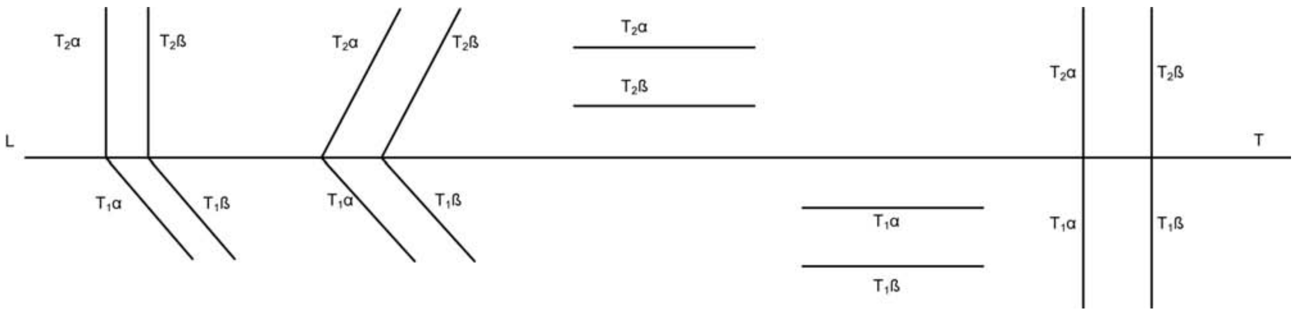

Fig. 35

2.6.1. Condizioni di appartenenza. Punto appartenente a una retta

Condizione necessaria e sufficiente perché un punto appartenga a una retta è che *le proiezioni del punto appartengano alle proiezioni omonime della retta* (fig. 36).

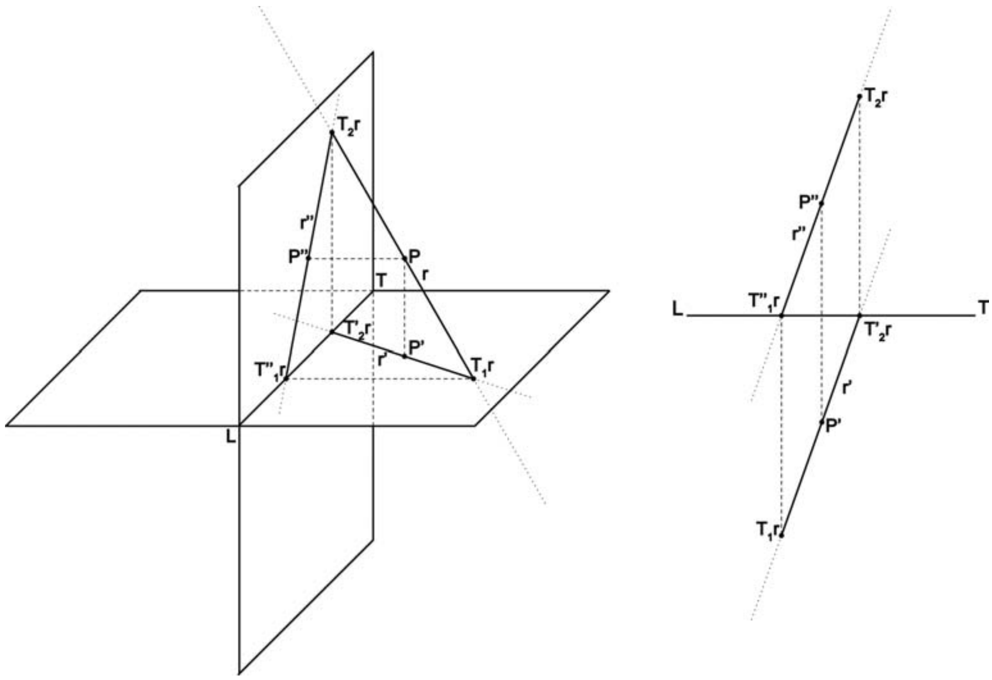

Fig. 36

2.6.2. Retta appartenente a un piano

Condizione necessaria e sufficiente affinché una retta appartenga a un piano è *che le sue tracce giacciano sulle tracce omonime del piano*.

2.6.3. Retta generica appartenente a un piano generico

Si verifica (fig. 37) la condizione esposta nel paragrafo precedente.

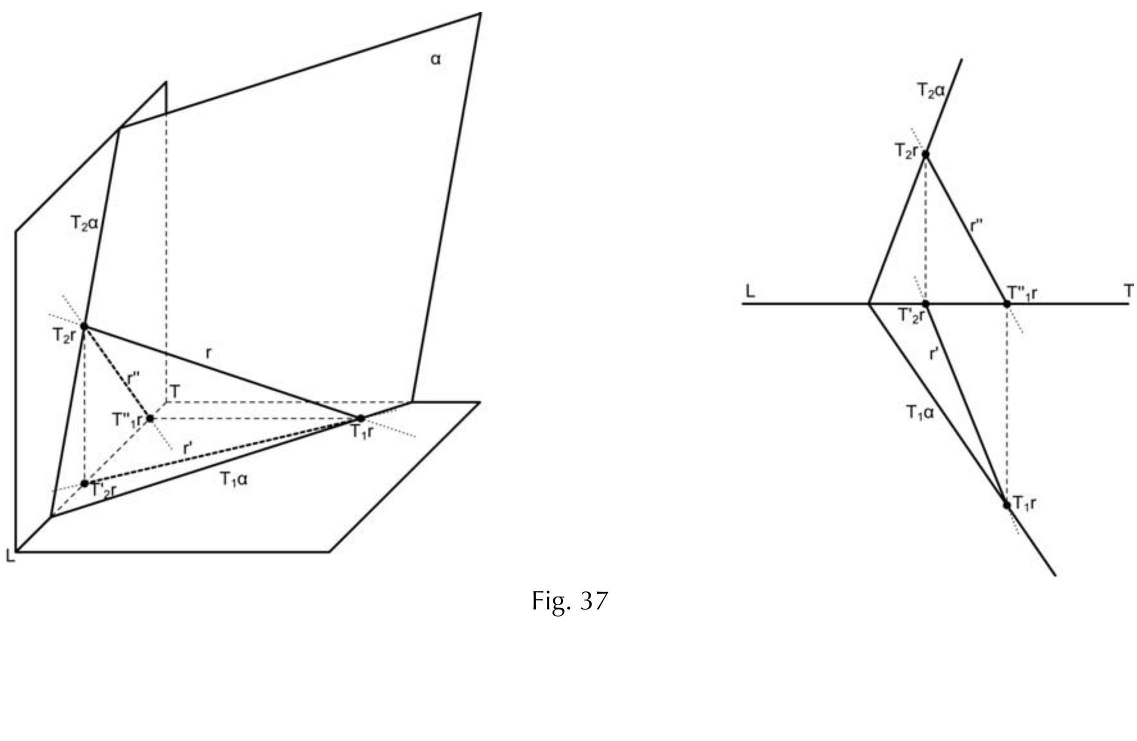

Fig. 37

2.6.4. Retta parallela al P.V. e inclinata al P.O., appartenente a un piano generico

La prima proiezione della retta (r') è parallela alla L.T. (fig. 38). Dall'intersezione di r' con $T_1\alpha$ si ottiene T_1r. La proiezione r'' sarà parallela a $T_2\alpha$, T_2r sarà all'infinito.

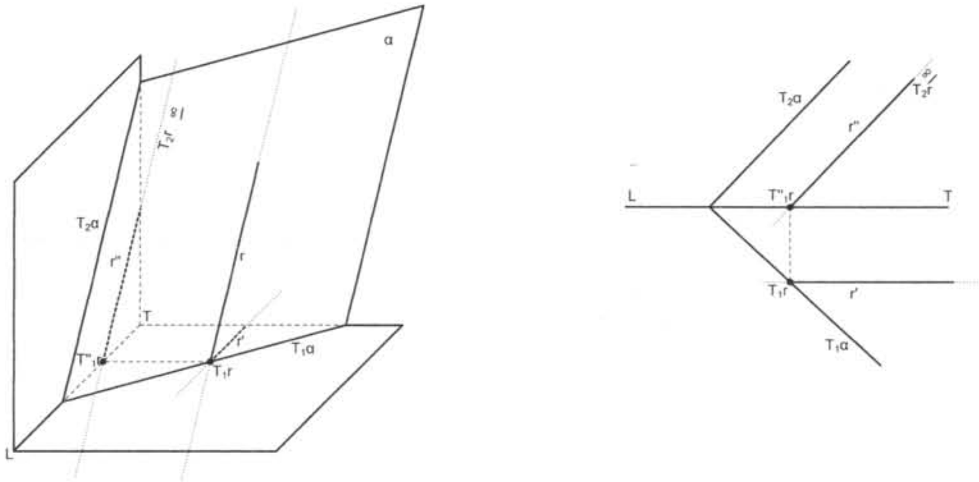

Fig. 38

2.6.5. Retta parallela al P.O. e inclinata al P.V., appartenente a un piano generico

Il caso (fig. 39) è analogo al precedente.

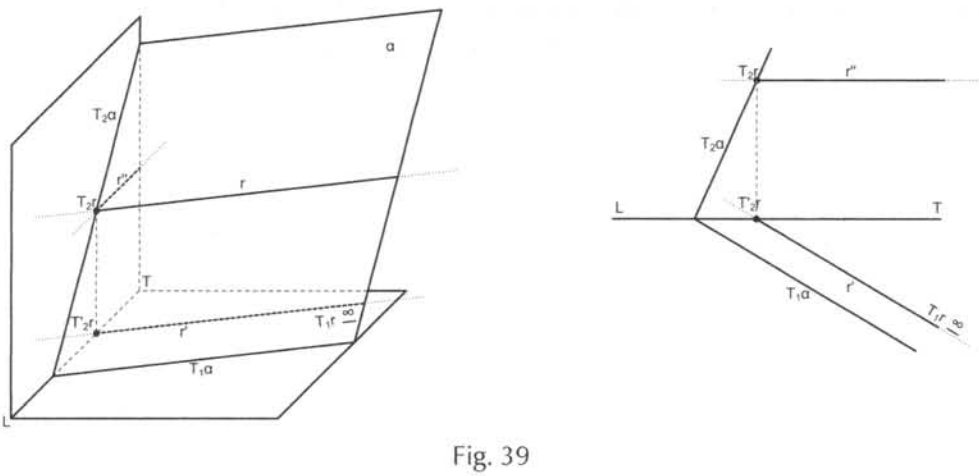

Fig. 39

2.6.6. Retta perpendicolare al P.O., appartenente a un piano perpendicolare al P.O. e inclinato al P.V.

La proiezione r′ coincide con T_1r; entrambe giacciono su $T_1\alpha$ (fig. 40). La proiezione r″ sarà parallela a $T_2\alpha$ e perpendicolare alla L.T., mentre la T_2r è all'infinito.

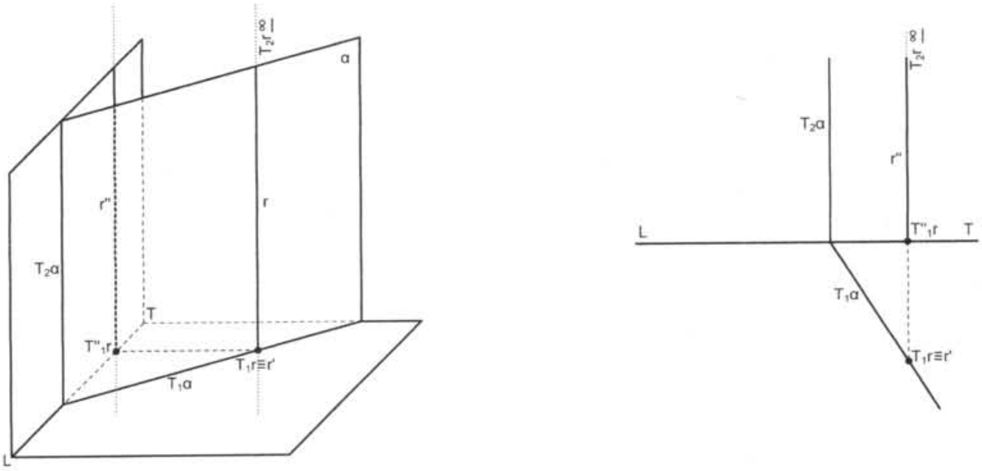

Fig. 40

2.6.7. Retta perpendicolare al P.V., appartenente a un piano perpendicolare al P.V. e inclinato al P.O.

Il caso è analogo al precedente; si omette la costruzione del disegno.

2.6.8. Retta generica, appartenente a un piano perpendicolare al P.O. e inclinato al P.V.

La proiezione r′ coincide con $T_1\alpha$, la traccia T_1r giacerà sempre su $T_1\alpha$; la proiezione r″ sarà inclinata alla L.T. e la traccia T_2r giacerà su $T_2\alpha$ (fig. 41).

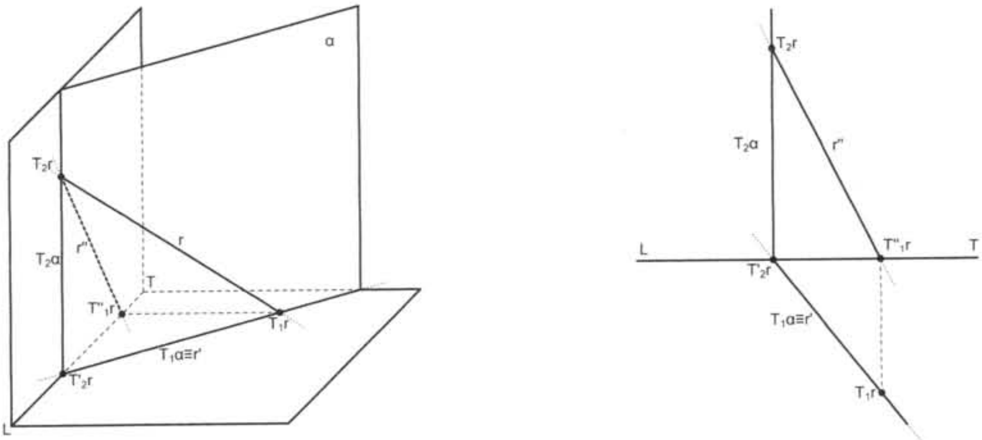

Fig. 41

2.6.9. Retta generica, appartenente a un piano perpendicolare al P.V. e inclinato al P.O.

Il caso è analogo al precedente; si omette la costruzione del disegno.

2.6.10. Punto appartenente a un piano

Un punto appartiene a un piano quando appartiene a una retta del piano, dunque quando *le proiezioni del punto appartengono alle proiezioni omonime di una retta appartenente al piano*. La fig. 42 mostra un punto P appartenente a piani diversi (piano generico, piano proiettante rispetto al P.O., piano proiettante rispetto al P.V., piano parallelo alla L.T.).

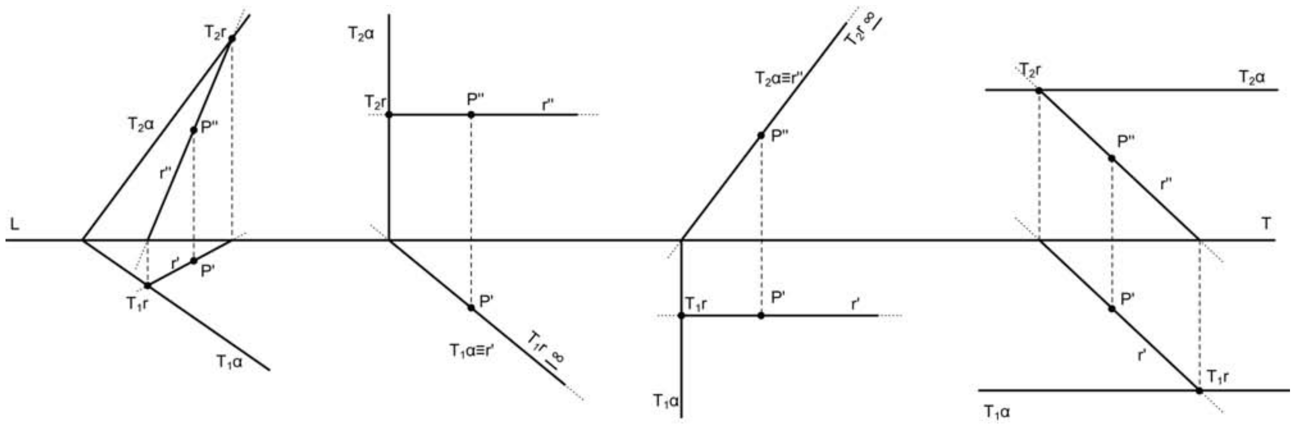

Fig. 42

2.6.11. Esercizi di verifica

Dati due punti distinti, trovare la retta passante per essi

Date due rette incidenti, trovare il piano da esse individuato

Data una retta, rappresentare alcuni piani passanti per essa

Dati due piani generici, trovare la loro retta comune

Dati un piano generico e un piano proiettante rispetto al P.O., trovare la loro retta comune

Dati un piano generico e un piano proiettante rispetto al P.V., trovare la loro retta comune

Dati due piani proiettanti rispetto al P.O., trovare la loro retta comune

Dati due piani proiettanti rispetto al P.V., trovare la loro retta comune

2.6.12. Esercizio. Dati una retta generica r e un punto P non appartenente ad essa, determinare il piano da essi individuato

Dopo aver disegnato il punto P (mediante le sue proiezioni) e la retta r (mediante le sue trecce e le sue proiezioni – fig. 43) si tracci una retta s passante per P e parallela ad r. La retta s e la retta r, e naturalmente il punto P, apparterranno al piano, che potrà essere tracciato osservando le condizioni di appartenenza (fig. 44).

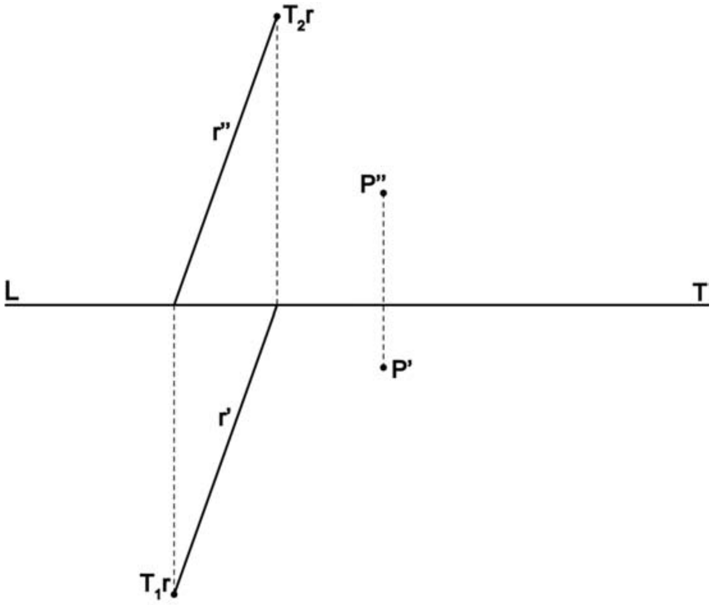

Fig. 43

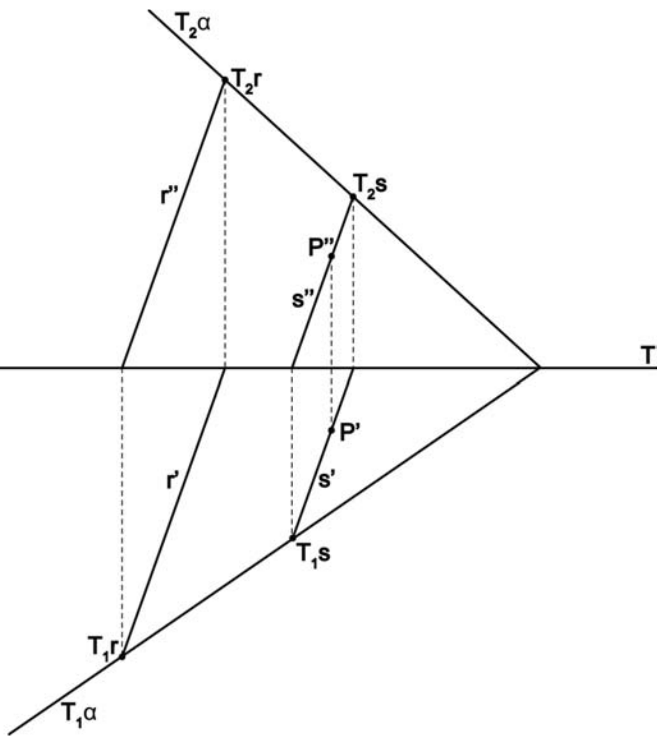

Fig. 44

2.6.13. Esercizio. Dati tre punti non allineati, determinare il piano da essi individuato

Dopo avere disegnato i tre punti P, Q e R (fig. 45), bisogna tracciare una retta che unisca due di essi; per esempio, la retta r, che unisce P e Q (fig. 46).

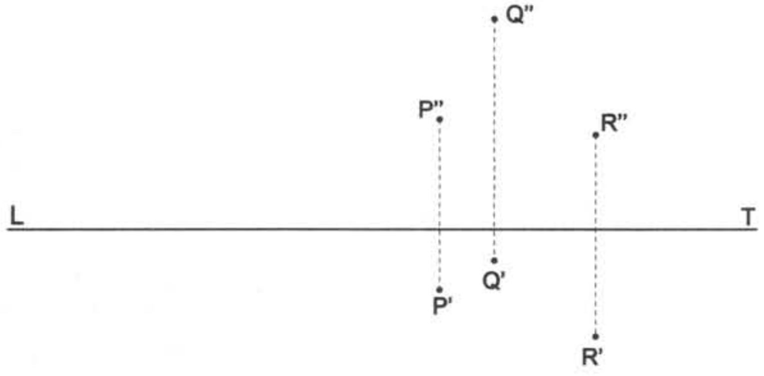

Fig. 45

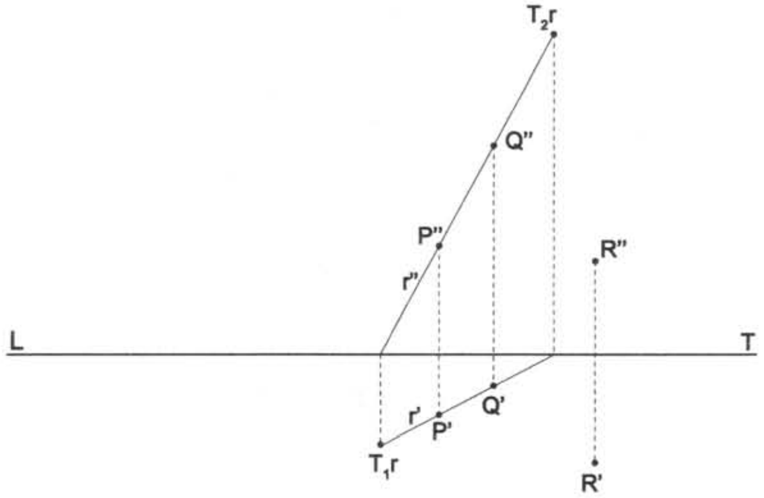

Fig. 46

A questo punto, basterà disegnare una retta che unisca altri due punti (per esempio, la retta s, che unisce Q con R). A questo punto sarà possibile tracciare il piano α, sulle le cui tracce, per le condizioni di appartenenza, giaceranno le tracce omonime delle rette r ed s (fig. 47).

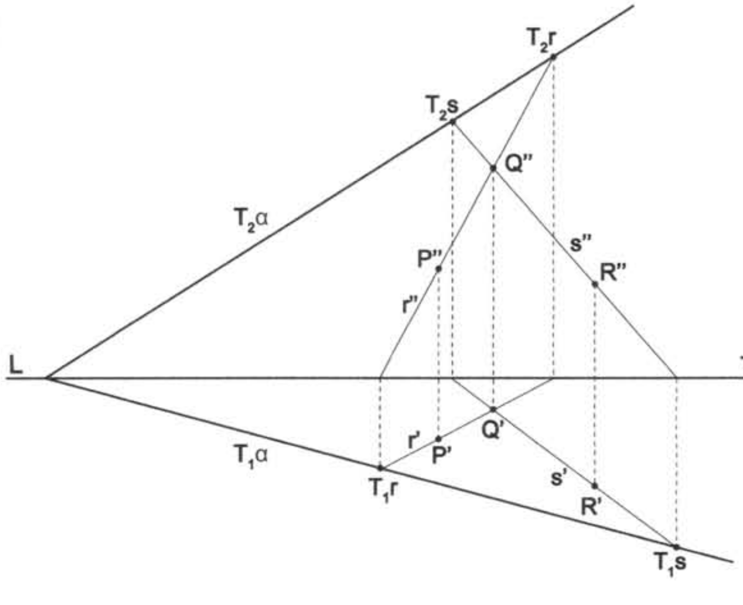

Fig. 47

2.6.14. Retta di intersezione tra due piani

Quando due piani si intersecano, hanno una retta in comune. Le tracce della retta sono il punto di intersezione delle tracce omonime dei due piani. Dalle tracce della retta si ricavano le sue proiezioni (fig. 48).

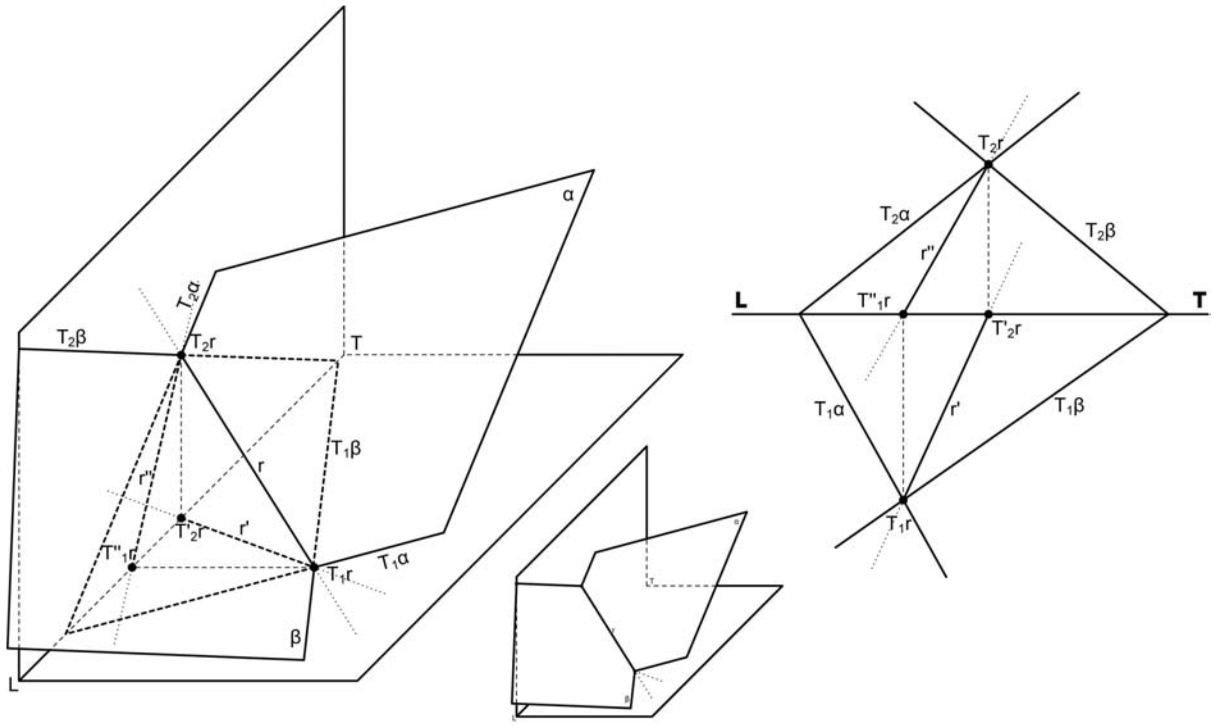

Fig. 48

2.6.15. Intersezione di due piani proiettanti rispetto al P.O. (fig. 49)

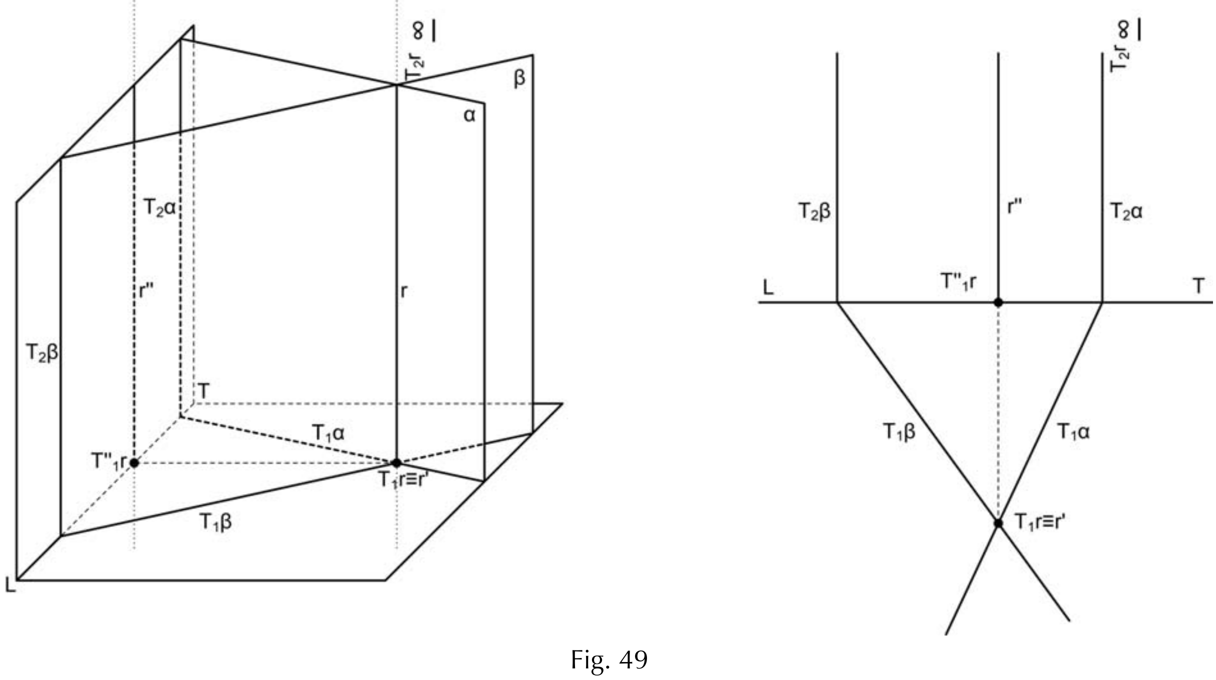

Fig. 49

2.6.16. Intersezione di due piani proiettanti rispetto al P.V. (fig. 50)

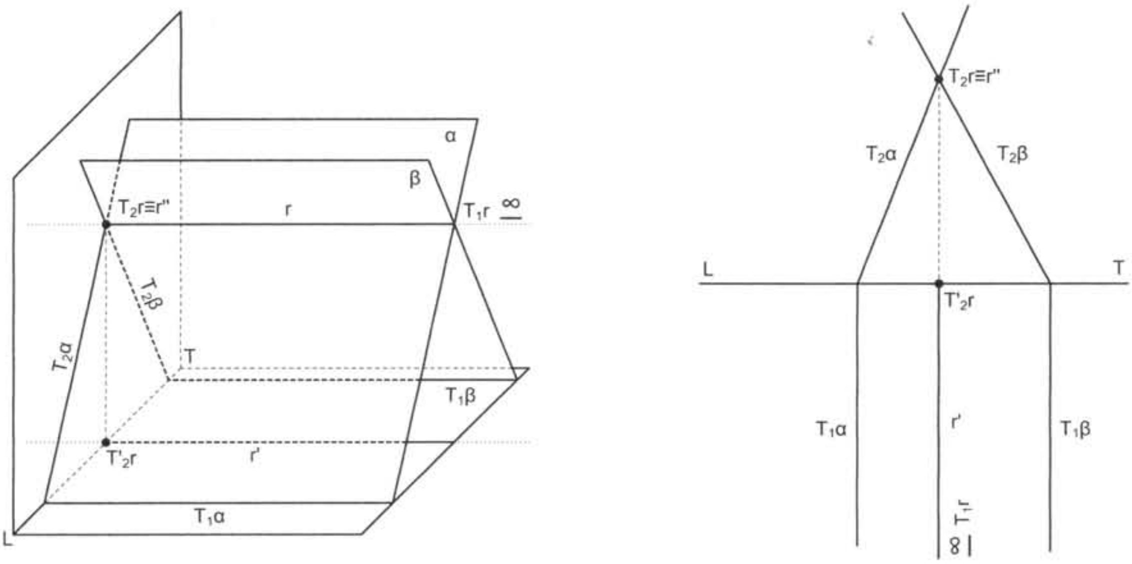

Fig. 50

2.6.17. Intersezione fra un piano α proiettante rispetto al P.O. e un piano β generico

La proiezione r′ della retta coincide con $T_1\alpha$; la proiezione r″ della retta sarà inclinata rispetto alla L.T. (fig. 51).

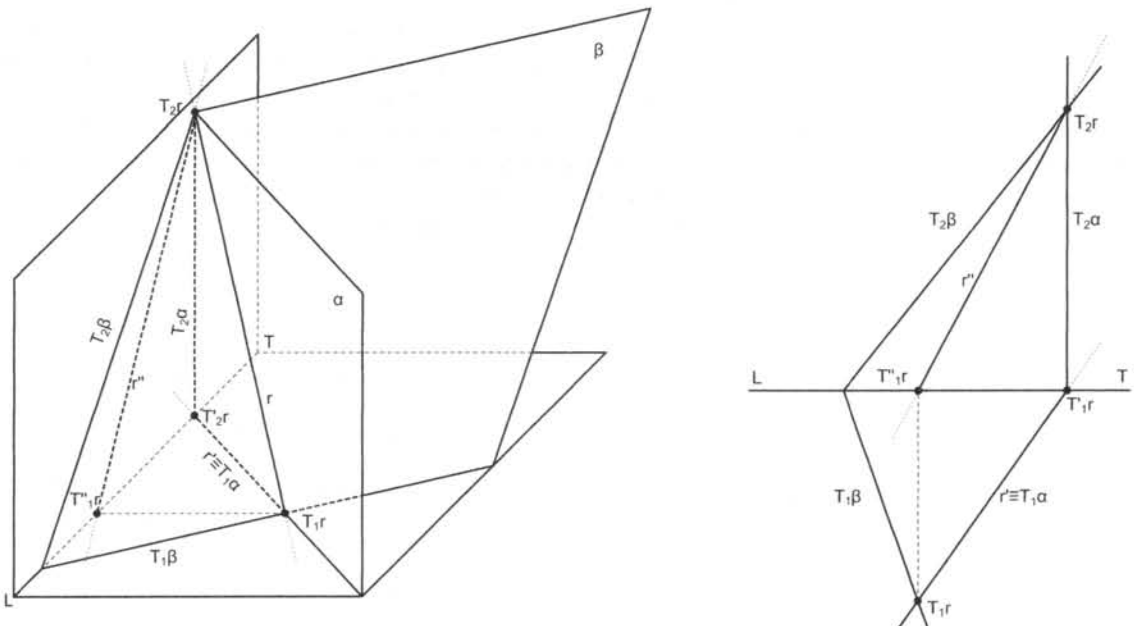

Fig. 51

2.6.18. Intersezione fra un piano α proiettante rispetto al P.V. e un piano β generico

Il caso è analogo al precedente; si omette la costruzione del disegno.

2.6.19. Intersezione fra un piano α generico e un piano β parallelo al P.O.

La proiezione r' della retta sarà parallela a $T_1\alpha$; la proiezione r'' della retta coincide con $T_2\beta$ (fig. 52).

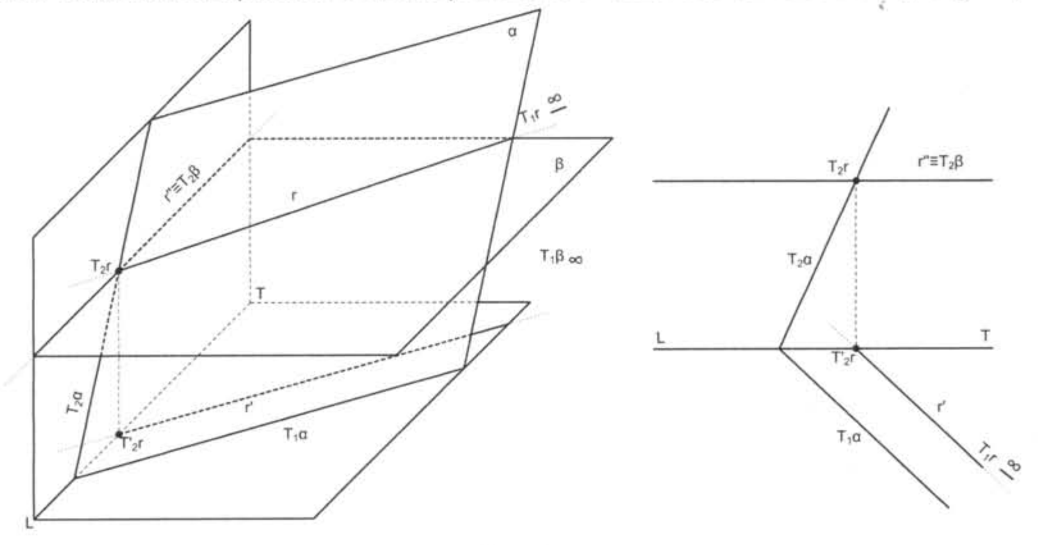

Fig. 52

2.6.20. Intersezione fra un piano α generico e un piano β parallelo al P.V.

Il caso è analogo al precedente; si omette la costruzione del disegno.

2.6.21. Intersezione fra due piani paralleli alla L.T.

In questo caso, le proiezioni della retta saranno parallele alla L.T. e le tracce T_1r e T_2r saranno all'infinito. Per rappresentare la retta, è necessario avvalersi di un piano ausiliario di profilo γ (fig. 53). Sul piano γ saranno definite le rette di intersezione dei piani α e β con γ. Chiameremo queste rette $T_3\alpha$ e $T_3\beta$, e il loro punto in comune sarà naturalmente T_3r, ossia la traccia di r su γ . A questo punto occorre ribaltare γ sul P.V., in modo da poter visualizzare sul piano del disegno, oltre che $T_1\gamma$ e $T_2\gamma$, anche $T_3\alpha$, $T_3\beta$ e T_3r. Ottenuto T_3r si ricavano con facilità le proiezioni r' e r''. Il ribaltamento di γ sul piano verticale avrà come effetto che $T_1\gamma$ si porterà nella posizione $(T_1\gamma)$ (si legga: ti uno di gamma ribaltato), coincidente con la linea di terra.

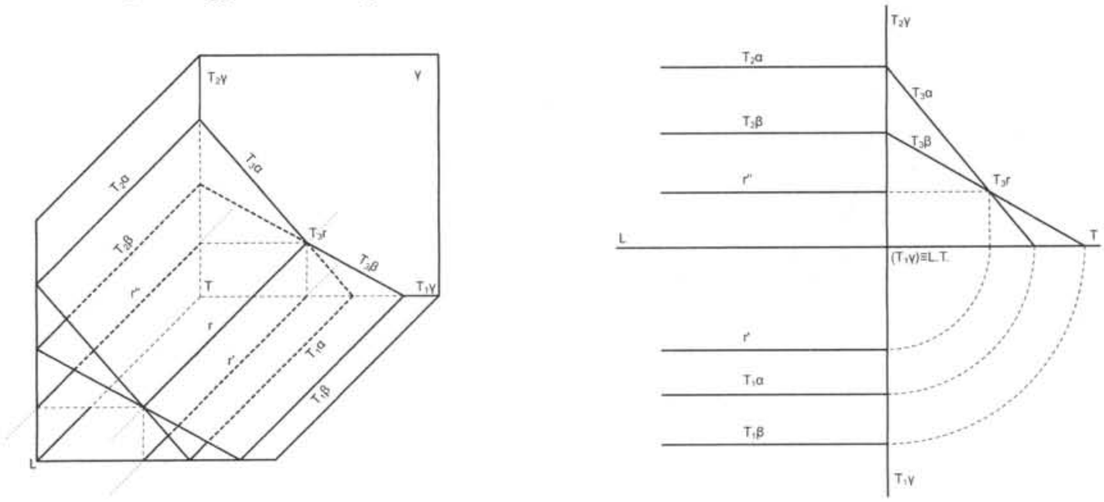

Fig. 53

2.6.22. Condizioni di perpendicolarità (enunciati)

Una *retta è perpendicolare a un piano* quando le sue proiezioni sono perpendicolari alle tracce omonime del piano.

Due *rette incidenti sono perpendicolari fra loro* quando per esse si può condurre un piano perpendicolare all'altra.

Due *piani sono perpendicolari fra loro* se uno di essi contiene la retta perpendicolare all'altro.

2.6.23. Esercizio. Dati un piano α e una retta r non appartenente ad esso, determinare il punto P di intersezione fra retta e piano

La figura 54 dimostra che con i soli dati a disposizione, non è possibile individuare il punto P in cui la retta r interseca il piano α.

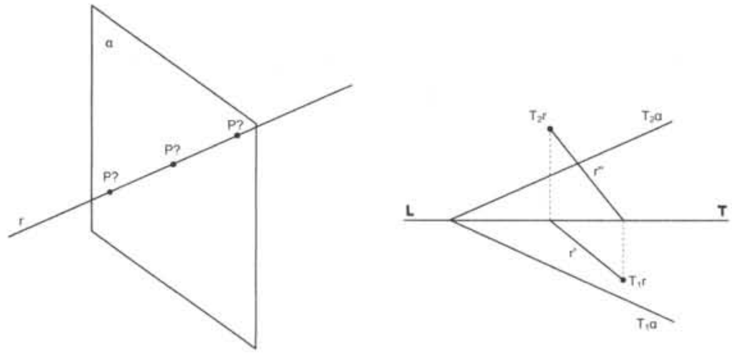

Fig. 54

Il problema si risolve utilizzando un piano ausiliario β, passante per la retta r e intersecante il piano α in una retta s comune ai piani α e β. Il punto P cercato risulterà dall'intersezione di r con s. Infatti il punto P appartiene alla retta r, ma anche al piano α in quanto appartiene a una retta (s) che a sua volta appartiene al piano (fig. 55, a sinistra). Il piano β, per facilità di costruzione, sarà proiettante in prima proiezione (fig. 55, a destra) e la traccia $T_2\beta$ passerà per la traccia omonima della retta r.

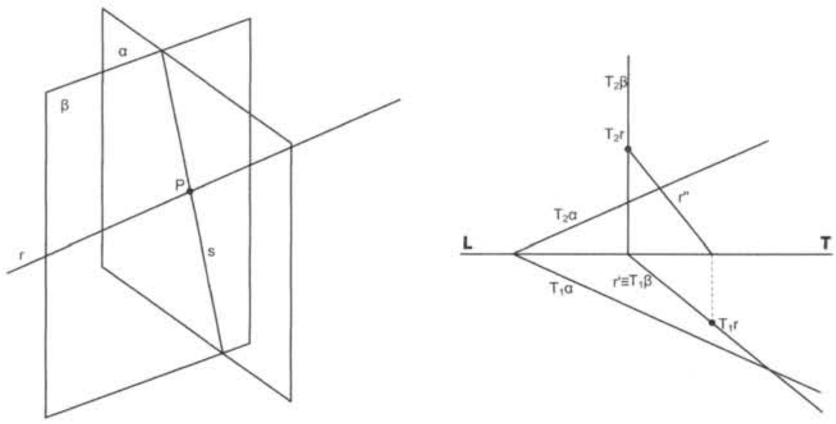

Fig. 55

A questo punto, si tracceranno facilmente le tracce e le proiezioni della retta s, intersezione fra il piano α e il piano β (fig 56). Le rette r ed s, complanari per costruzione, hanno un punto in comune, che si identifica con P, punto in comune delle rispettive proiezioni. Poiché r' ed s' sono coincidenti, occorrerà prima definire P'' e quindi, abbassando da esso la retta di richiamo fino alle prime proiezioni delle due rette, individuare P'.

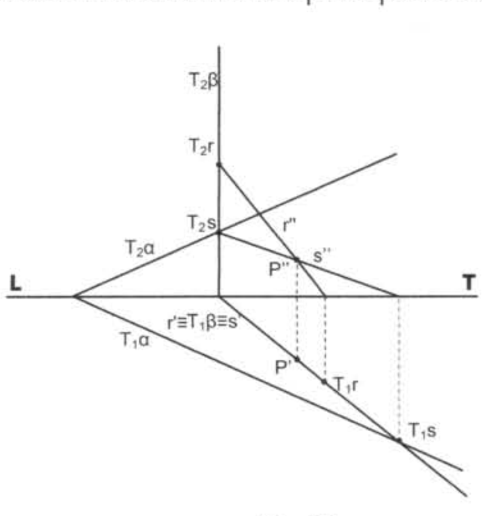

Fig. 56

2.7.1. Ribaltamento di un piano

Il ribaltamento di un piano consiste in una rotazione tale da fare coincidere il piano stesso con uno dei piani di proiezione. Di solito si esegue per ottenere la vera forma di una figura giacente su quel piano. Nelle proiezioni di Monge, si ribalta la porzione di piano compresa fra le due tracce.

2.7.2. Ribaltamento di un piano perpendicolare al P.O. e inclinato rispetto al P.V.

Se il ribaltamento avviene sul piano orizzontale, $T_1\alpha$ fa da cerniera e $(T_2\alpha)$ (leggasi: "ti due di alfa ribaltato") forma con $T_1\alpha$ un angolo di 90° (Fig. 57).

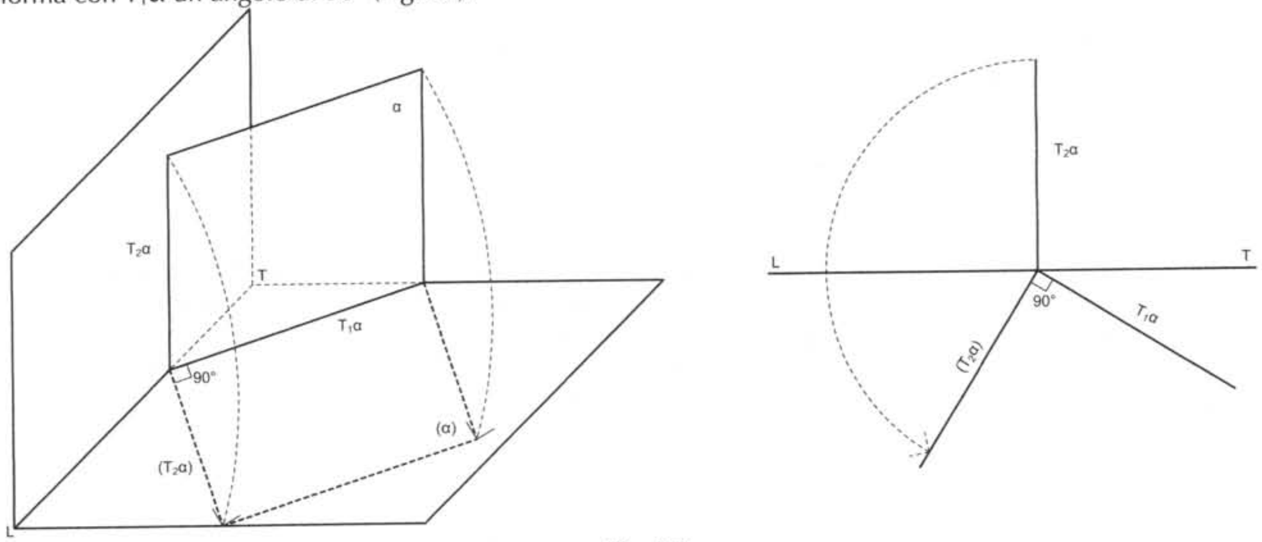

Fig. 57

Se il ribaltamento avviene sul piano verticale, $T_2\alpha$ fa da cerniera e $(T_1\alpha)$ coincide con la linea di terra (Fig. 58).

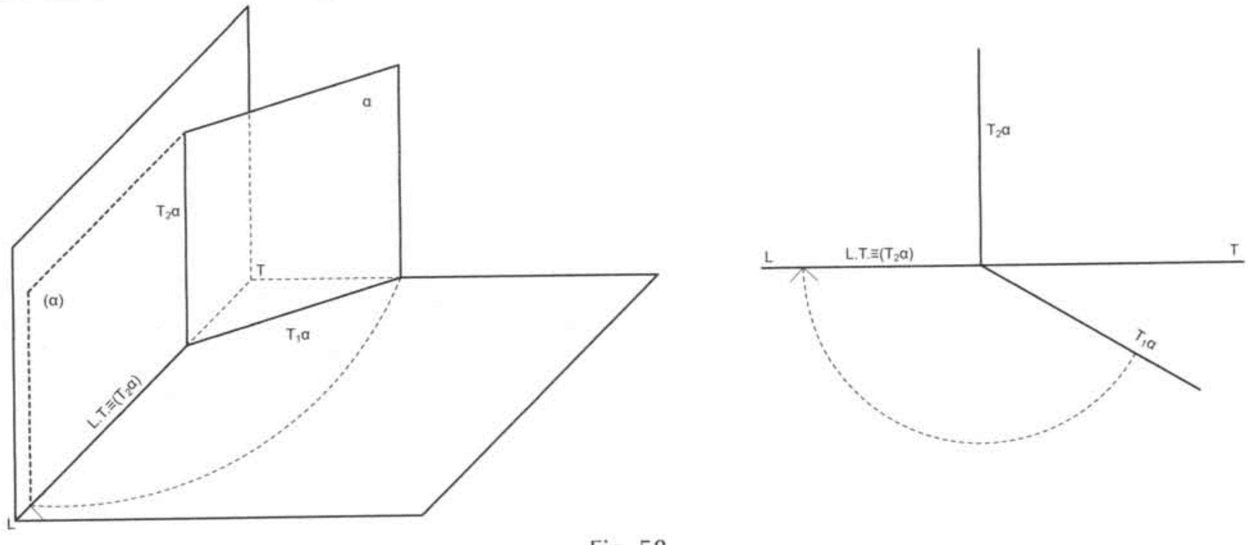

Fig. 58

2.7.3. Ribaltamento di un piano perpendicolare al P.V. e inclinato rispetto al P.O.

Se il ribaltamento avviene sul piano orizzontale, $T_1\alpha$ fa da cerniera e $(T_2\alpha)$ coincide con la linea di terra (Fig. 59).

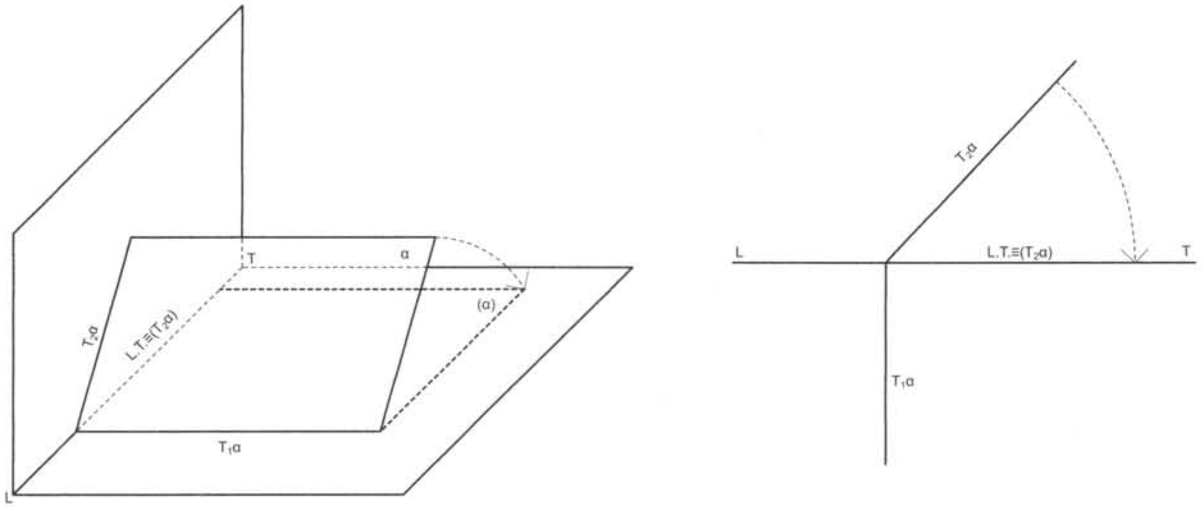

Fig. 59

Se il ribaltamento avviene sul piano verticale, $T_2\alpha$ fa da cerniera e $(T_1\alpha)$ forma con $T_2\alpha$ un angolo di 90° (Fig. 60).

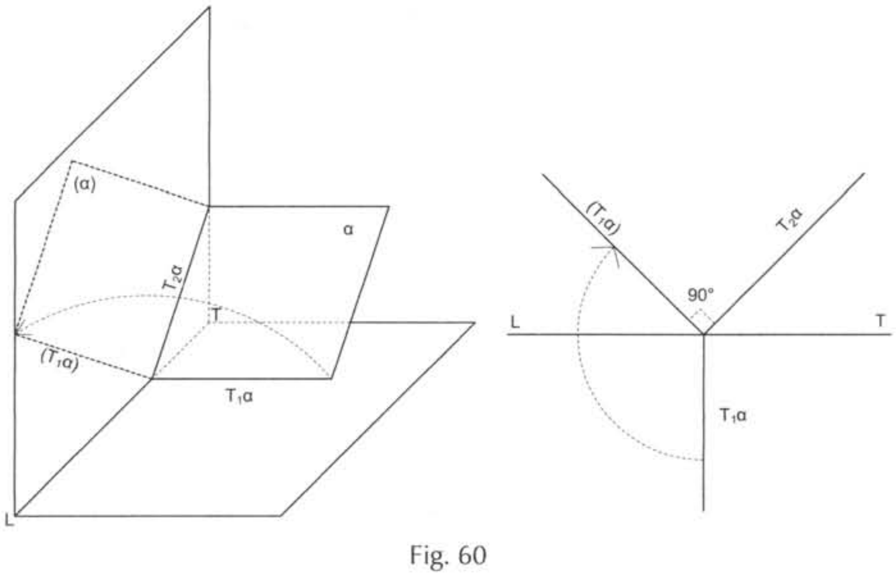

Fig. 60

2.7.4. Ribaltamento di un piano di profilo

Se il ribaltamento avviene sul P.V., $(T_1\alpha)$ coincide con la linea di terra (Fig. 61).

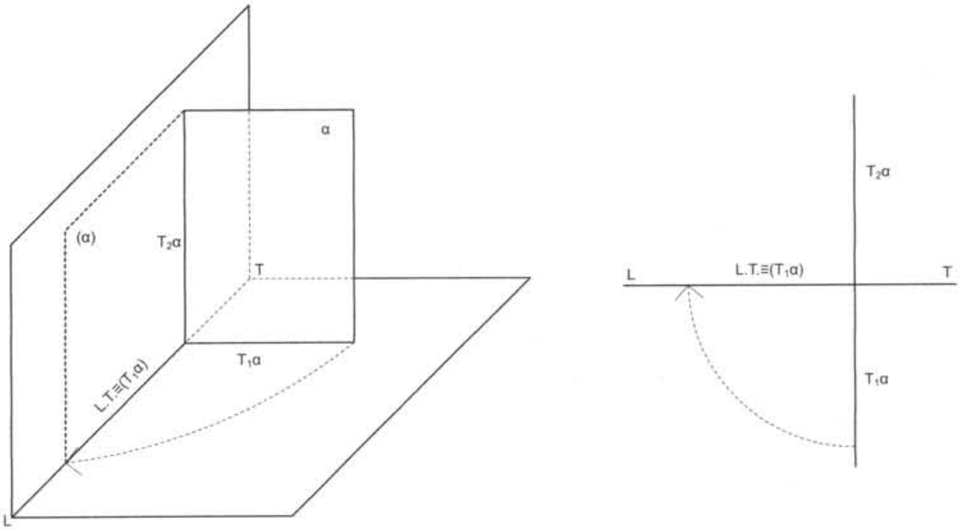

Fig. 61

Se il ribaltamento avviene sul P.O., $(T_2\alpha)$ coincide con la linea di terra (Fig. 62).

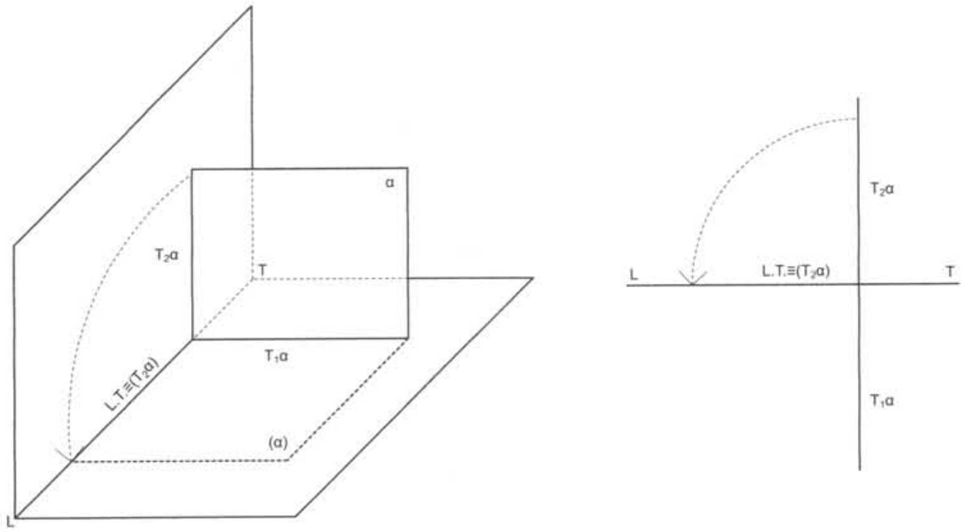

Fig. 62

2.7.5. Ribaltamento di un piano inclinato rispetto ai due piani di proiezione (piano generico)

Sia dato un piano generico α. Per ribaltarlo sul P.O. dobbiamo utilizzare un piano ausiliario β, perpendicolare al P.O. e inclinato rispetto al P.V. Sceglieremo un piano β la cui traccia orizzontale $T_1\beta$ *sia ortogonale alla traccia orizzontale di* α, ossia $T_1\alpha$ (Fig. 63).

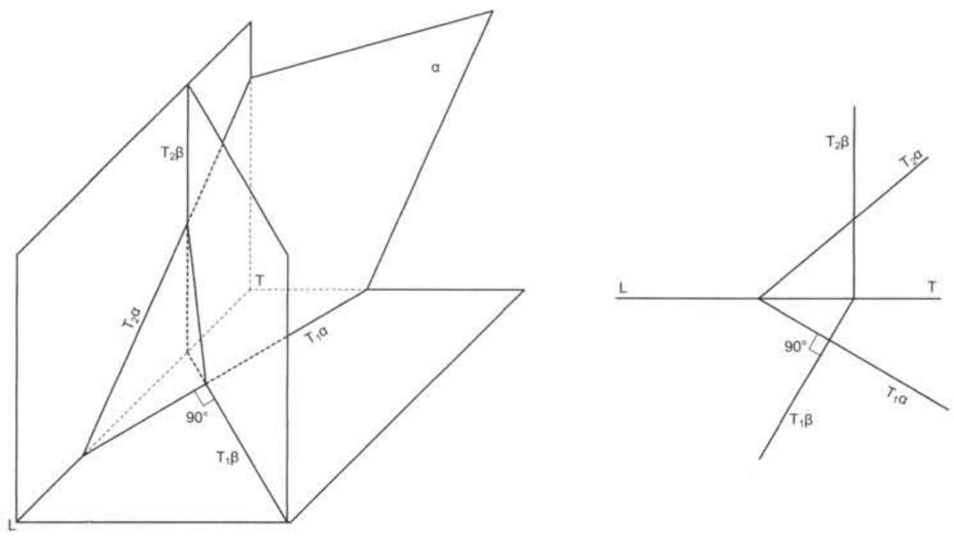

Fig. 63

Le intersezioni delle tracce omonime dei piani α e β determinano i punti S e T e, di conseguenza, il segmento posto nello spazio con estremità S-T (Fig. 64, a sinistra) ortogonale a $T_1\alpha$.

Per ribaltare il piano α sul P.O., dobbiamo (Fig. 64, a sinistra):

- ribaltare sul P.O. il segmento S-T (che giacerà quindi su $T_1\beta$ e avrà per estremi S-(T));
- unire (T) col punto O.

Osservando i triangoli OST e OS(T), si nota che sono uguali in quanto hanno il lato OS in comune, i lati S-T e S-(T') uguali e l'angolo in S retto; avendo i cateti uguali, anche l'ipotenusa deve essere uguale.

Passiamo adesso sul piano del disegno (Fig. 64, a destra). Per ribaltare il piano α sul P.O., dobbiamo:

- ribaltare sul P.O. il punto T; facendo centro col compasso in O, riportiamo OT su $T_1\beta$ e otteniamo (T);
- unire O con (T).

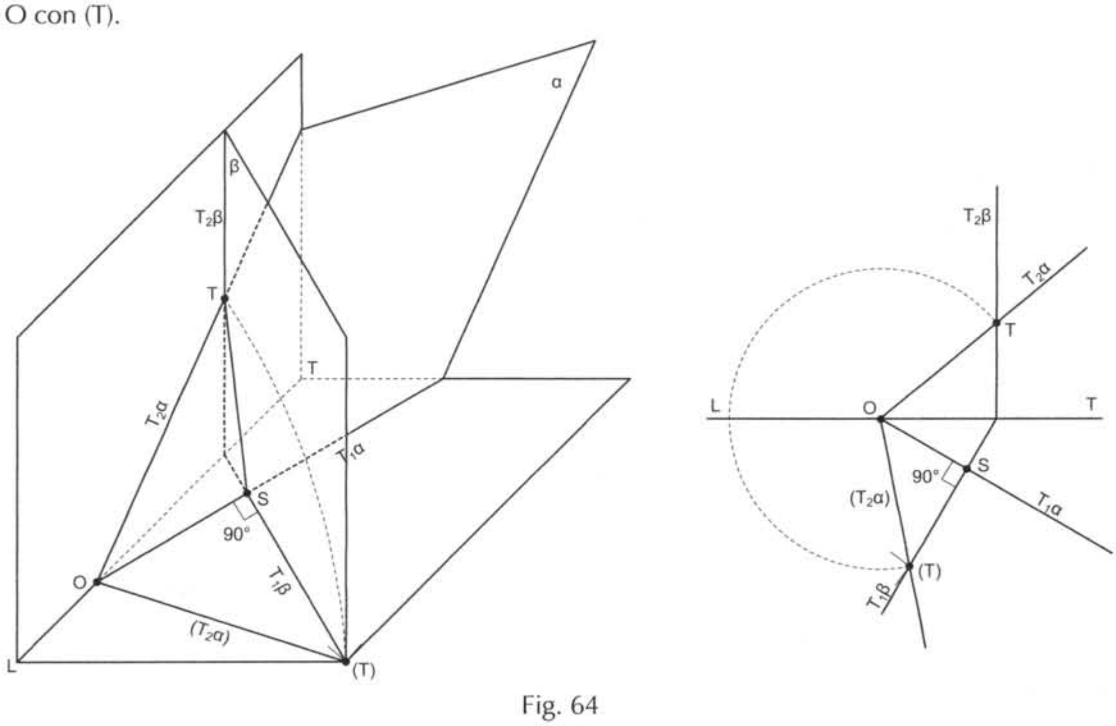

Fig. 64

Per effettuare il ribaltamento del piano α sul P.V., occorre:

- tracciare un piano ausiliario β, ortogonale rispetto al P.V. e la cui traccia verticale $T_2\beta$ sia ortogonale a $T_2\alpha$ (Fig. 65, a sinistra);
- individuare la posizione di punti S e T (Fig. 65, a sinistra);
- facendo centro col compasso in O, riportare O-S su $T_2\beta$, ottenendo (S') (Fig. 65, a destra);
- congiungere (S) con O, ottenendo $(T_1\alpha)$, ribaltamento di $T_1\alpha$ sul P.V. (Fig. 65, a destra).

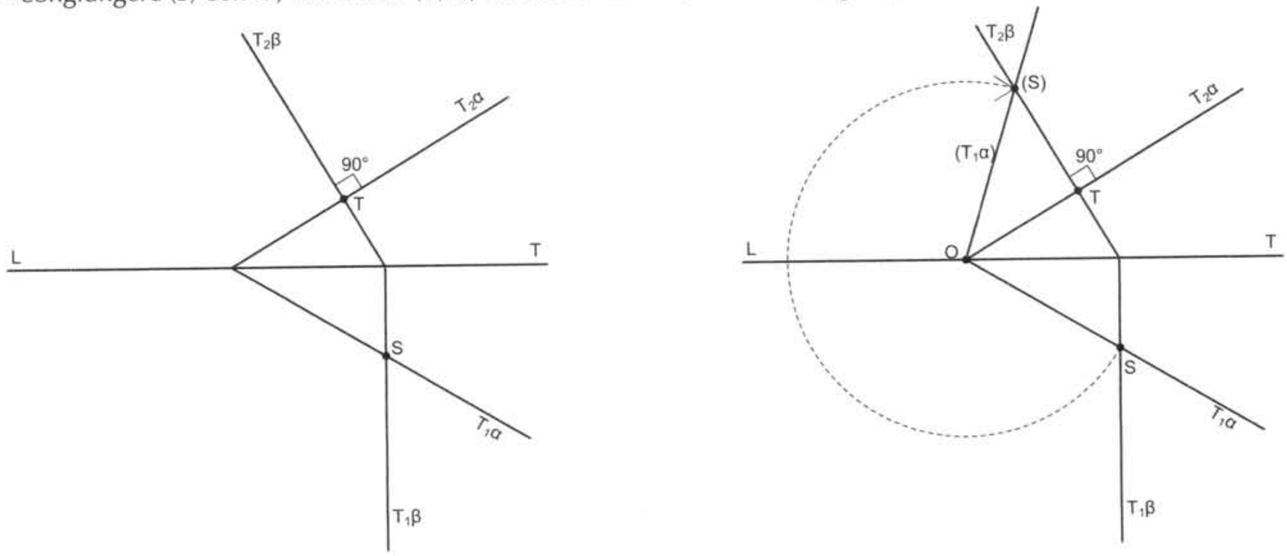

Fig. 65

2.7.6. Retta di massima pendenza di un piano

L'esempio riportato nella fig. 64 introduce il concetto di retta di massima pendenza di un piano.

Dato un piano α, si definisce *retta di massima pendenza* la retta r che forma il maggior angolo con la prima proiezione del piano. Per costruire la retta di massima pendenza di un piano α, occorre costruire un piano β proiettante in prima proiezione e ortogonale ad α, con traccia $T_1\beta$ ortogonale a $T_1\alpha$. La retta r di intersezione fra i due piani è la retta di massima pendenza cercata (fig. 66).

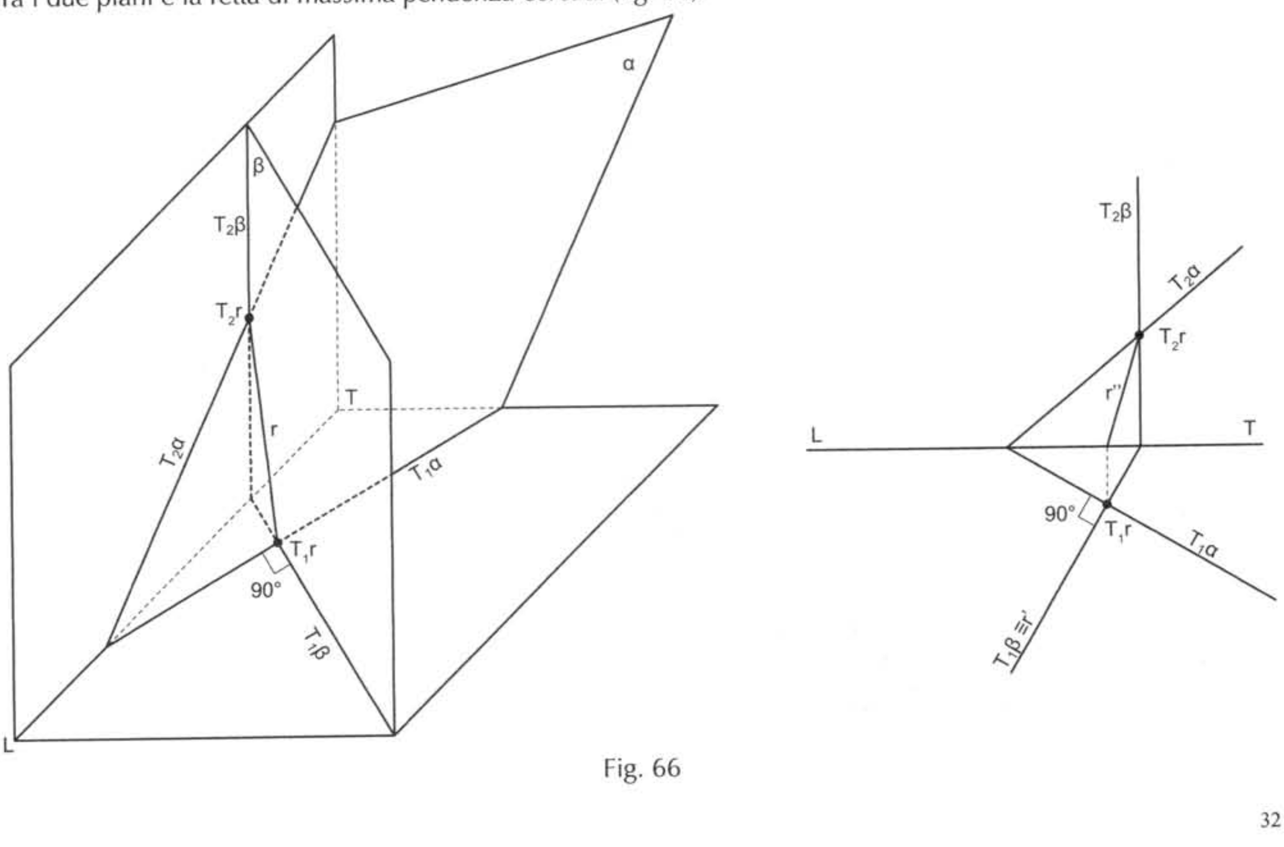

Fig. 66

2.7.7. Ribaltamento di una retta perpendicolare al P.O. giacente su un piano proiettante in prima proiezione

Sia dato un piano α, proiettante in prima proiezione, e una retta r, giacente su di esso e perpendicolare al P.O. Ribaltando il piano α sul P.O., si avranno ($T_2\alpha$) e (r) formanti angoli retti con $T_1\alpha$ (Fig. 67).

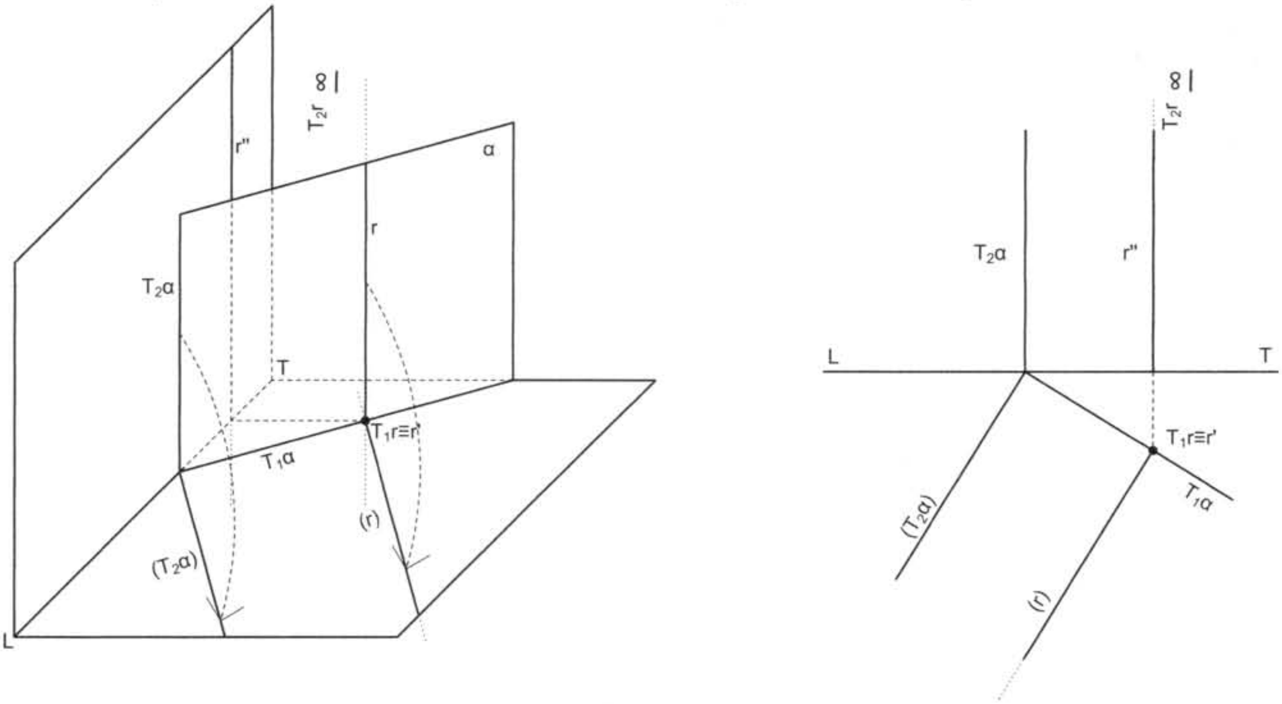

Fig. 67

2.7.8. Ribaltamento di una retta parallela al P.O. giacente su un piano proiettante in prima proiezione

Sia dato un piano α, proiettante in prima proiezione, e una retta S, giacente su di esso e parallela al P.O. Ribaltando il piano α sul P.O., (s) si disporrà parallelamente al $T_1\alpha$ (Fig. 68).

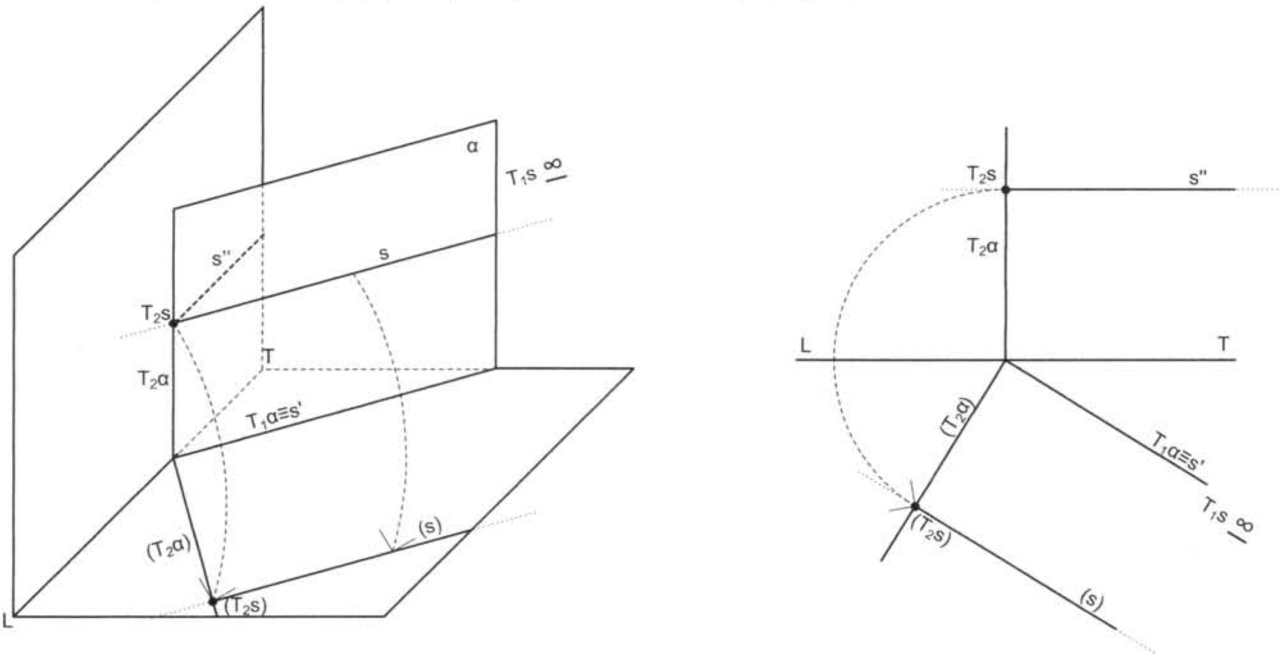

Fig. 68

2.7.9. Ribaltamento di una retta generica giacente su un piano proiettante in seconda proiezione

Sia dato un piano α, proiettante in seconda proiezione, e una retta r, giacente su di esso e inclinata rispetto al P.O. e rispetto al P.V.

Ribaltando il piano α sul P.V., si avrà $(T_1\alpha)$ formante un angolo retto con $T_2\alpha$. (r) sarà la congiungente di (T_1r) con T_2r (Fig. 69).

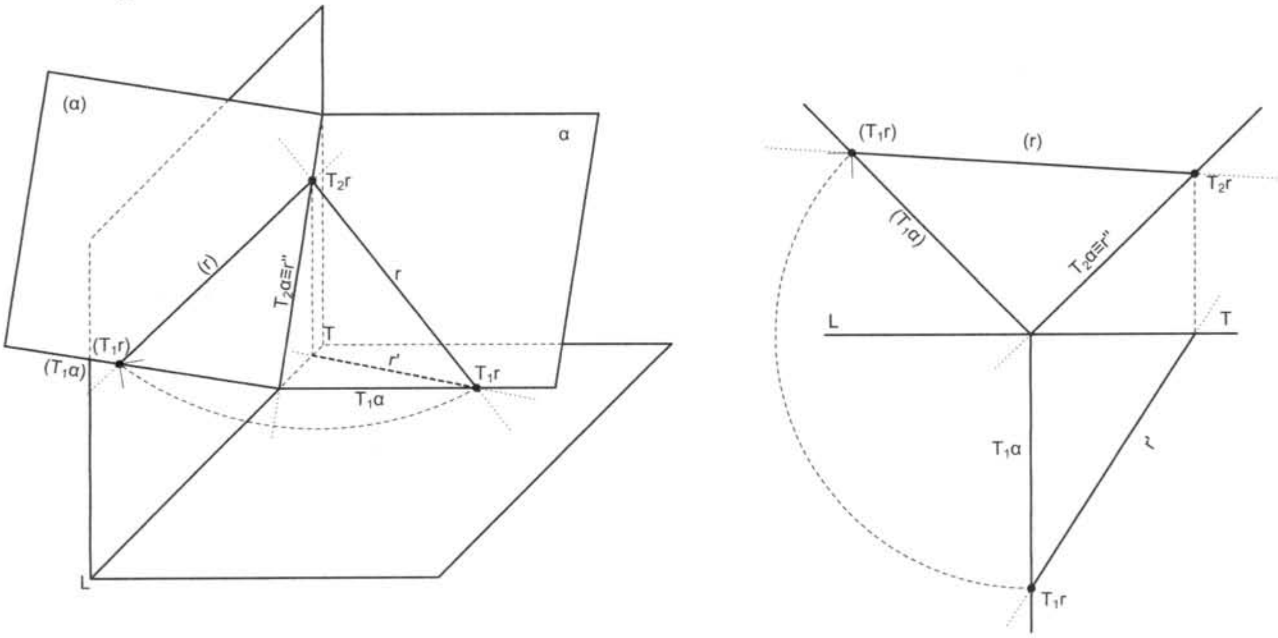

Fig. 69

Ribaltando il piano α sul P.O., si avrà $(T_2\alpha)$ formante un angolo retto con $T_1\alpha$. (r) sarà la congiungente di (T_2r) con T_1r (Fig. 70).

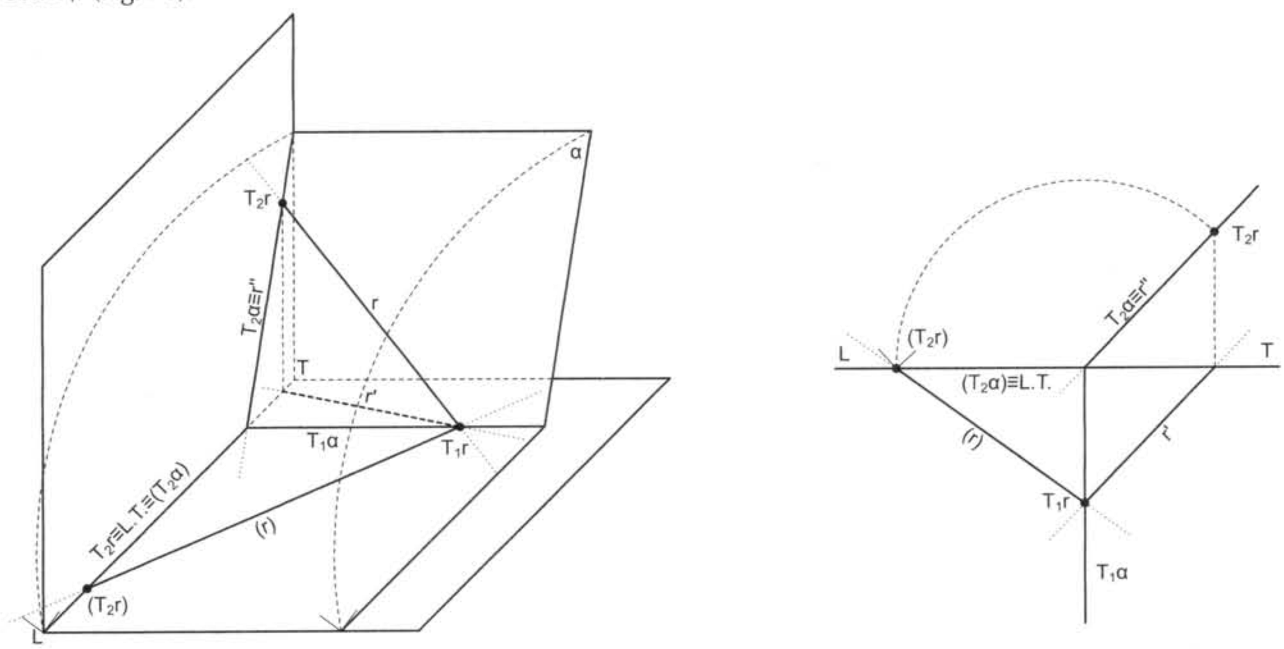

Fig. 70

2.7.10. Ribaltamento di una retta parallela al P.O. giacente su un piano generico

Sia dato un piano generico, e una retta, giacente su di esso e parallela al P.O. Ribaltando α sul P.O. con l'ausilio di un piano β proiettante in prima proiezione e con traccia $T_1β$, formante un angolo di 90° rispetto a $T_1α$, (r) si disporrà parallelamente al $T_1α$ (Fig. 71).

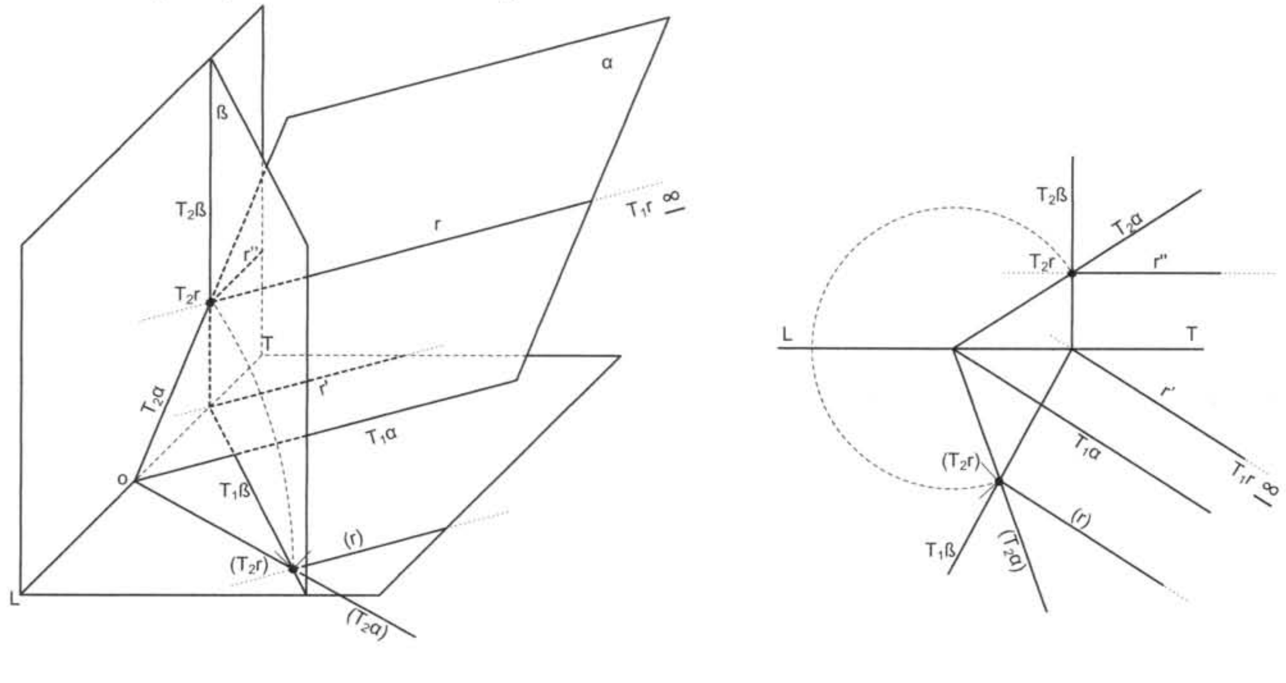

Fig. 71

2.7.11. Ribaltamento di una retta generica giacente su un piano generico

Sia dato un piano α generico, e una retta r generica giacente su di esso. Ribaltando α sul P.V. con l'ausilio di un piano β proiettante in seconda proiezione con traccia $T_2β$, formante un angolo di 90° rispetto a $T_2α$, (r) sarà la congiungente di T_2r con (T_1r) (Fig. 72).

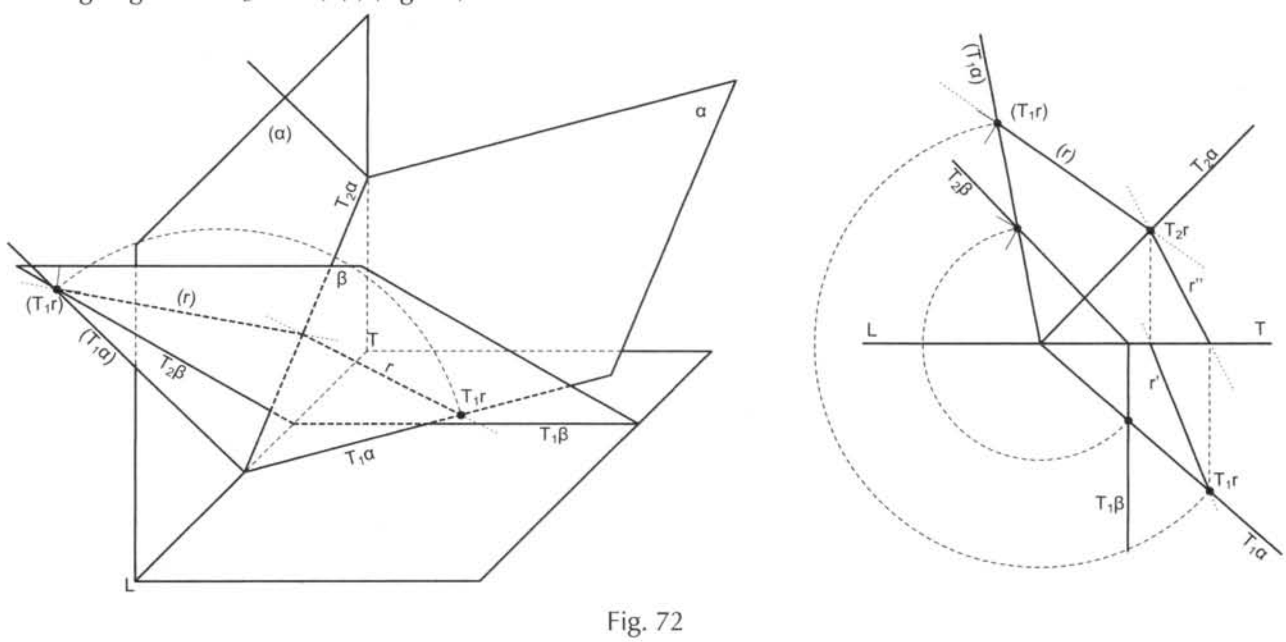

Fig. 72

2.7.12. Angolo di un piano rispetto ai piani di proiezione

Sia dato un piano α, proiettante in prima proiezione e inclinato rispetto al P.V. (fig. 73). L'angolo di α con il P.O. è di 90°; l'angolo di α con il P.V. è l'angolo ω che la traccia $T_1α$ forma con la linea di terra.

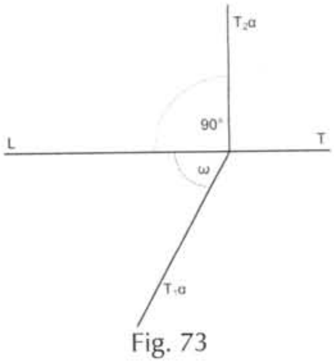

Fig. 73

Sia dato un piano α, proiettante in seconda proiezione e inclinato rispetto al P.O. (fig. 74). L'angolo di α con il P.V. è di 90°; l'angolo di α con il P.O. èl'angolo ω che la traccia $T_2α$ forma con la linea di terra.

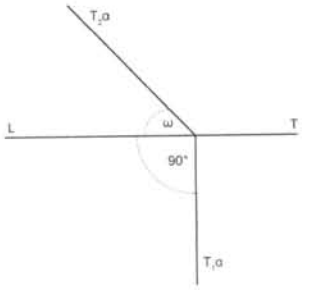

Fig. 74

Sia dato un piano α, inclinato rispetto ai due piani di proiezione. Per determinare l'angolo che α forma con il P.O., bisogna utilizzare un piano ausiliario β ortogonale al P.O. e con la traccia $T_1β$ perpendicolare ad $T_1α$ (fig. 75). L'angolo ω che la retta di intersezione r fra α e β forma con il P.O. è l'angolo cercato. Per rappresentarlo in doppia proiezione ortogonale, bisogna ribaltare il piano β sul P.O. e, con esso, T_2r (ottenendo (T_2r)) e la retta r (ottenendo (r)). Unendo T_1r con (T_2r) sarà possibile determinare l'angolo ω.

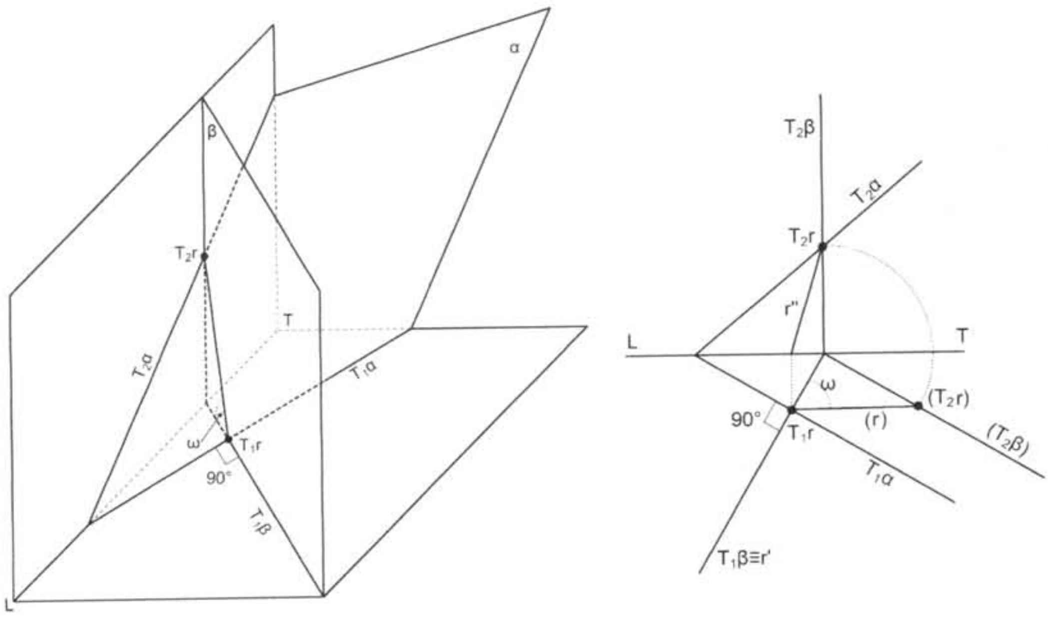

Fig . 75

Se si vuole determinare l'angolo ω che α forma con il P.V., bisogna utilizzare un piano ausiliario γ ortogonale al P.V. e con la traccia $T_2\gamma$ perpendicolare ad $T_2\alpha$. Si ribalta γ sul P.V. e, come nell'esempio precedente, si determina l'angolo ω (fig. 76 – si omette la rappresentazione nello spazio e si propone solo quella in doppia proiezione ortogonale).

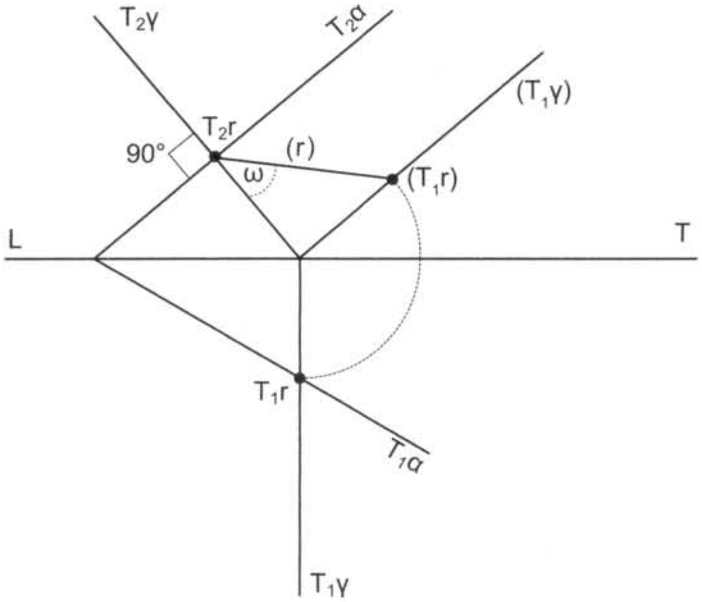

Fig. 76

2.8. Proiezione di figure piane e solidi

2.8.1. Proiezione di un quadrato parallelo al P.O.

Sul piano orizzontale il quadrato si proietta in vera grandezza. Sul piano verticale i lati AB e CD, perpendicolari al P.V., si proiettano in due punti A''≡B'' e C''≡D'', mentre i lati AD e BC si proiettano secondo un segmento parallelo alla linea di terra (Fig. 77).

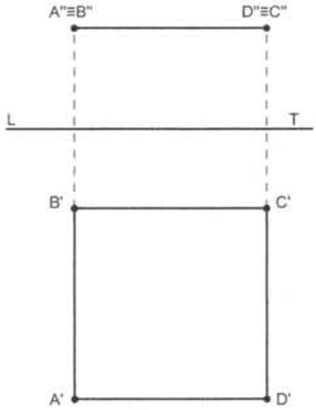

Fig. 77

2.8.2. Proiezione di un quadrato parallelo al P.V.

L'esempio è analogo al precedente (Fig. 78).

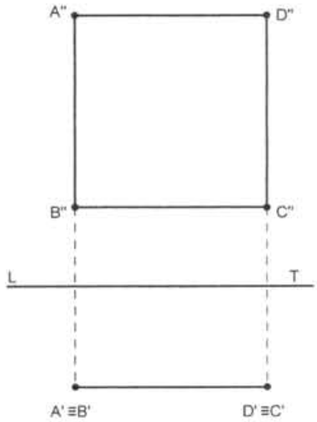

Fig. 78

2.8.3. Proiezione di una circonferenza parallela al P.V.

Sul piano verticale la circonferenza si proietta in vera grandezza. Sul piano verticale la rappresentazione è un segmento parallelo alla linea di terra, corrispondente alla dimensione del diametro (Fig. 79).

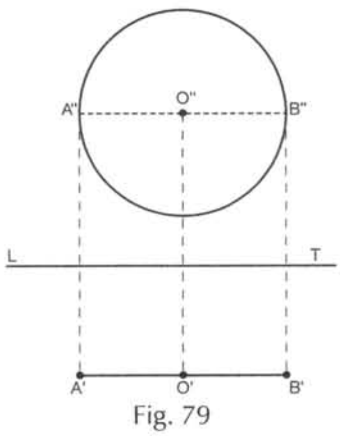

Fig. 79

2.8.4. Proiezione di una circonferenza parallela al P.O.

L'esempio è analogo al precedente (Fig. 80).

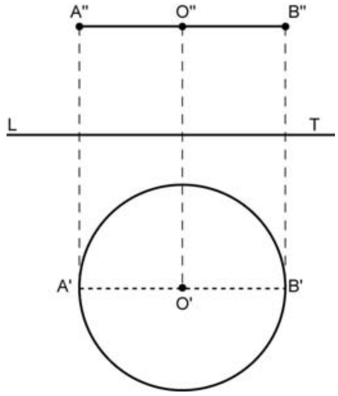

Fig. 80

2.8.5. Proiezione di un triangolo e di un esagono paralleli al P.O.

Per ottenere la rappresentazione si procede come nei casi precedenti (Fig. 81).

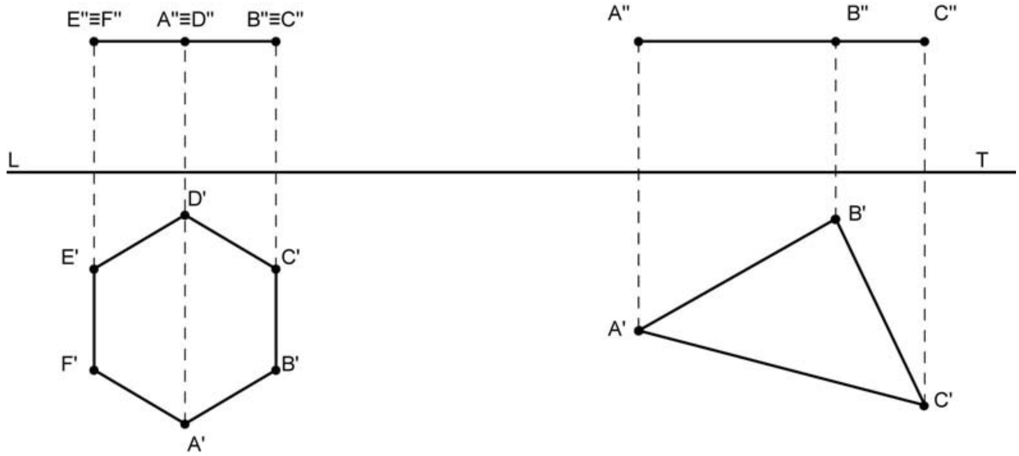

Fig. 81

2.8.6. Proiezione di un triangolo e di un esagono paralleli al P.V.

L'esempio è analogo al precedente (Fig. 82).

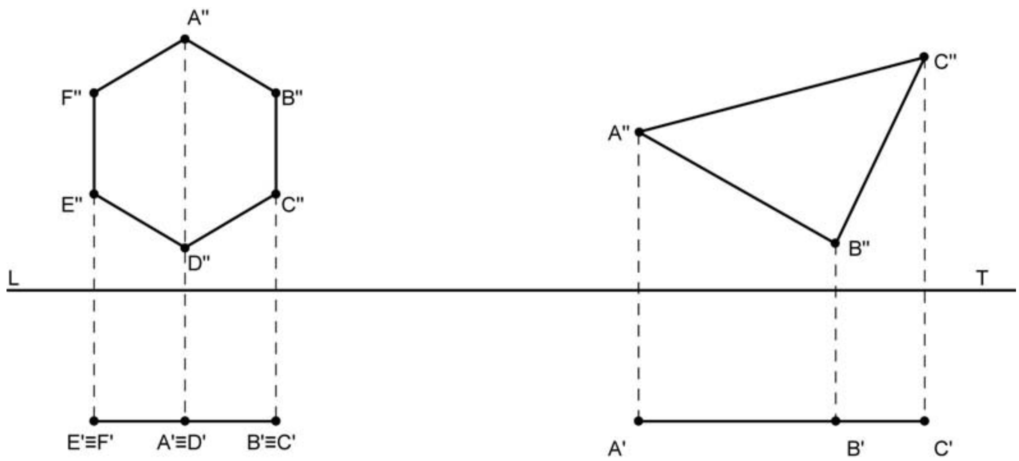

Fig. 82

2.8.7. Proiezione di un prisma a base esagonale con basi parallele al P.O. e spigoli perpendicolari al P.O.

Ogni spigolo del prisma, essendo perpendicolare al P.O., vi si proietta in un solo punto, corrispondente ai vertici dell'esagono. Le superfici dele facce laterali, essendo perpendicolari al P.O., hanno per proiezioni sul P.O. segmenti corrispondenti ai lati dell'esagono (Fig. 83).

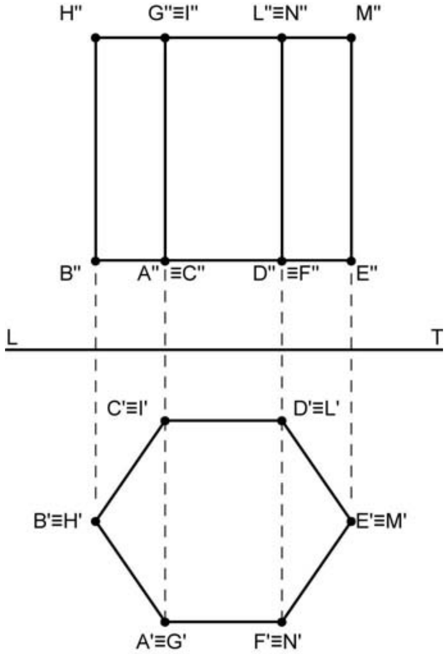

Fig. 83

2.8.8. Proiezione di un prisma a base triangolare con le basi parallele al P.V.

Sul P.V. le basi si proiettano in vera grandezza, mentre sul P.O. gli spigoli risultano perpendicolari alla L.T. (Fig. 84).

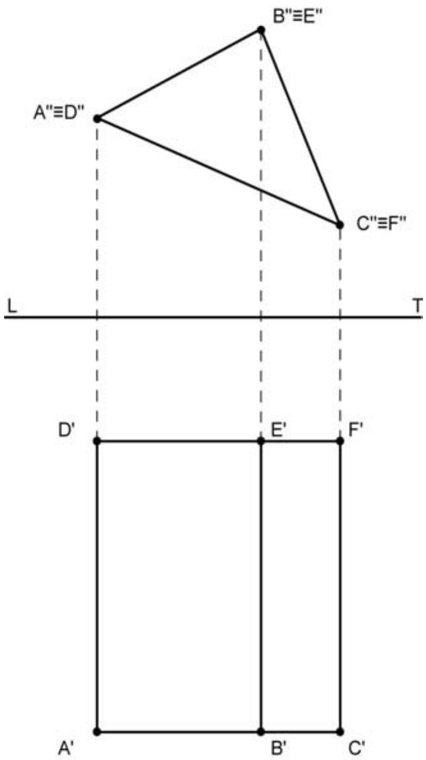

Fig. 84

2.8.9. Proiezione di un cilindro retto con base poggiata sul P.O.

Sul P.O. le basi coincidono e si proiettano in vera grandezza; sul P.V. L proiezione è un rettangolo con due lati perpendicolari alla L.T. e uguali all'altezza del cilindro, e due lati uguali al diametro della base (Fig. 85).

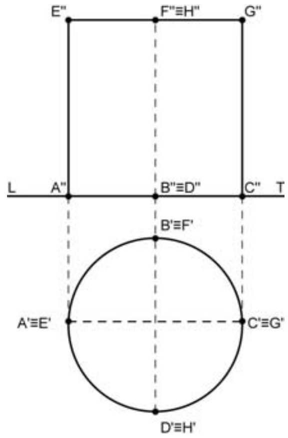

Fig. 85

2.8.10. Proiezione di un cilindro retto con base tangente al P.V.

L'esempio è analogo al precedente (Fig. 86).

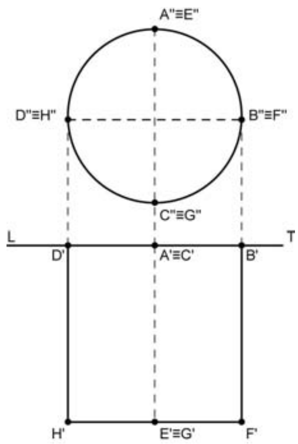

Fig. 86

2.8.11. Proiezione di un cono con base parallela al P.O.

Sul P.O. la base si proietta in vera grandezza e il suo centro rappresenta la proiezione orizzontale del vertice. In proiezione verticale il cono è rappresentato tramite un triangolo isoscele con base parallela alla L.T. (Fig. 87).

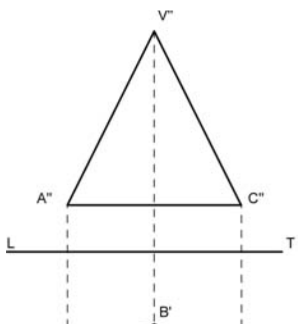

Fig. 87

2.8.12. Proiezione di una sfera

In proiezione orizzontale e verticale la sfera è rappresentata da una circonferenza. Per disegnarla occorre conoscere il raggio e determinare le proiezioni del suo centro (Fig. 88).

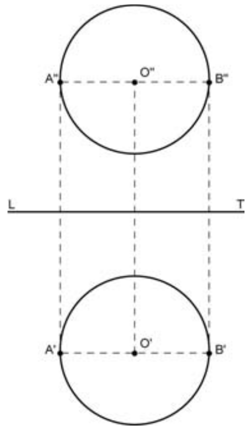

Fig. 88

2.8.13. Proiezione di una piramide regolare con la base quadrata parallela al P.O.

Sul P.O. la base si proietta in vera grandezza; il vertice corrisponde al centro del quadrato. Sul P.V. la base è parallela alla L.T. (Fig. 89).

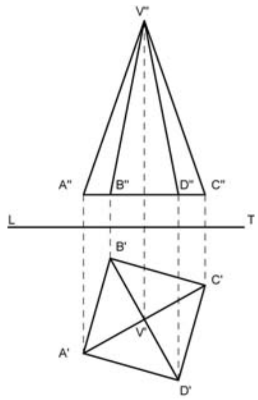

Fig. 89

2.8.14. Proiezione di una piramide a base quadrata con vertice tangente al P.V. e asse perpendicolare al P.V.

Sul P.V. la base si proietta in vera grandezza. Sul P.O. la base è parallela alla L.T. e gli spigoli inclinati rispetto ad essa (Fig. 90).

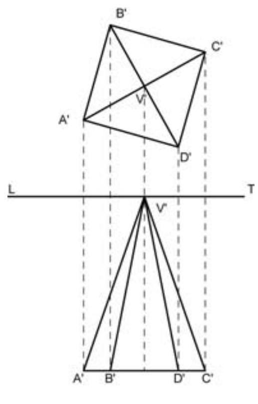

Fig. 90

2.9. Determinazione della vera grandezza di figure piane giacenti su piani non paralleli ai piani di proiezione

2.9.1. Vera grandezza di un triangolo giacente su un piano perpendicolare al P.O. e inclinato al P.V.

Sia dato un piano α, proiettante in prima proiezione, e un triangolo giacente su di esso. Le proiezioni ortogonali del triangolo non riprodurranno la sua vera grandezza (fig. 91).

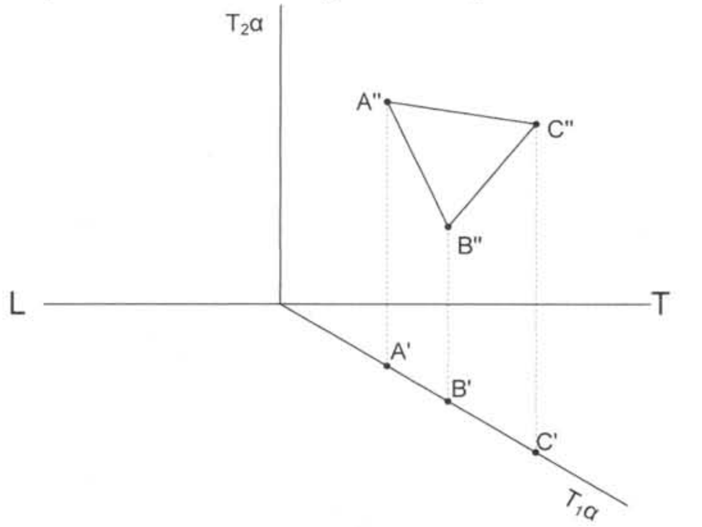

Fig. 91

Per ottenere la vera grandezza occorre innanzitutto ribaltare il piano α sul P.O. Successivamente, per ogni vertice del triangolo si fa passare una retta orizzontale e una perpendicolare al P.O.; l'intersezione delle due rette ribaltate determina il vertice del triangolo rappresentato in vera grandezza (fig. 92).

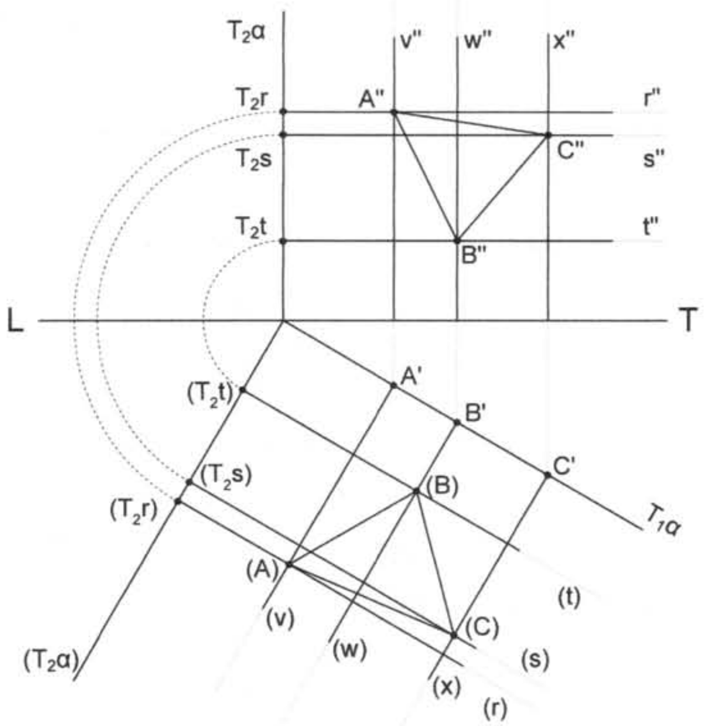

Fig. 92

2.9.2. Vera grandezza di un quadrilatero giacente su un piano generico

Sia dato un piano α, inclinato ai piani di proiezione (piano generico), e un quadrilatero giacente su di esso. Le proiezioni ortogonali del quadrilatero non riprodurranno la sua vera grandezza (fig. 93).

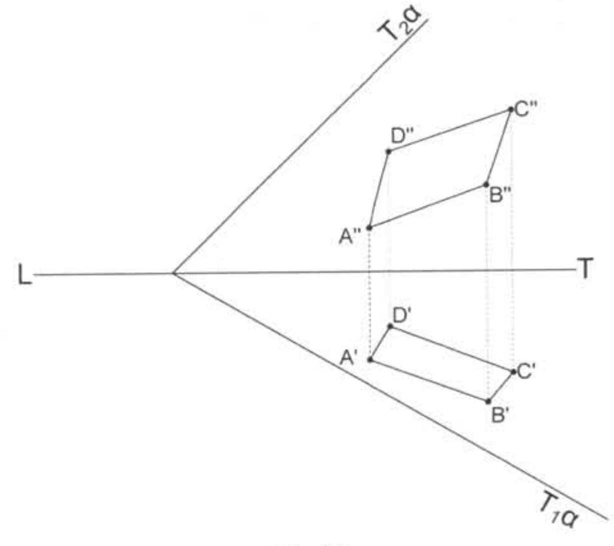

Fig. 93

Per ottenere la vera grandezza occorre innanzitutto ribaltare il piano α sul P.O. mediante un piano ausiliario, e le rette r , s, t, v che contengono i vertici del quadrilatero. Ottenute (r), (s), (t), (v), , dai punti A', B', C' e D' si conducono le normali a $T_1\alpha$ fino a incontrare le rette di appartenenza di detti punti (fig. 94).

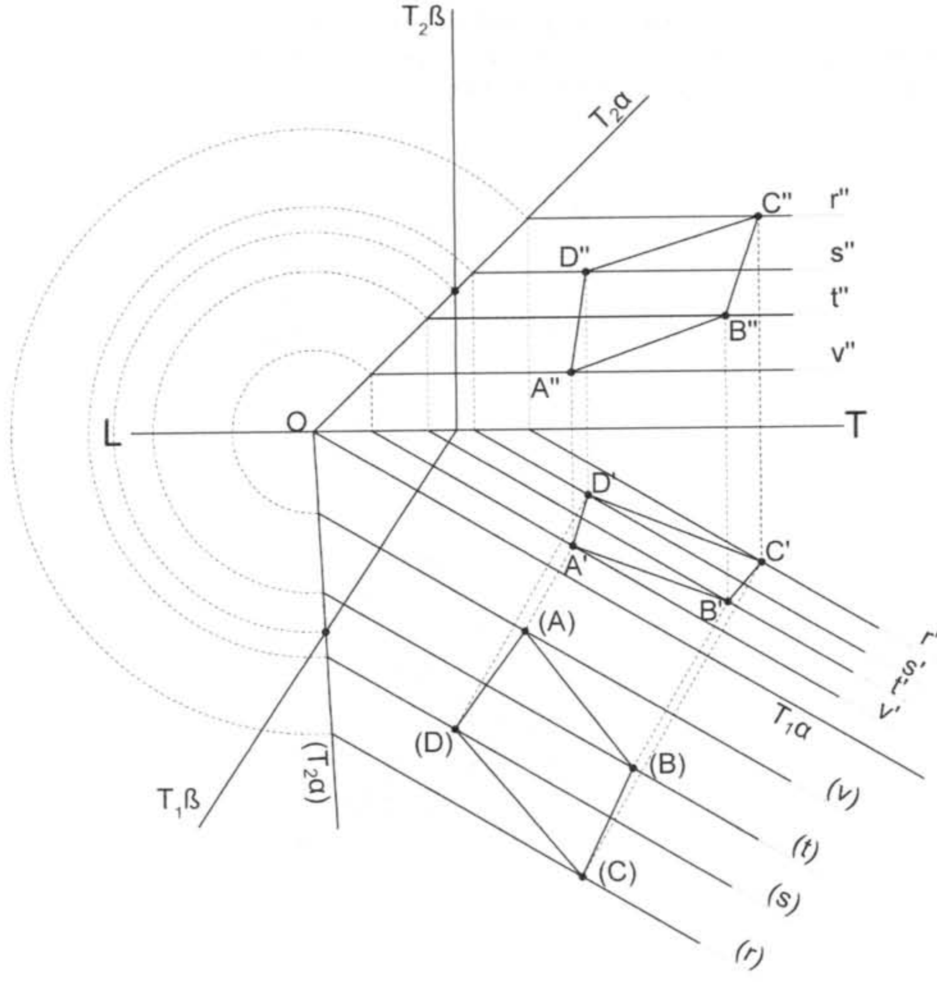

Fig. 94

2.9.4. Rappresentazione di una figura data su un piano non parallelo a un piano di proiezione

Il problema è inverso a quello per determinare la vera grandezza di una figura appartenente ad un piano non parallelo a uno dei due piani di proiezione.

2.9.5. Proiezione di un quadrato giacente su un piano α perpendicolare al P.O. e inclinato rispetto al P.V.

Date le tracce del piano α, si ribalta lo stesso piano α sul P.O., determinando ($T_2\alpha$); si disegna quindi un quadrato giacente sul P.O., i cui vertici saranno (A), (B), (C), (D).

Per ottenere le proiezioni su α, per i vertici del quadrato (A), (B), (C). (D) si fanno passare quattro rette orizzontali (r), (s), (t), (v) e quattro rette perpendicolari al P.O. (l', m', n', p').

Tali rette si tracciano in proiezioni orizzontali e verticali e dalle loro intersezioni si ottengono i vertici del quadrato in vera grandezza A'', B'', C'', D''. (Fig. 95).

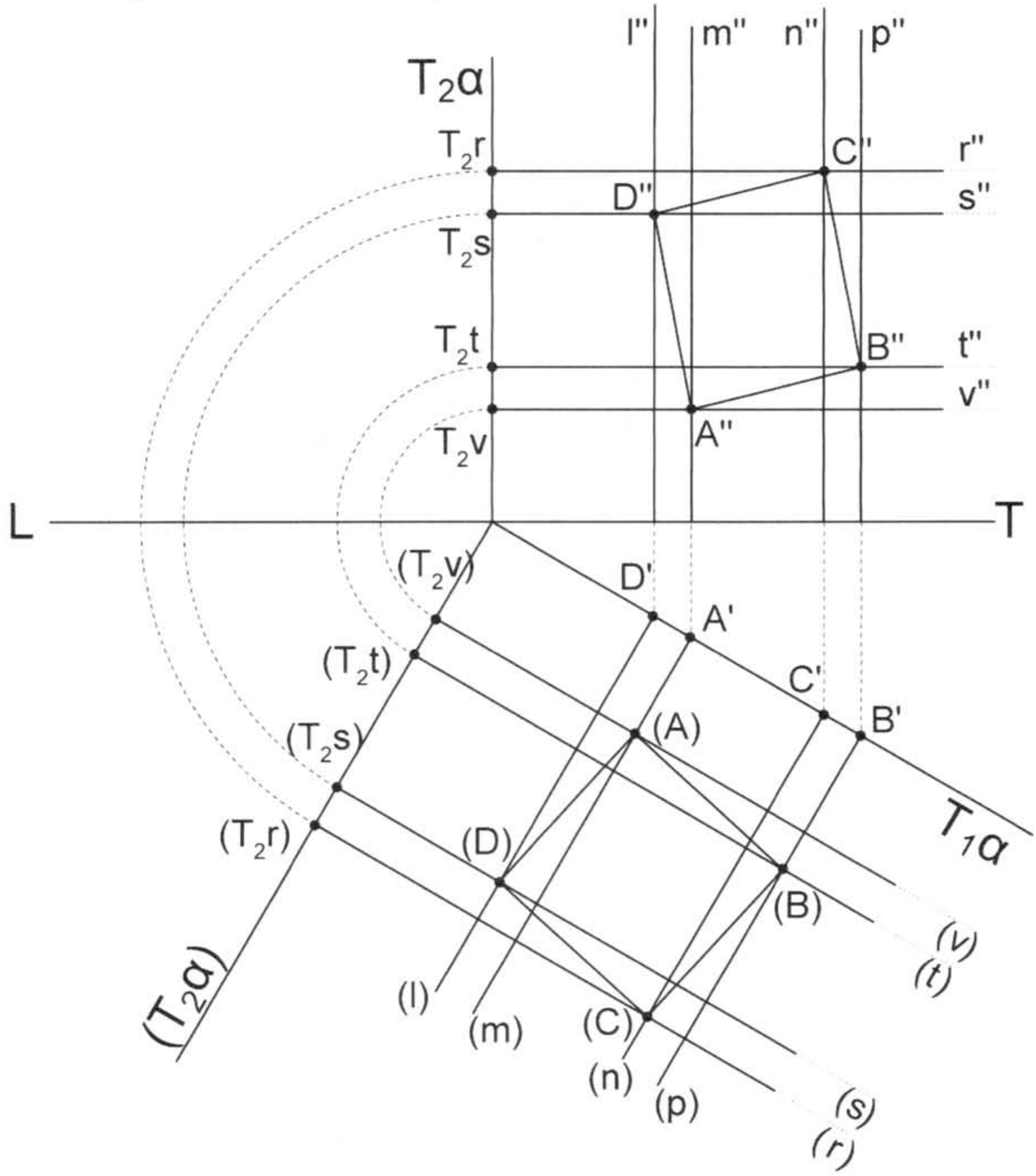

Fig. 95

2.9.6. Proiezione di un quadrato giacente su un piano generico

Date le tracce del piano α, si ribalta il piano stesso sul P.O. mediante un piano ausiliario, determinando (T_2α); si disegna quindi un quadrato giacente sul P.O., i cui vertici saranno (A), (B), (C), (D).

Per i vertici del quadrato (A), (B), (C), (D) si fanno passare le rette (r), (s), (t), (v) e si ricavano le loro proiezioni r', r'', s', s'', t', t''. v', v''.

Successivamente, dai punti (A), (B), (C) e (D) si conducono le normali a T_1α fino a incontrare le rette che contengono i suddetti punti in prima proiezione, ottenendo così A', B'. C'. D'.

Infine si ricavano le proiezioni verticali A'', B'', C'', D''(Fig. 96).

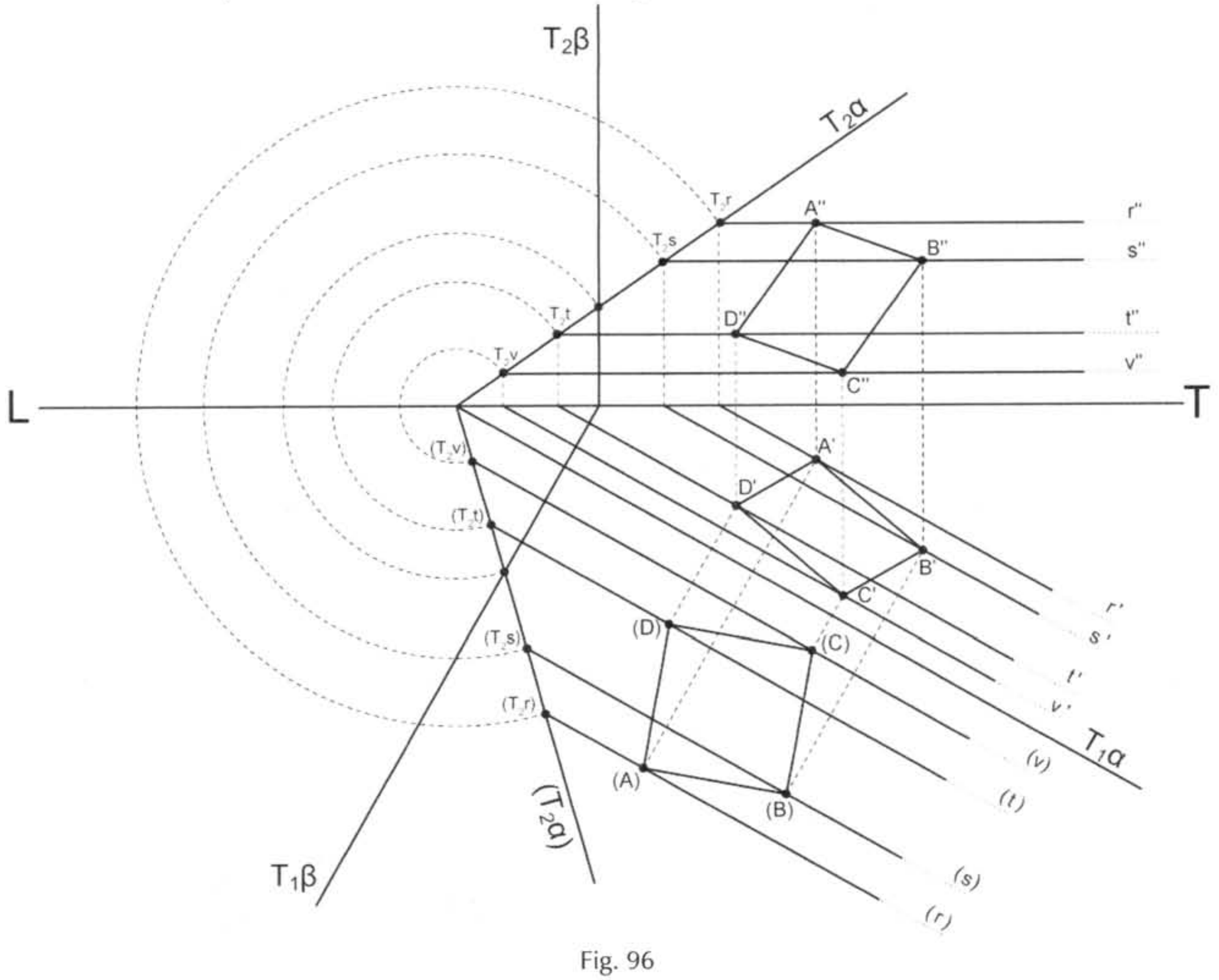

Fig. 96

2.10.1. Sezione di solidi con piani

Quando un solido viene sezionato con un piano, si determina una figura piana comune al solido e al piano stesso. Tale figura si definisce "sezione".

2.10.2. Piramide a base quadrata sezionata con un piano parallelo al P.O.

Sia data una piramide a base quadrata poggiante sul P.O. e un piano α parallelo al P.O. La sezione che si ottiene è un quadrato. In prima proiezione la sezione si proietta in vera grandezza, mentre in seconda proiezione essa coincide con la traccia del piano secante, limitatamente alla proiezione del solido (Fig. 97).

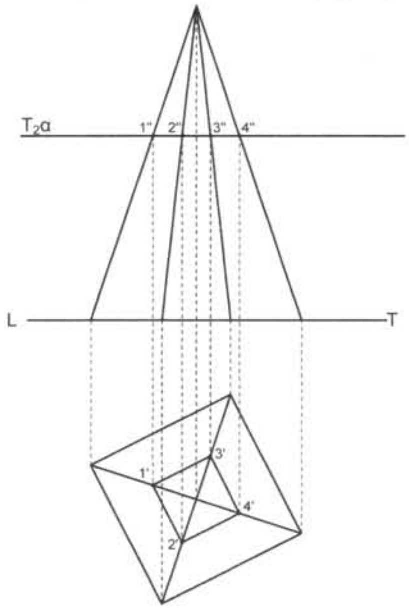

Fig. 97

2.10.3. Piramide a base quadrata sezionata con un piano parallelo al P.V. non passante per l'asse

La sezione che si ottiene è un trapezio. In seconda proiezione la sezione si proietta in vera grandezza, mentre in prima proiezione essa coincide con la traccia del piano secante, limitatamente alla proiezione del solido (Fig. 98).

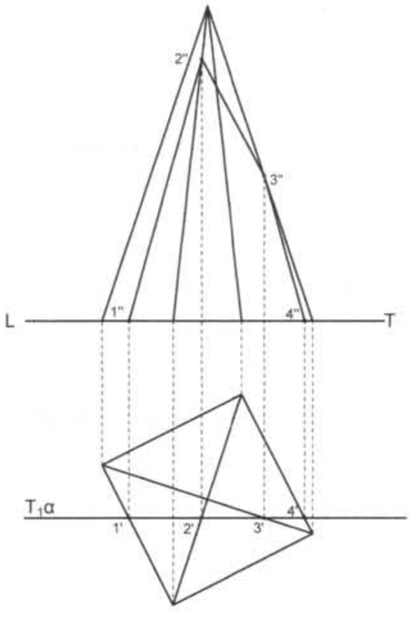

Fig. 98

2.10.4. Parallelepipedo sezionato con un piano parallelo al P.O.

In prima proiezione la sezione coincide con la proiezione del solido, mentre in seconda proiezione essa coincide con la traccia del piano α, limitatamente alla proiezione del solido (Fig. 99).

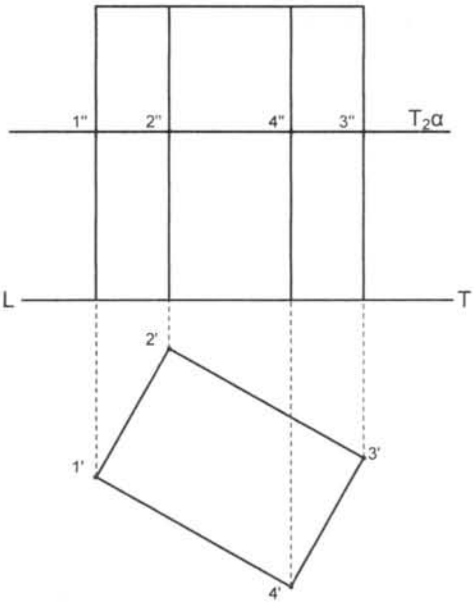

Fig. 99

2.10.5. Sfera sezionata con un piano parallelo al P.V.

La sezione che si ottiene è un cerchio. In seconda proiezione si proietta in vera grandezza, mentre in prima proiezione essa coincide con la traccia del piano α, limitatamente alla proiezione del solido (Fig. 100).

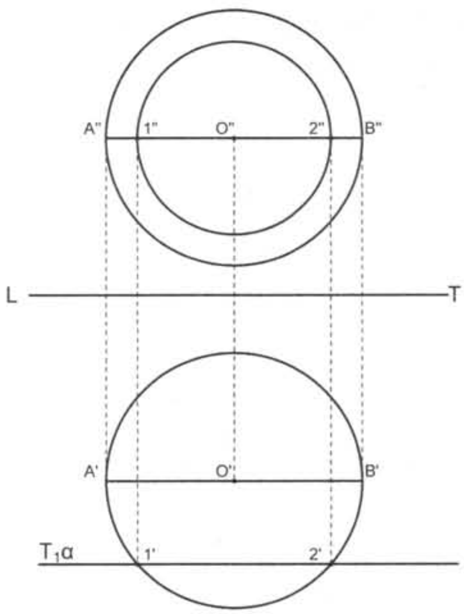

Fig. 100

2.10.6. Parallelepipedo sezionato con un piano perpendicolare al P.O. e inclinato al P.V.

La sezione che si ottiene è un rettangolo. In prima proiezione essa coincide con la traccia del piano α, limitatamente alla proiezione del solido; infatti il piano α è proiettante in prima proiezione. In proiezione verticale la sezione non è in vera grandezza, in quanto il piano α è inclinato rispetto al P.V. In questo caso, per avere la grandezza reale della sezione occorre ribaltare la sezione stessa, e quindi bisogna ribaltare il piano α (che contiene la sezione) su uno dei piani di proiezione. In questo caso, si è scelto di ribaltare α sul P.O. (Fig. 101).

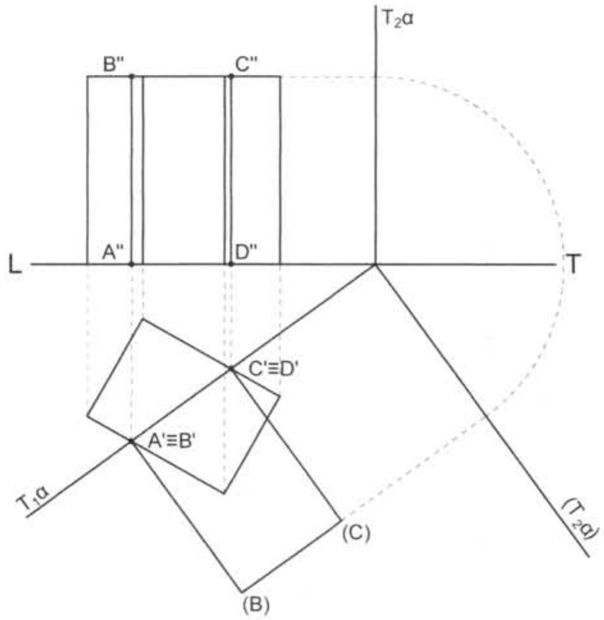

Fig. 101

2.10.7. Sfera sezionata con un piano perpendicolare al P.O. e inclinato al P.V.

La sezione che si ottiene è una circonferenza. In prima proiezione, la sezione coincide con la traccia del piano α, limitatamente alla proiezione della sfera. In seconda proiezione, la circonferenza di sezione si proietta secondo un'ellisse. Per tracciare l'ellisse basta disegnare gli assi. L'asse minore è dato dalla proiezione sul P.V. del segmento (1)-(2); l'asse maggiore è dato dalla proiezione sul P.V. del segmento (3)-(4) (Fig. 102).

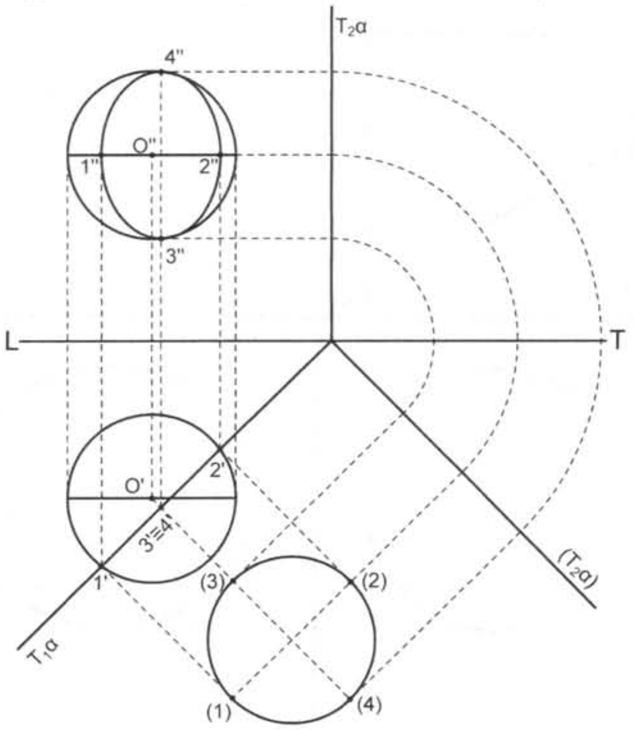

Fig. 102

2.10.8. Piramide sezionata con un piano perpendicolare al P.O. e inclinato al P.V.

La sezione che si ottiene è un triangolo. In prima proiezione la sezione coincide con la traccia orizzontale del piano α, limitatamente alla proiezione del solido. In seconda proiezione, la sezione non è in vera grandezza; per ricavare la vera grandezza si è scelto di ribaltare il piano α sul P.V. (Fig. 103).

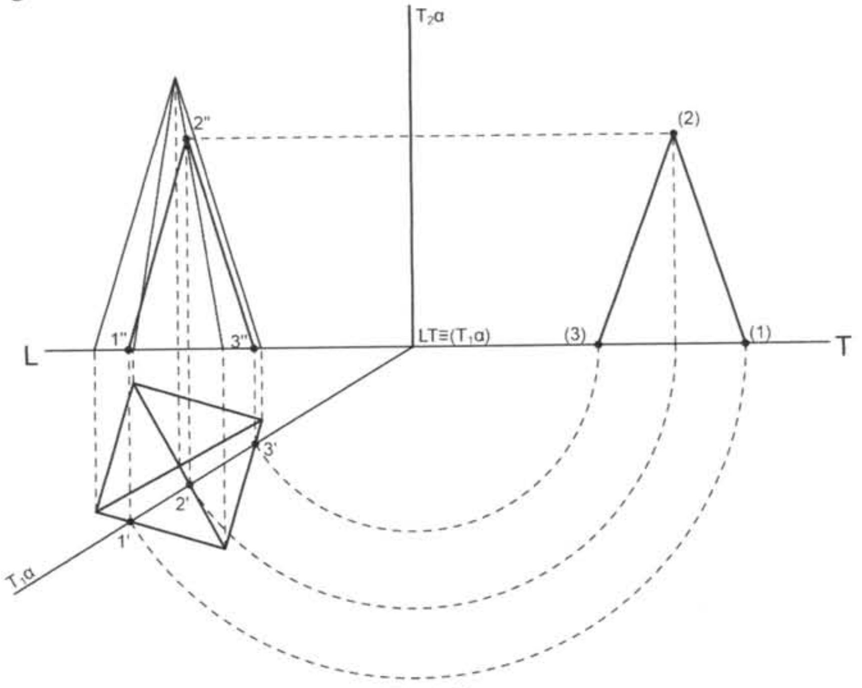

Fig. 103

2.10.9. Cilindro sezionato con un piano perpendicolare al P.V. e inclinato al P.O.

La sezione che si ottiene è un ellisse. In proiezione verticale la sezione coincide con la traccia del piano limitatamente alla proiezione del solido. In proiezione orizzontale la sezione coincide con la proiezione del solido. Per avere la vera grandezza dell'ellisse si ribalta α sul P. O.; per ottenere l'ellisse basta ribaltare gli otto punti della circonferenza di base e poi raccordarli (Fig. 104).

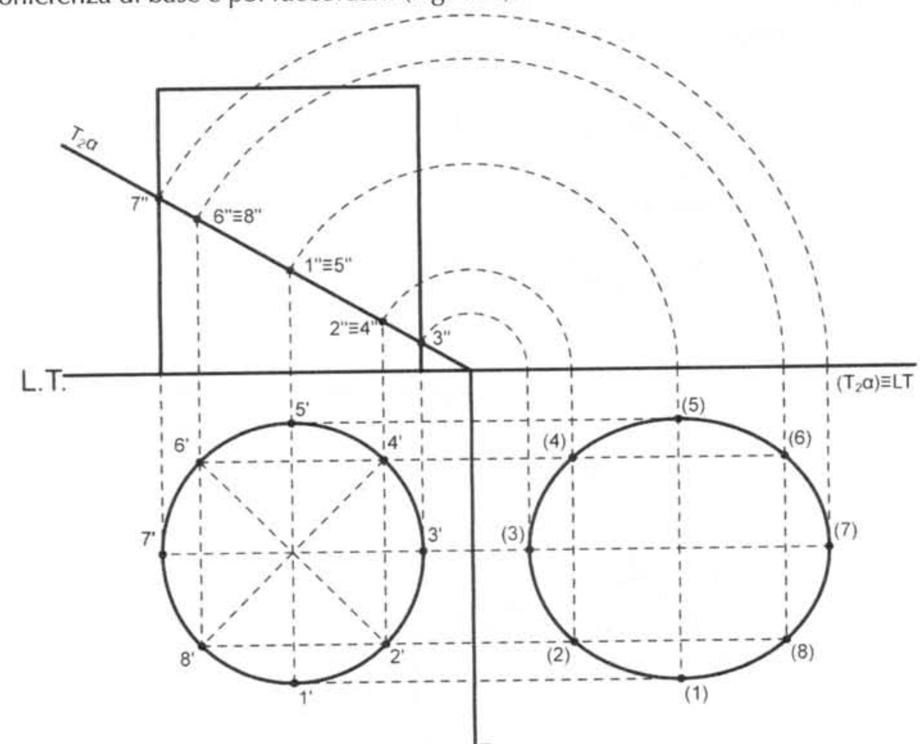

Fig. 104

2.10.10. Piramide sezionata con un piano perpendicolare al P.V. e inclinato al P.O.

La sezione che si ottiene è un trapezio. Per ottenere la sua vera grandezza si ribaltano i vertici della sezione. Il ribaltamento è effettuato sul P.O. (Fig. 105).

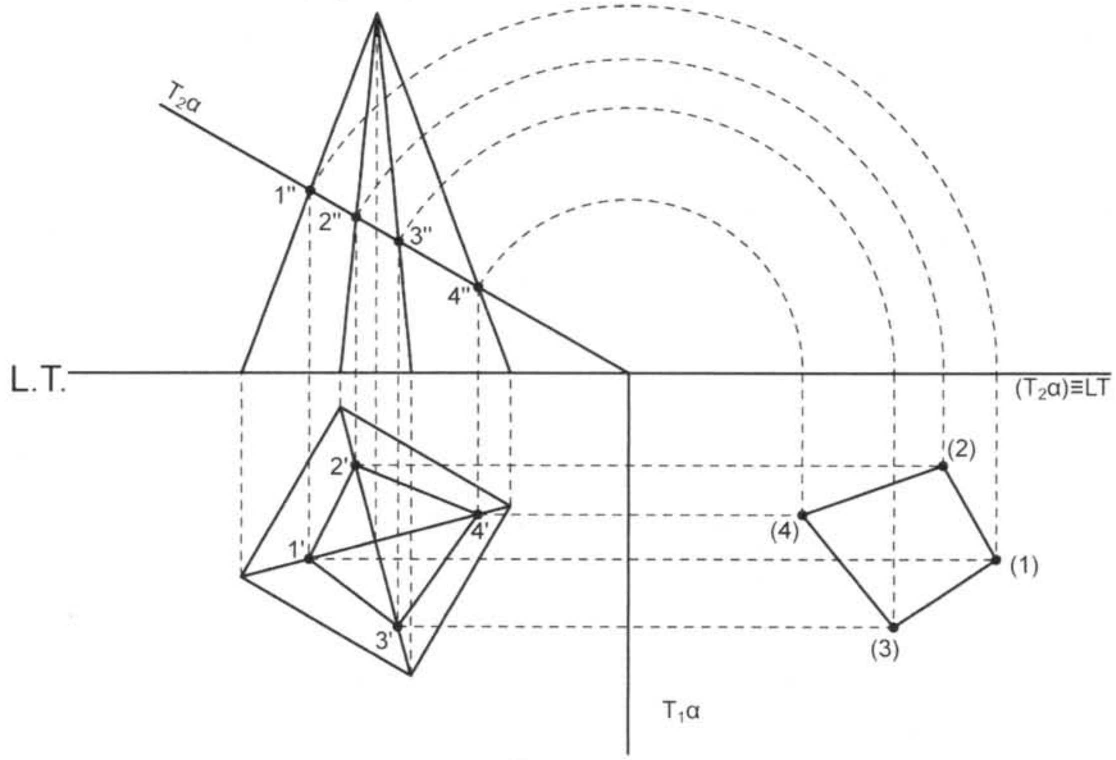

Fig. 105

2.10.11. Parallelepipedo sezionato con un piano perpendicolare al P.V. e inclinato al P.O.

La sezione che si ottiene è un quadrilatero. In proiezione orizzontale la sezione coincide con la proiezione del solido. In proiezione verticale coincide con la traccia di α, limitatamente alla proiezione del solido. Ribaltando il piano α, si ottiene la vera grandezza della sezione; il ribaltamento è effettuato sul P.O. (Fig. 106).

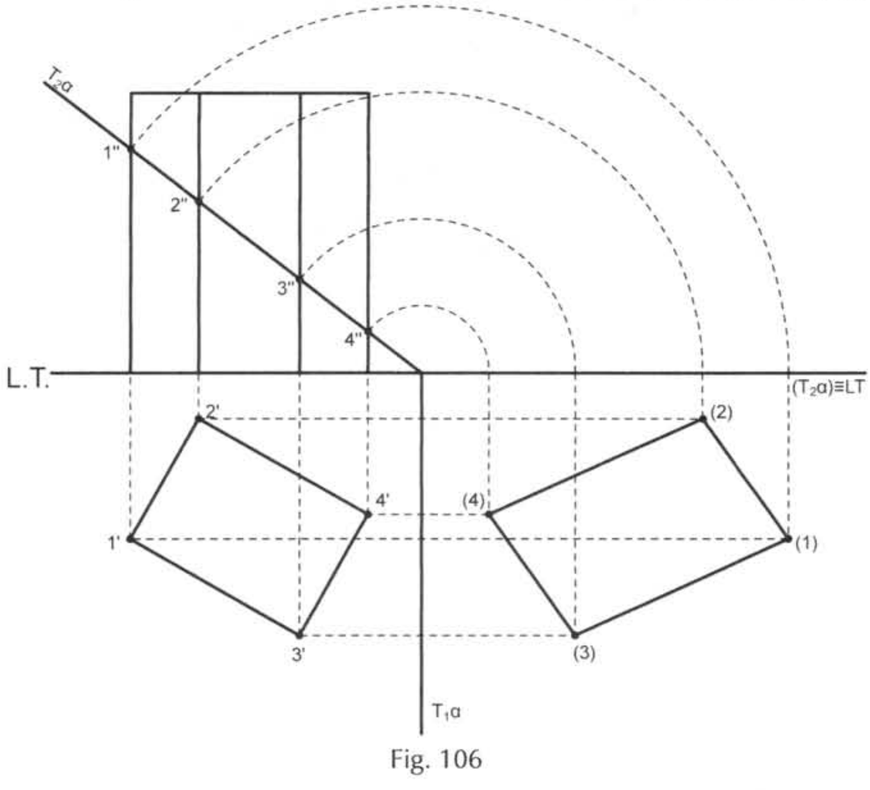

Fig. 106

2.10.12. Parallelepipedo sezionato con un piano generico

Uno dei metodi per determinare la sezione di solidi con piani inclinati ai due piani di proiezione (generici) consiste nel disegnare un piano ausiliario perpendicolare al P.O. e con la traccia orizzontale normale alla traccia del piano secante; proiettare sul piano ausiliario il solido e il piano di sezione determinando così una terza proiezione del solido e una terza traccia del piano che contiene la sezione. Successivamente si ribalta il piano ausiliario sul P.O.; la figura che si ottiene rappresenta il solido sezionato con un piano proiettante e quindi risulta facile disegnare le proiezioni ortogonali della sezione.

Sia dato un parallelepipedo e un piano α inclinato ai piani di proiezione. Per determinare la sezione si traccia un piano ausiliario β, perpendicolare al P.O. e con la traccia $T_1\beta$ ortogonale a $T_1\alpha$. Si proietta il parallelepipedo su β e si disegna la terza traccia di α (ossia $T_3\alpha$) ribaltando il punto B su ($T_2\beta$) e unendo (B) con A. Tale traccia, incontrando gli spigoli ribaltati del parallelepipedo, determina i vertici della sezione. Con il procedimento inverso al ribaltamento si ottiene la proiezione verticale della sezione. In proiezione orizzontale la sezione coincide con la proiezione del solido (Fig. 107).

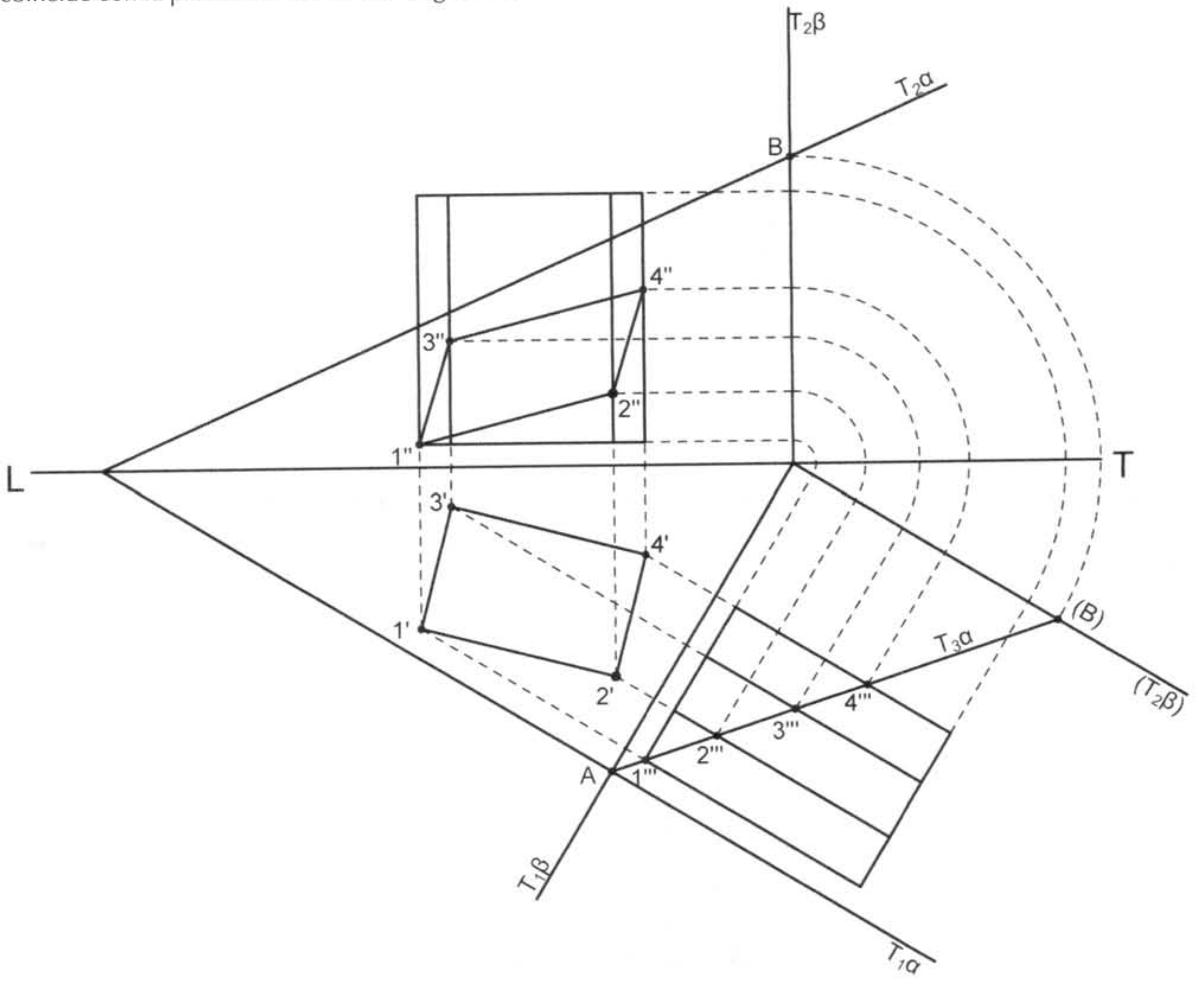

Fig. 107

2.10.13. Piramide a base quadrata sezionata con un piano generico

Si disegna un piano ausiliario β perpendicolare al P.O. con $T_1\beta$ ortogonale a $T_1\alpha$. Si proietta la piramide su β e si ricava la traccia di α su β, come mostrato nell'esempio precedente. $T_3\alpha$, incontrando gli spigoli della piramide ribaltata, determina i vertici della sezione. Con procedimento inverso al ribaltamento si ottengono le proiezioni della sezione (Fig. 108).

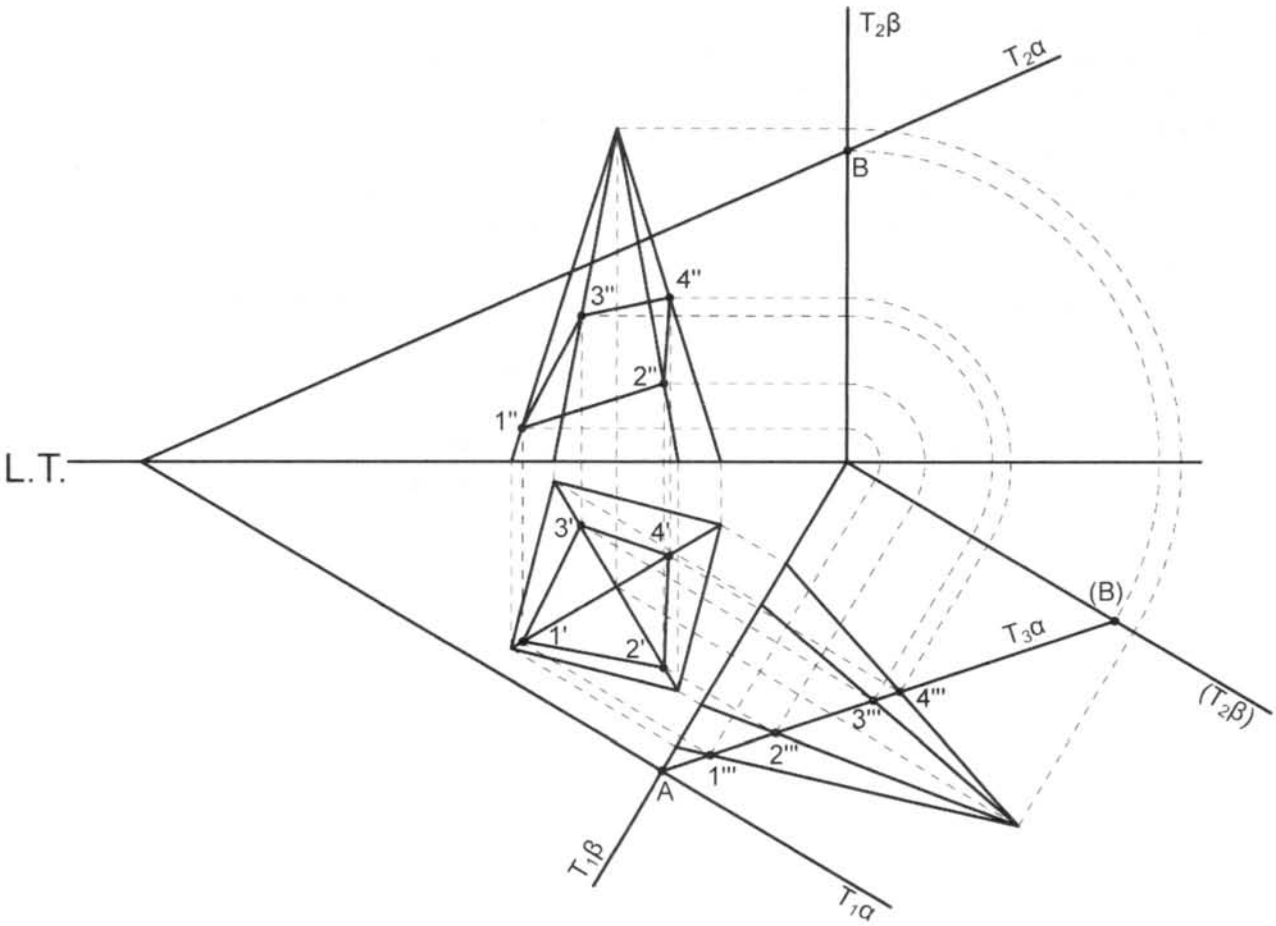

Fig. 108

3 - L'ASSONOMETRIA

3.1. Condizioni proiettive

Il metodo delle proiezioni ortogonali permette di descrivere gli oggetti sul piano in modo esauriente attraverso due o più immagini, ma non è in grado di produrre una rappresentazione che renda l'idea della tridimensionalità.

Per rappresentare sul piano un'unica immagine che dia l'idea della tridimensionalità bisogna ricorrere alle proiezioni assonometriche o alle proiezioni prospettiche. Le prime sono proiezioni *cilindriche* o *parallele*; in esse, come nelle proiezioni ortogonali, il punto di vista (centro di proiezione) è collocato a distanza *infinita*. Le seconde sono proiezioni *coniche* (*centrali)*; in esse il punto di vista è collocato a distanza *finita* (si veda, a questo proposito, la lezione 1, Figg. 4 e 5).

Da quanto detto, è evidente che la prospettiva riproduce una condizione spaziale compatibile con l'esperienza umana, mentre l'assonometria (come le proiezioni ortogonali) offre una visualizzazione che non rispetta la visione ottica.

L'obiettivo delle assonometrie è di costruire sul piano del foglio da disegno uno schema geometrico apparentemente tridimensionale in cui siano rispettati i rapporti metrici delle figure reali riprodotte.

Nell'assonometria, i raggi proiettanti che fuoriescono dall'ideale punto di vista (posto all'infinito) sono sempre paralleli fra di loro; rispetto al piano assonometrico possono assumere due posizioni fondamentali:

- incidenti ortogonalmente al quadro; in tal caso l'assonometria si dirà **ortogonale**.
- incidenti con un angolo diverso da 90°; in tal caso l'assonometria si dirà **obliqua** (Fig. 109).

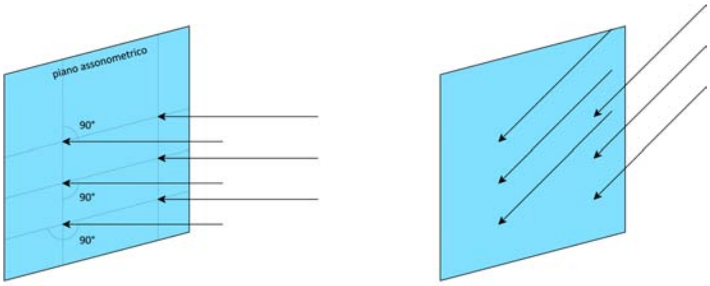

Fig. 109

La terza posizione possibile, ossia raggi proiettanti paralleli al quadro, non è rilevante in quanto non si verificherà l'intersecazione dei raggi visuali, ossia quella operazione di sezione indispensabile per poter ottenere un'immagine.

Rispetto alle proiezioni ortogonali, oltre al quadro, ai raggi visuali e agli oggetti da rappresentare, il metodo delle proiezioni assonometriche introduce un nuovo elemento: una terna di piani ortogonali (detti anche “piani di riferimento”), posti nello spazio, a cui l’oggetto da rappresentare viene correlato mediante tre proiezioni ortogonali. Sul piano assonometrico, quindi, vengono proiettate le tracce dei tre piani del triedro: esse formano un *sistema di assi* (Fig. 110). Il sistema di assi costituisce la struttura di riferimento per le dimensioni in lunghezza, larghezza e altezza delle forme da rappresentare.

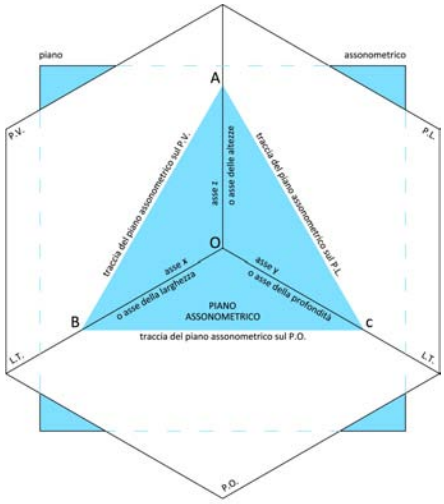

Fig. 110

I tre assi, detti anche assi assonometrici, sono definiti nel seguente modo:

- asse X, corrispondente alla proiezione sul piano assonometrico della traccia del P.V. con il P.O.;
- asse Y, corrispondente alla proiezione sul piano assonometrico della traccia del P.L. con il P.O.;
- asse Z, corrispondente alla proiezione sul piano assonometrico della traccia del P.V. con il P.L.

Ma perché il metodo delle proiezioni assonometriche introduce i tre piani di riferimento?

Analogamente alle proiezioni ortogonali, anche l'assonometria deve garantire una corrispondenza **biunivoca** fra punti nello spazio e punti sul piano di rappresentazione. Per questo motivo, dati l'oggetto da rappresentare, il quadro e il punto di vista, la rappresentazione deve essere definita in modo univoco; al tempo stesso, data la rappresentazione, deve essere definito univocamente l'oggetto e la sua posizione nello spazio.

Se consideriamo un punto P (Fig. 111), una direzione assonometrica l (essa rappresenta la direzione dei raggi visuali di un ideale osservatore posto all'infinito) e un piano di rappresentazione π, la proiezione del punto risulta definita dall'intersezione del raggio proiettante (passante per P e parallelo a l) col quadro. Fissato il punto P, la sua rappresentazione P' è definita in modo univoco; viceversa, data la rappresentazione P', non è possibile risalire alla posizione del punto P che la ha generata.

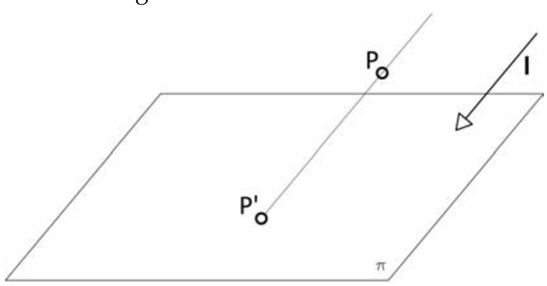

Fig. 111

Occorre quindi inserire un nuovo elemento nella rappresentazione: una terna di piani ortogonali ("piani di riferimento"), posti nello spazio, a cui l'oggetto da rappresentare viene correlato mediante tre proiezioni ortogonali.

La rappresentazione assonometrica consiste quindi nel proiettare sul quadro non solo l'oggetto ma anche le sue proiezioni ortogonali. Ne consegue quindi che un punto P è rappresentato sul quadro mediante quattro diverse immagini (Fig. 112), da cui è possibile risalire alla posizione del punto P nello spazio. Naturalmente, sul quadro occorre proiettare anche la terna cartesiana costituita dagli assi x, y e z. Si otterrà una terna di rette uscenti dal punto O' (immagine del punto O), origine degli assi cartesiani disposti nello spazio.

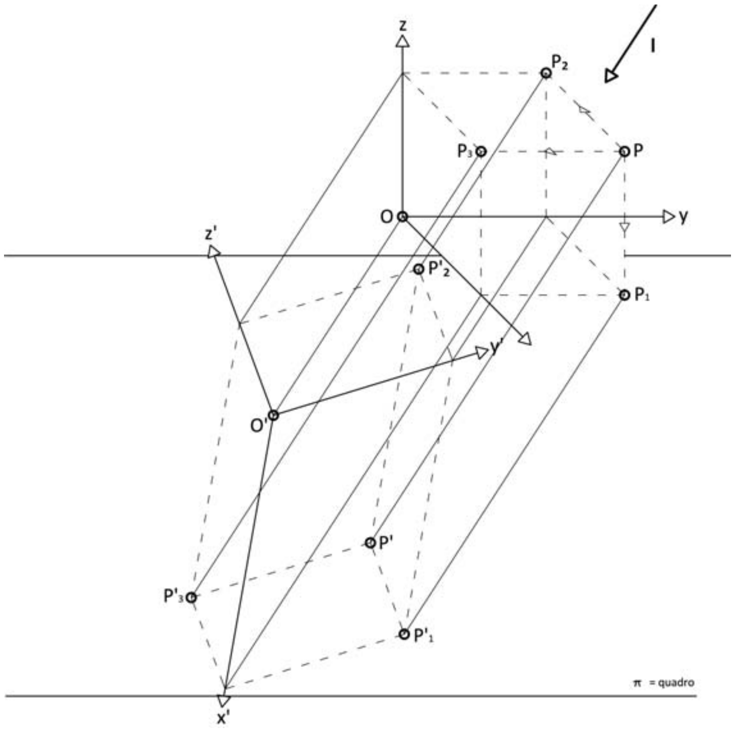

Fig. 112

È evidente che variando la direzione assonometrica rispetto al quadro o al variare della posizione della terna di assi cartesiani nello spazio, si ottengono sul piano diverse terne di rette; è evidente inoltre che gli angoli retti della terna subiscono una deformazione nella proiezione sul piano.

Allo stesso modo, un segmento che costituisce l'unità di misura disposto su uno degli assi cartesiani e proiettato sul piano dà luogo a un segmento di dimensione ridotta (a meno che esso non sia disposto parallelamente rispetto al quadro).

La terna di assi assonometrici può disporsi nello spazio in modo da proiettarsi sul piano assonometrico in infiniti modi. Tali modi possono ricondursi a tre sistemi fondamentali:

- MONOMETRICO o ISOMETRICO: il piano assonometrico interseca il triedro in modo che la proiezione dei tre assi formi tre angoli uguali (pari a 120° ciascuno - Fig. 113);

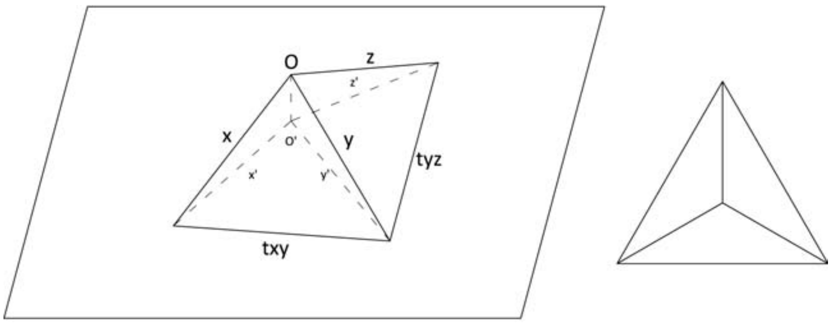

Fig. 113

- DIMETRICO: il piano assonometrico interseca il triedro in modo che la proiezione dei tre assi formi due angoli uguali e uno diverso (Fig. 114);

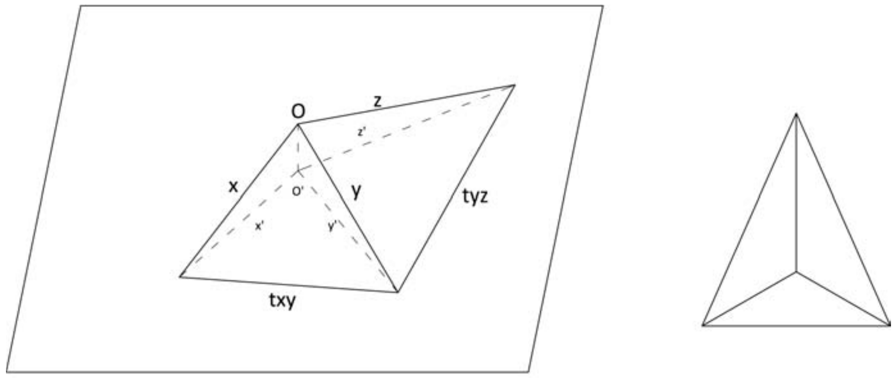

Fig. 114

- TRIMETRICO: il piano assonometrico interseca il triedro in modo che la proiezione dei tre assi formi tre angoli diversi (Fig. 115).

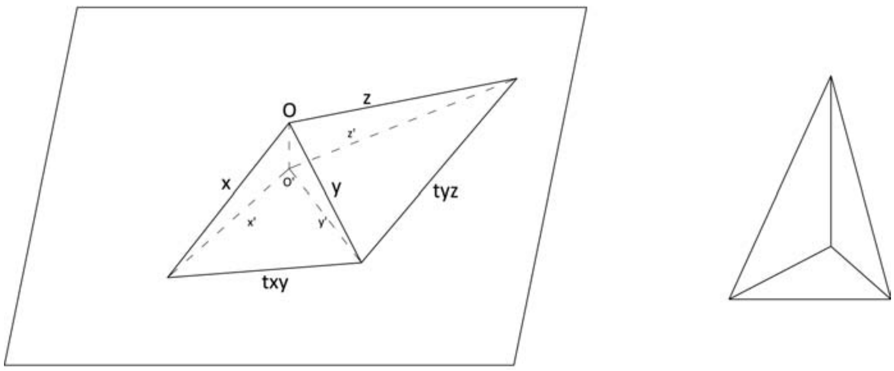

Fig. 115

Abbiamo quindi introdotto i due elementi fondamentali che ci permetteranno di identificare le assonometrie:

- la direzione dei raggi visuali rispetto al quadro (che le differenzia in **ortogonali** e **oblique**);
- gli angoli che la proiezione del triedro forma rispetto al quadro (che le differenzia in **monometriche o isometriche**, **dimetriche** e **trimetriche** - Fig. 116).

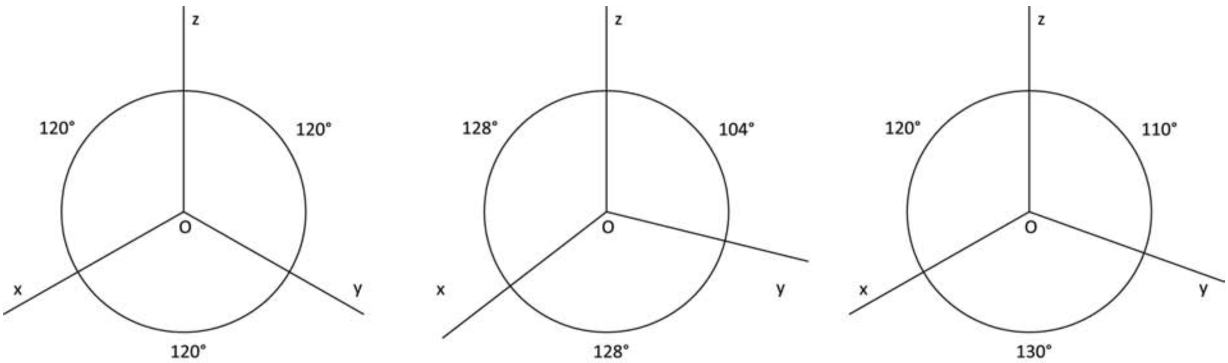

Fig. 116

Ribadiamo, a scanso di equivoci, che gli aggettivi "monometrico" e "isometrico" sono sinonimi.

3.2.1. L'assonometria ortogonale

In questo tipo di assonometria, come abbiamo visto, i raggi visuali sono ortogonali rispetto al quadro. La posizione della terna cartesiana può variare nello spazio, purché non si verifichi la condizione che uno degli assi sia perpendicolare al quadro; in tal caso, infatti, si verificherebbero le stesse condizioni proiettive delle proiezioni ortogonali (Fig. 117).

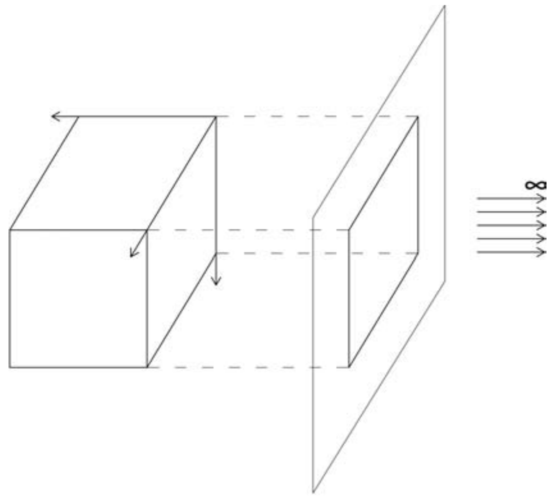

Fig. 117

Nell'assonometria ortogonale, quindi, gli assi subiscono sempre una riduzione, variabile a seconda della loro posizione rispetto al quadro (Fig, 118).

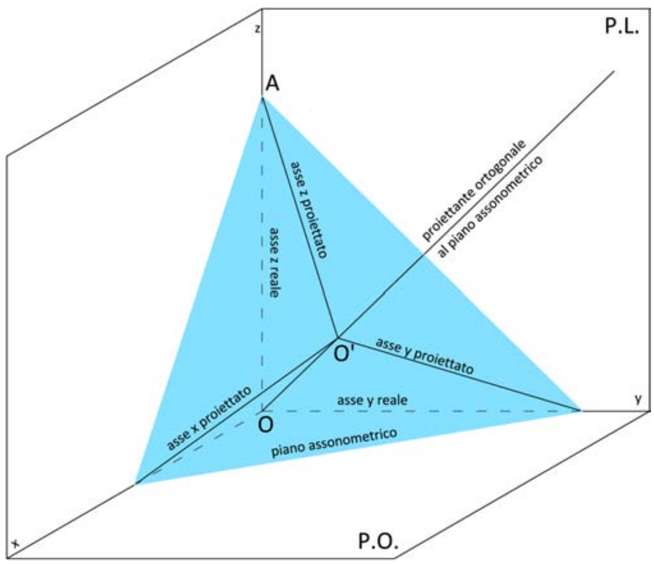

Fig. 118

Da ciò è evidente che nell'assonometria ortogonale **le figure oggettive si proiettano con immagini scorciate**, a meno che parti di esse non giacciano su un piano parallelo al piano assonometrico.

Quindi nell'assonometria ortogonale occorre definire i rapporti di riduzione subiti dalla proiezione degli assi, e l'applicazione degli stessi rapporti di riduzione a tutti gli elementi della figura da costruire sul piano assonometrico.

Per realizzare un'assonometria ortogonale occorre:

1. Realizzare le proiezioni ortogonali della figura oggettiva;
2. Stabilire i coefficienti angolari degli assi;
3. Calcolare i rapporti di riduzione degli assi assonometrici proiettati sul quadro;
4. Costruire il disegno applicando alle dimensioni dell'oggetto i relativi rapporti di riduzione.

Soffermiamoci sul punto 3.

3.2.2. Calcolo del rapporto di riduzione degli assi assonometrici.

Il rapporto si può ricondurre a un numero, corrispondente al rapporto fra la dimensione oggettiva di un segmento di valore unitario preso sull'asse e la dimensione del medesimo segmento proiettato sul quadro.

Il rapporto di riduzione è unico per i tre assi, se l'assonometria è monometrica (isometrica); i rapporti di riduzione sono due se l'assonometria è dimetrica; tre se l'assonometria è trimetrica.

Il calcolo grafico del rapporto di riduzione si effettua mediante due passaggi:

1. determinazione della intersecazione del piano assonometrico (o quadro, coincidente col foglio da disegno) con il triedro;

2. ritrovamento del rapporto di riduzione.

1. Determinazione della intersecazione del piano assonometrico con il triedro.

a. Si tracciano gli assi X, Y e Z. Di norma l'asse Z è disposto verticalmente. Gli angoli fra gli assi possono essere fissati in modo arbitrario. Stabiliamo un angolo di 130° fra gli assi XY e 120° fra gli assi XZ; ne consegue che fra gli assi YZ l'angolo sarà di 110° (la somma dovrà essere di 360°). Da quanto detto in precedenza, sappiamo già che la nostra assonometria sarà **trimetrica** (Fig. 119);

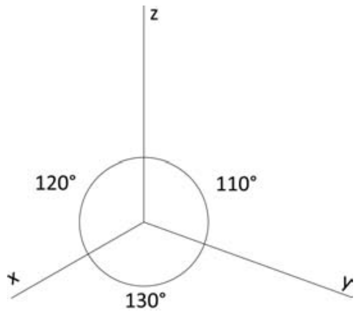

Fig. 119

b. Si prolunga l'asse Y oltre O[1] e si traccia una perpendicolare all'asse Y; essa intersecherà gli assi Z e X nei punti A e B (Fig. 120);

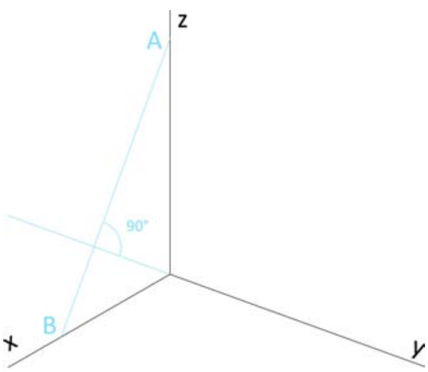

Fig. 120

c. Si prolunga l'asse X oltre O[1] e si traccia una perpendicolare all'asse X uscente da A; essa intersecherà l'asse Y nel punto C (Fig. 121);

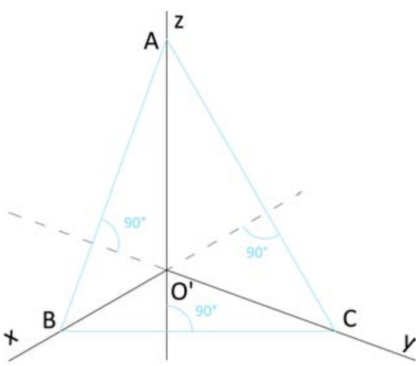

Fig. 121

d. Si unisce B con C e, volendo, si verifica se il prolungamento del segmento AO^1 è perpendicolare a BC.

Abbiamo così costruito la proiezione sul piano assonometrico dei tre assi e le tracce di intersecazione del piano assonometrico con i piani del triedro.

2. Ritrovamento del rapporto di riduzione

a. Consideriamo il triangolo A O^1B. Esso appare nel disegno ottuso in O^1; in realtà esso è retto in O^1. Dalla geometria elementare, sappiamo che un angolo inscritto in una semicirconferenza è retto. Quindi se individuiamo il punto medio di AB e tracciamo una semicirconferenza di diametro AB, qualunque angolo inscritto in essa sarà retto (Fig. 122).

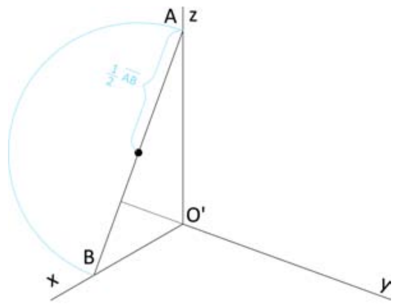

Fig. 122

b. Tracciamo l'altezza del triangolo A O^1B relativa all'ipotenusa AB. Essa è definita dal segmento O^1H (Fig. 123).

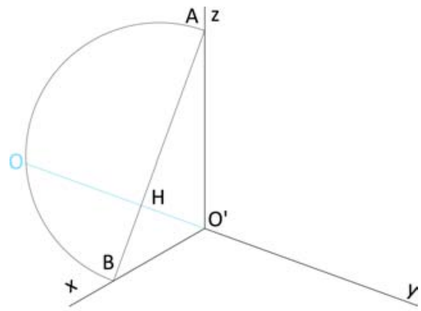

Fig. 123

c. Innalzando da H una perpendicolare ad AB, si definisce sulla circonferenza il punto O e, quindi, il triangolo AOB. retto in O (Fig. 124).

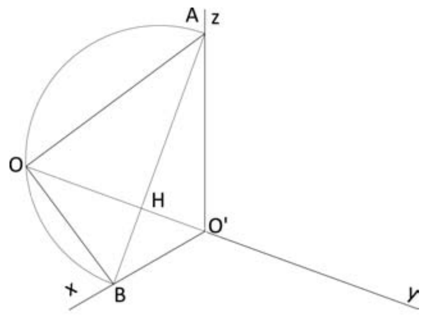

Fig. 124

Il triangolo AOB non è altro che l'immagine in vera forma del triangolo A O^1B che, invece, ci appare deformato per effetto dello scorcio assonometrico. In altre parole, abbiamo effettuato il ribaltamento del triangolo A O^1B sul piano assonometrico, determinandone la vera forma. La dimensione reale del cateto BO^1 sarà quindi pari a BO; la dimensione reale del cateto A O^1 sarà pari ad AO.

d. A questo punto possiamo ritrovare il rapporto di riduzione sugli assi X e Z. Il teorema di Talete dimostra che "se un fascio di rette parallele è tagliato da due trasversali, i segmenti sull'una sono proporzionali ai corrispondenti segmenti determinati sull'altra trasversale".

Consideriamo come trasversali i cateti OA e O^1A; fissiamo quindi su OA, cateto in dimensione reale, un segmento di valore unitario OD (p. es. 1 cm). Tracciamo una parallela ad OO^1 passante per D, e all'intersecazione con l'asse Z fissiamo il punto E. Il segmento O^1E rappresenta l'unità di misura ridotta per effetto della proiezione assonometrica. Esso è pari a cm 0,927. Il coefficiente di riduzione assonometrica sull'asse Z è quindi 0,927; per questo valore devono essere moltiplicate le misure di tutti gli elementi paralleli all'asse Z (altezze) prima di riportarle nel disegno (Fig. 125).

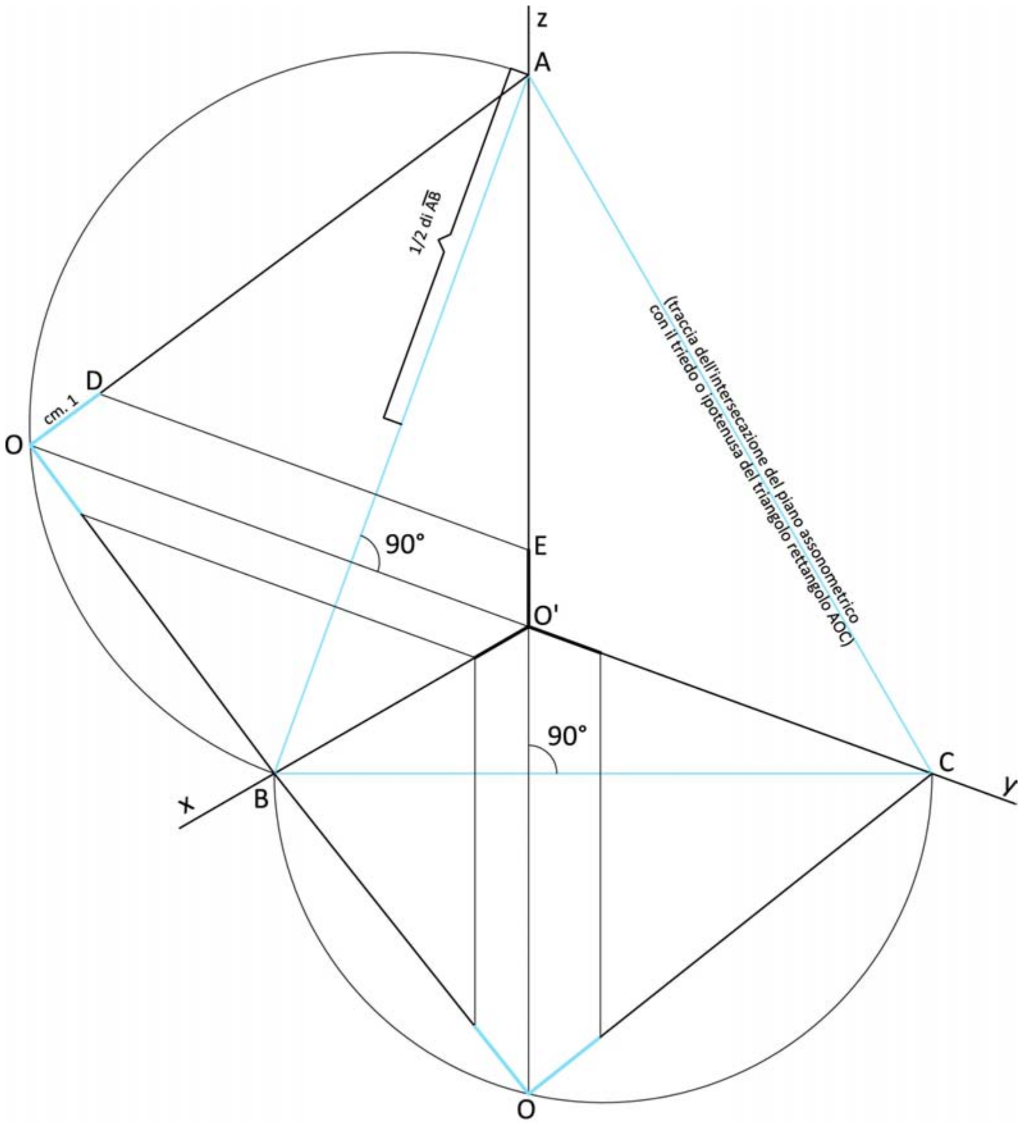

Fig. 125

e. Con procedimento analogo si determinano i coefficienti i riduzione assonometrica sugli assi X e Y.

3.2.3. Costruzione di assonometrie ortogonali

La costruzione di assonometrie ortogonali può avvenire secondo due procedimenti: il metodo diretto e il metodo indiretto. Il primo è più immediato; il suo uso risulta conveniente quando la figura da disegnare è semplice. Il secondo metodo si utilizza quando la figura da disegnare è più complessa, e quindi conviene realizzare un primo disegno per calcolare il coefficiente di riduzione, e un secondo disegno contenente la figura in proiezione assonometrica.

3.2.4. Assonometria ortogonale di un parallelepipedo col metodo diretto

Dopo aver realizzato le proiezioni ortogonali del parallelepipedo e dopo avere impostato il sistema di assi assonometrici (in questo caso, gli angoli sono di 140°, 106°, 114°), si procede come segue:

1. Si ruotano due triangoli del triedro trirettangolo, seguendo il procedimento spiegato nelle figure 120-124;
2. Sui cateti ruotati si riportano le dimensioni reali degli spigoli del parallelepipedo;
3. Dai cateti ruotati si riportano le stesse dimensioni sui cateti scorciati;
4. Si completa la figura proiettando gli spigoli del parallelepipedo parallelamente agli assi assonometrici (Fig. 126).

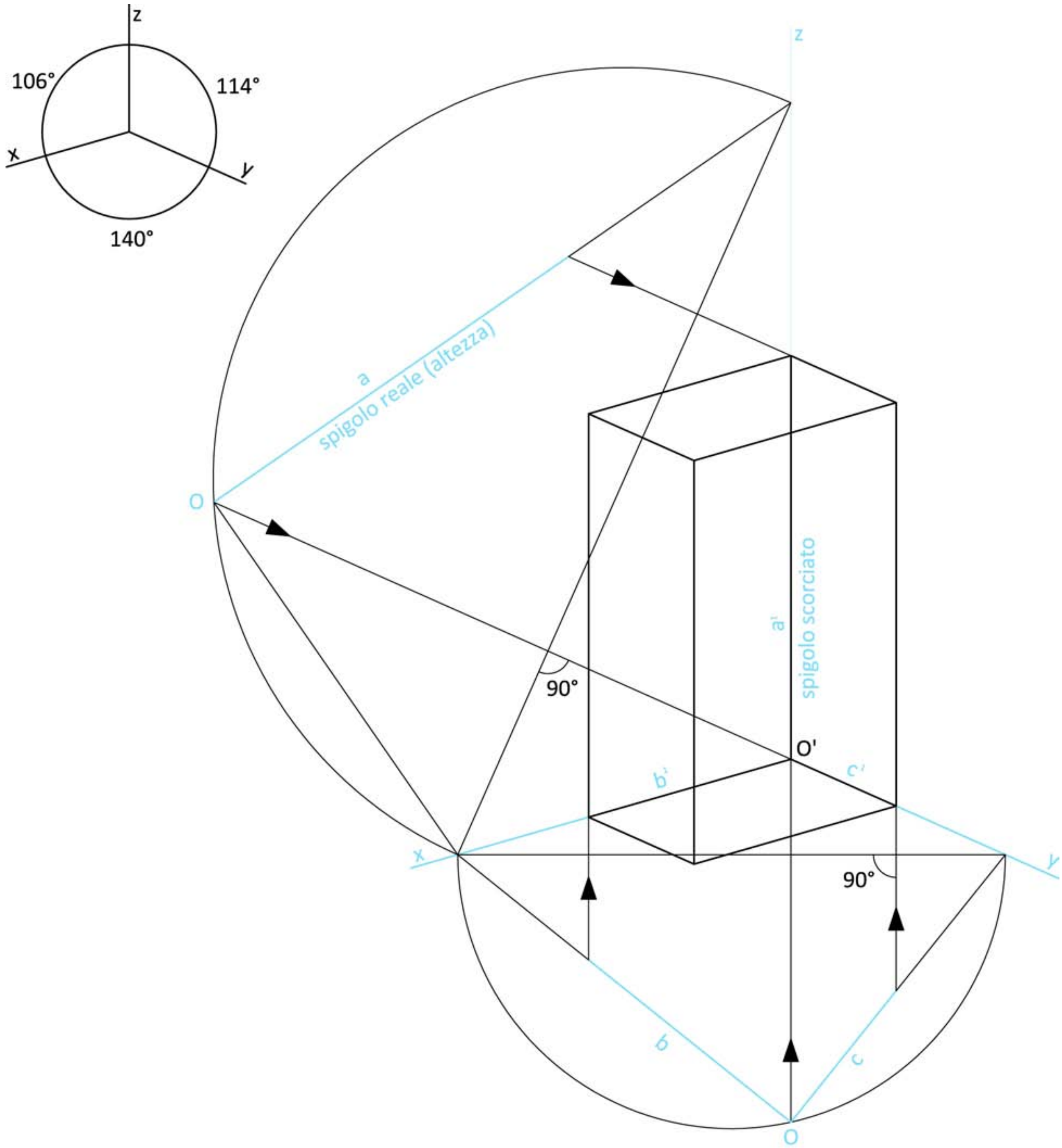

Fig. 126

3.2.5. Assonometria ortogonale di un parallelepipedo col metodo indiretto

Dopo aver realizzato le proiezioni ortogonali del parallelepipedo e dopo avere impostato il sistema di assi assonometrici (anche in questo caso, gli angoli sono pari a 140°, 106°, 114°), si procede come segue:

1. Si trova il coefficiente di riduzione assonometrica sui tre assi, secondo le modalità spiegate nelle figure 120-125; in questo caso, i coefficienti sono di 0,811 per l'asse X, 0,695 per l'asse Y, 0,927 per l'asse Z (Fig. 127);

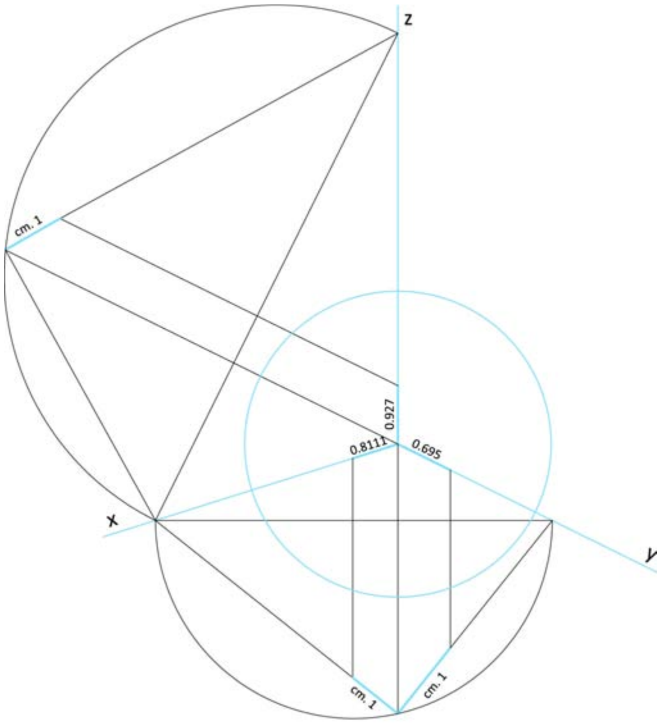

Fig. 127

2. Si imposta un nuovo sistema di assi assonometrici (con i medesimi coefficienti angolari), per poter costruire su di esso il disegno;

3. Si riportano sugli assi assonometrici gli spigoli del parallelepipedo con le misure ridotte secondo i coefficienti individuanti al punto precedente e si completa la figura proiettando gli spigoli del parallelepipedo parallelamente agli assi assonometrici (Fig. 128).

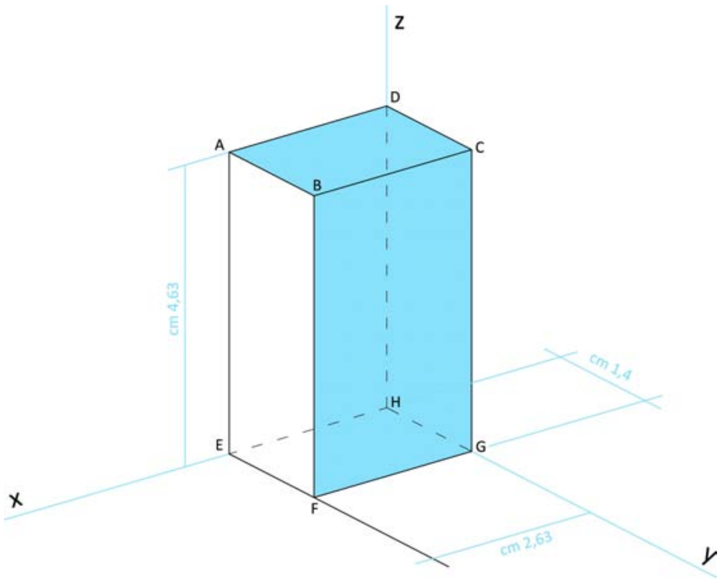

Fig. 128

Da quanto abbiamo visto, non è possibile ottenere un'assonometria ortogonale con piano assonometrico parallelo a uno dei tre piani del triedro. Per questo motivo è impossibile usare direttamente le piante o i prospetti di una figura per costruire un'assonometria ortogonale.

3.3.1. L'assonometria obliqua

Come già detto in precedenza, nell'assonometria obliqua i raggi proiettanti che fuoriescono dall'ideale punto di vista intersecano il piano assonometrico formando un angolo diverso da 90° (vedi Fig.109).

Anche la posizione della terna di riferimento può essere comunque disposta nello spazio (eventualmente, **anche con due assi paralleli al quadro**). Si possono quindi avere infinite assonometrie oblique, sia variando la posizione degli assi rispetto al quadro, sia variando la direzione dei raggi proiettanti. Naturalmente, anche per l'assonometria obliqua parleremo di assonometria *obliqua monometrica* (o *isometrica*), *obliqua dimetrica* e *obliqua trimetrica*.

3.3.2. Assonometrie oblique ricorrenti

In teoria, è possibile realizzare innumerevoli tipi di assonometria. Il *teorema di Pohlke* dimostra che *disegnando tre segmenti uscenti da uno stesso punto e aventi lunghezze diverse e direzioni arbitrarie, esiste sempre un centro di proiezione all'infinito tale che i tre segmenti possano considerarsi come la proiezione sul quadro di tre segmenti di uguale lunghezza a due a due ortogonali fra di loro.*

Nella pratica effettiva del disegno se ne utilizza un numero molto limitato. Per esempio, l'assonometria trimetrica è poco utilizzata in quanto è di scomoda costruzione. Anche per gli angoli da assegnare alle rette costituenti gli assi, di solito si utilizzano ancora oggi valori facilmente ottenibili con gli strumenti tradizionali da disegno.

Fra queste, l'**assonometria cavaliera**. Si tratta di un'assonometria obliqua in cui il piano di proiezione viene disposto parallelamente a uno dei piani del triedro mongiano. In questo modo, si ottiene un sistema di assi in cui si ha sempre un angolo di 90°, solitamente coincidente con la pianta, il prospetto frontale o il prospetto laterale dell'edificio da rappresentare (Fig. 129).

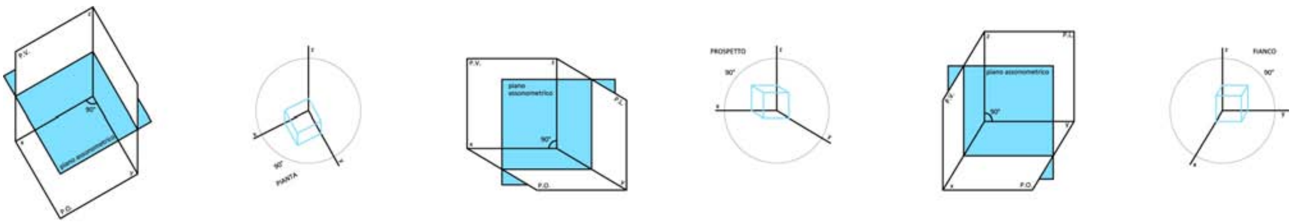

Fig. 129

Naturalmente, anche le assonometrie cavaliere sono infinite; esse sono tante quanti i possibili angoli che il sistema di assi può avere (oltre l'angolo di 90°). Nella pratica, le più usate sono:

- **l'assonometria cavaliera rapida** (dimetrica). Questo tipo di assonometria prevede un angolo di 90° sul piano verticale e due angoli di 135° sui piani laterale e orizzontale. L'immagine che ne deriva privilegia la visualizzazione del prospetto, e spesso produce una dimensione eccessiva degli oggetti disposti sull'asse delle profondità. Per questo motivo, quasi sempre si usa ridurre della metà (o di un quarto) il valore delle misure sull'asse Y (Fig. 130);

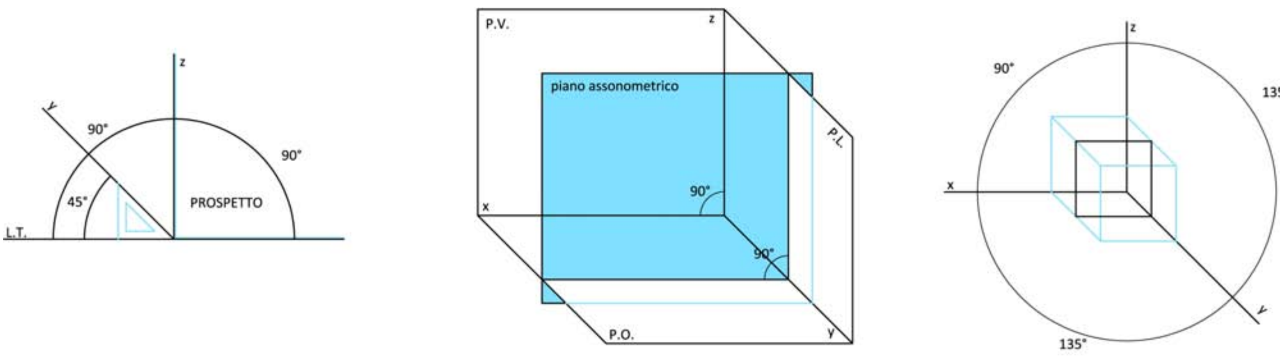

Fig. 130

- **l'assonometria cavaliera militare** (distinta nel tipo "a 30° e 60°" e nel tipo "a 45°"). Questo tipo di assonometria prevede un angolo di 90° sul piano orizzontale, e permette di disegnare direttamente la pianta e poi di alzare le verticali direttamente da essa. Il tipo "a 30° e 60°" privilegia la visione delle coperture e di un prospetto; gli altri angoli sono di 120° fra gli assi relativi al piano parallelo al prospetto maggiormente in evidenza, e 150° fra gli assi relativi al piano parallelo al prospetto più scorciato (Fig. 131). Il tipo "a 45°" privilegia la visione delle coperture e mostra i due prospetti laterali con lo stesso scorcio (Fig. 132).

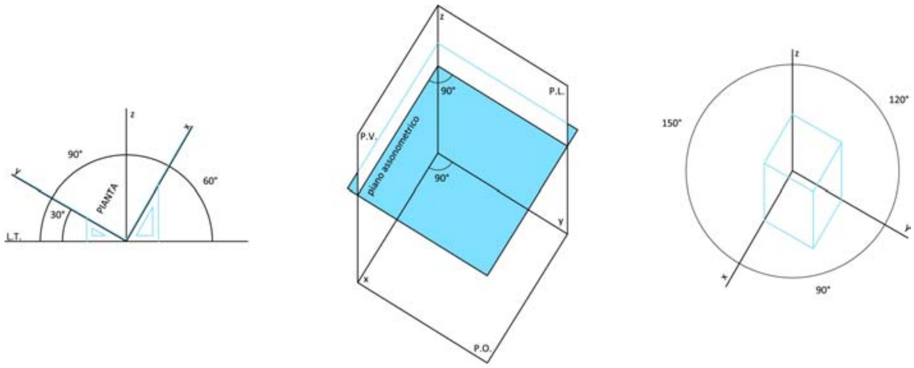

Fig. 131

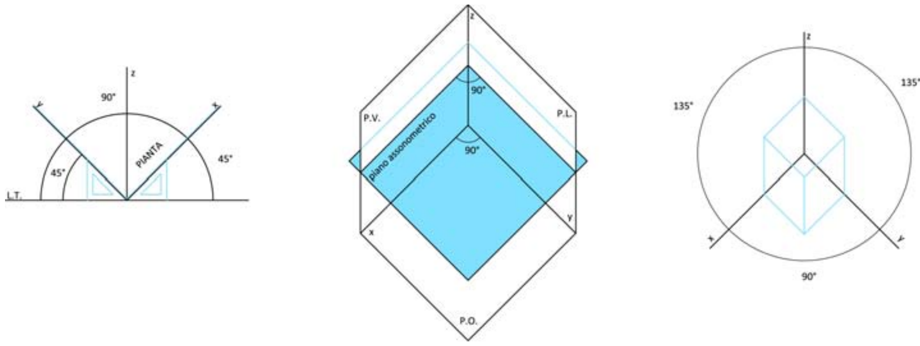

Fig. 132

Tuttavia è possibile costruire un'assonometria cavaliera militare disponendo la pianta con qualsiasi angolazione (Fig. 133).

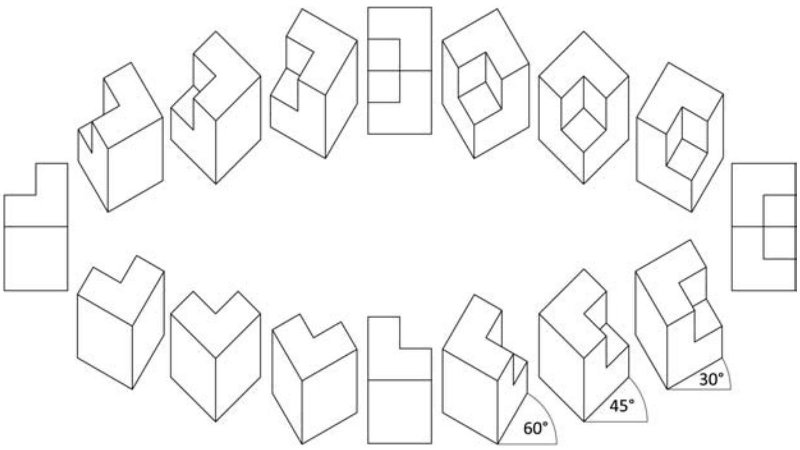

Fig. 133

3.3.3. Esercizi

Sia dato un parallelepipedo con spigoli pari a cm 4, cm 6, cm 8, sormontato da una piramide retta a base quadrata con l pari a cm 3 e h pari a cm 5. Rappresentare il parallelepipedo e la piramide nei seguenti tipi di assonometria:

- ortogonale isometrica, metodo diretto e metodo indiretto;
- ortogonale dimetrica, coefficienti angolari a scelta, metodo diretto e indiretto;
- ortogonale trimetrica, coefficienti angolari a scelta, metodo diretto e indiretto;
- cavaliera rapida (dimetrica), con riduzione delle profondità pari a 0,5;
- cavaliera militare "a 30° e 60°";
- cavaliera militare "a 45°";
- cavaliera planometrica.

3.4. Uso dell'assonometria nel disegno di architettura

Una caratteristica tipica dell'assonometria consiste nella possibilità di misurare direttamente sul disegno, in scala, le dimensioni reali degli oggetti. Inoltre le rette parallele si mantengono tali anche nel disegno, mentre gli angoli, su alcuni piani, vengono deformati. Dal punto di vista operativo, disegnare un'assonometria, specie se monometrica, è abbastanza semplice. L'assonometria più immediata da realizzare è quella cavaliera militare: basta disporre la pianta sul tavolo da disegno e costruire le altezze. L'assonometria ortogonale monometrica e l'assonometria cavaliera rapida, invece, presentano una deformazione angolare dei piani orizzontali; per questo motivo, richiedono la costruzione preventiva della pianta in assonometria; solo dopo è possibile disegnare le facciate esterne. La scelta del tipo di assonometria da realizzare dipende, come sempre, dal tema della rappresentazione. L'assonometria ortogonale monometrica mostra con la stessa angolazione tutti i lati dell'edificio e consente una buona vista della copertura. Il suo difetto principale consiste nel fatto che deforma i valori angolari su tutti i piani (Fig. 134).

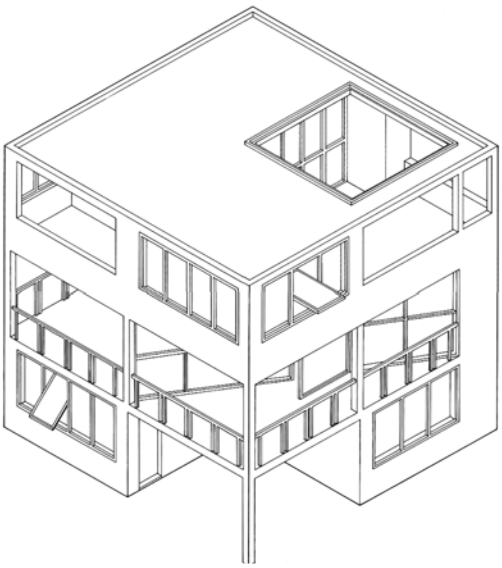

Fig. 134

L'assonometria cavaliera militare consente, come abbiamo visto, di variare la posizione della pianta rispetto all'orizzontale; in questo modo è possibile ottenere un elevato numero di vedute differenti. Se si vuole privilegiare la vista di un lato piuttosto che un altro, solitamente si scelgono gli angoli di 30° e 60° (Fig. 135).

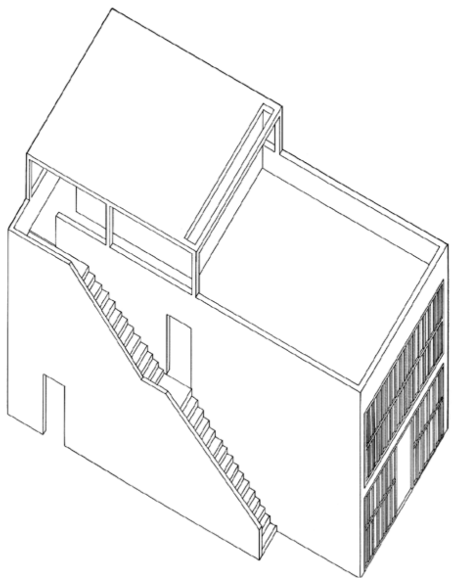

Fig. 135

Se in un'assonometria cavaliera militare si vogliono mostrare con lo stesso scorcio i due lati dell’edificio, bisogna disporre la pianta in modo da formare angoli di 45° rispetto all'orizzontale (Fig. 136).

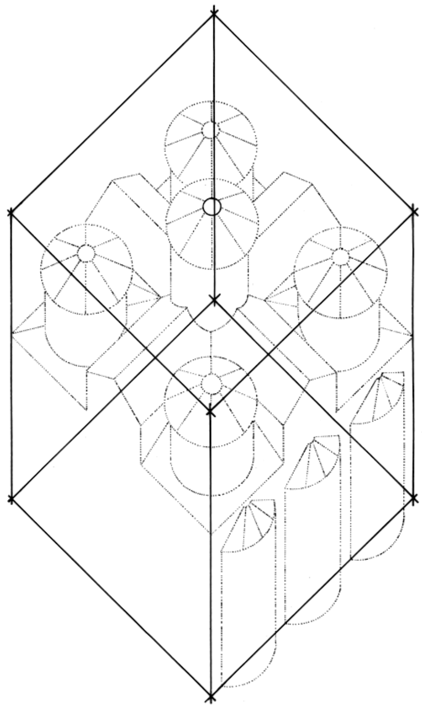

Fig. 136

In alcuni casi conviene disporre l‘oggetto con un lato parallelo all'orizzontale. Questo tipo di assonometria mette bene in evidenza la copertura e il fronte principale dell'edificio, e da alcuni autori è definito "planometria", oppure "assonometria verticale". Ricordiamo che si tratta sempre di un'assonometria cavaliera militare, solitamente monometrica (Fig. 137).

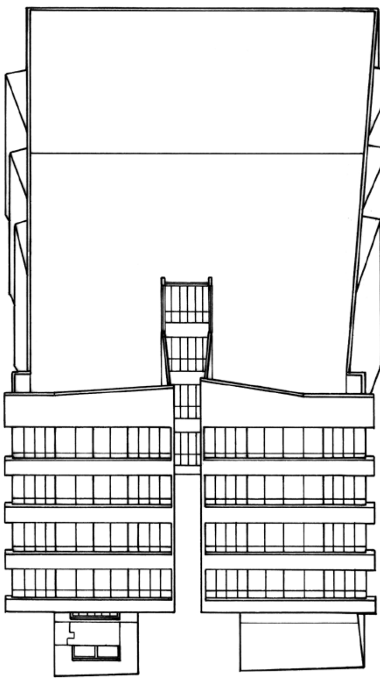

Fig. 137

L'assonometria cavaliera rapida privilegia la vista di un prospetto dell'edificio. È molto adatta a descrivere il lato frontale di un'architettura o di un oggetto. Se la profondità non prevale sulle altre dimensioni, si può realizzare una monometrica; in caso contrario, come abbiamo visto, conviene scegliere una dimetrica, dimezzando o riducendo di un quarto il valore delle dimensioni sull'asse delle profondità (Fig. 138).

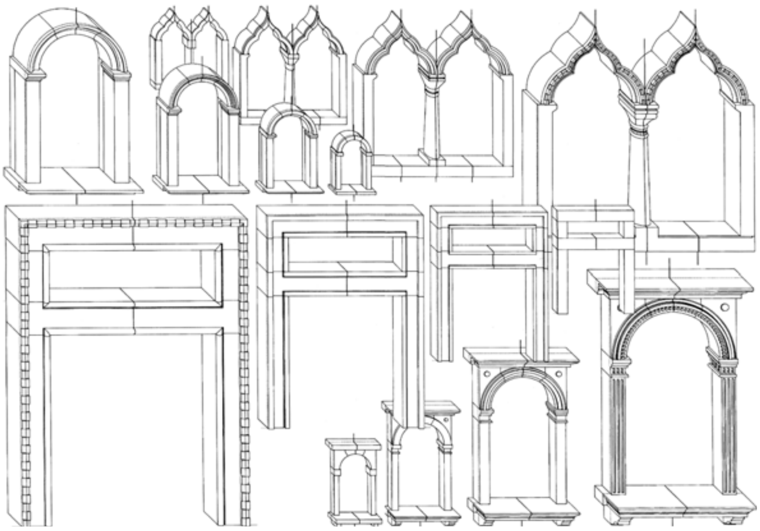

Fig. 138

L'assonometria è una forma della rappresentazione molto versatile: è utile a rappresentare l'architettura, piccoli oggetti ma anche ampie porzioni di territorio. È possibile costruire l'assonometria dello spazio interno di un edificio in diversi modi: rimuovendo una o più facce del volume esterno, costruendo una veduta dal basso verso l'alto, immaginando le pareti trasparenti oppure tagliando l'edificio con uno o più piani e rimuovendone una parte. In quest'ultimo caso il disegno prende il nome di "spaccato assonometrico" e raccoglie informazioni tipiche della pianta, dei prospetti, della planimetria e della sezione. Un tipo particolare di assonometria è l'esploso assonometrico. L'esploso si costruisce immaginando (o, addirittura, tracciando) delle rette punteggiate, veri e propri "binari" che consentono di ricomporre idealmente le varie parti che compongono l'oggetto, facendole scorrere su di esse (Fig. 139).

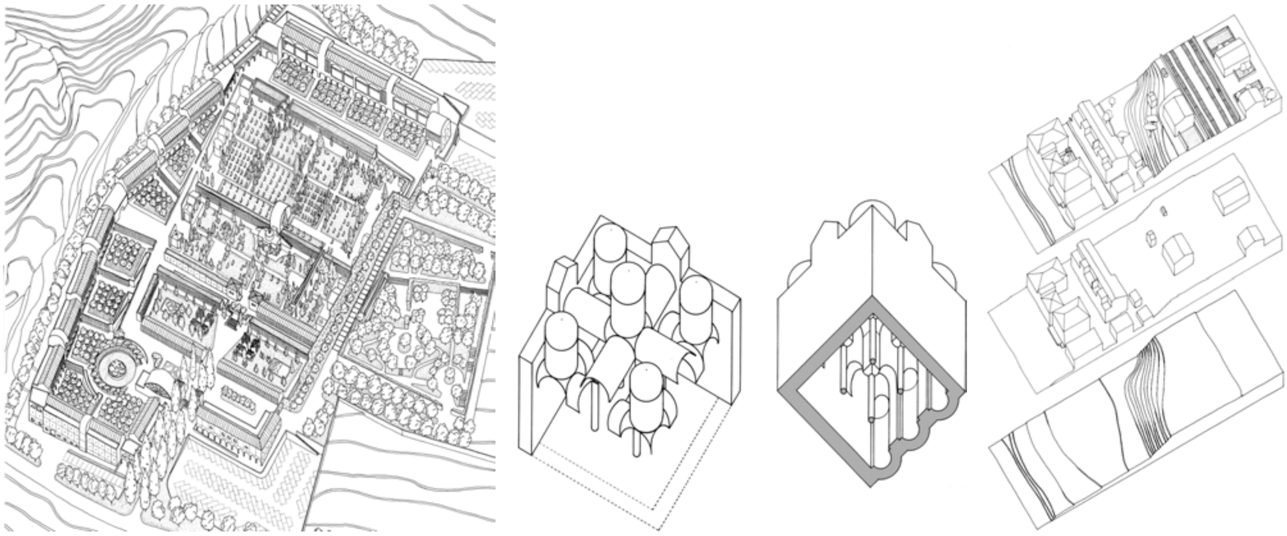

Fig. 139

4 - LA PROSPETTIVA

4.1.1. Condizioni proiettive

La prospettiva è una rappresentazione bidimensionale in grado di esprimere la profondità dello spazio e la posizione degli oggetti all'interno di esso mediante un'immagine che simula la visione umana.

La prospettiva è caratterizzata da uno scorcio più o meno accentuato. La caratteristica tipica di ogni prospettiva infatti, risiede proprio nel fatto che le dimensioni degli oggetti si riducono man mano che si allontanano dall'osservatore.

A differenza dell'assonometria, la prospettiva è una proiezione *conica* (o *centrale*); il punto di vista (centro di proiezione) è collocato a una distanza finita e, quindi, misurabile.

L'obiettivo delle prospettive è di costruire sul piano del foglio da disegno uno schema geometrico apparentemente tridimensionale che appaia verosimigliante, nonostante i rapporti metrici delle figure reali riprodotte non siano immediatamente desumibili dal disegno.

La Fig. 140 riproduce le condizioni proiettive di una prospettiva: una figura oggettiva da rappresentare (un cubo), un quadro π (corrispondente al foglio da disegno), un punto di vista a distanza finita (occhio dell'osservatore). L'immagine che si ottiene sul quadro in seguito all'intersecazione dei raggi visuali che uniscono il punto di vista con i punti caratteristici del cubo, è la prospettiva del cubo stesso.

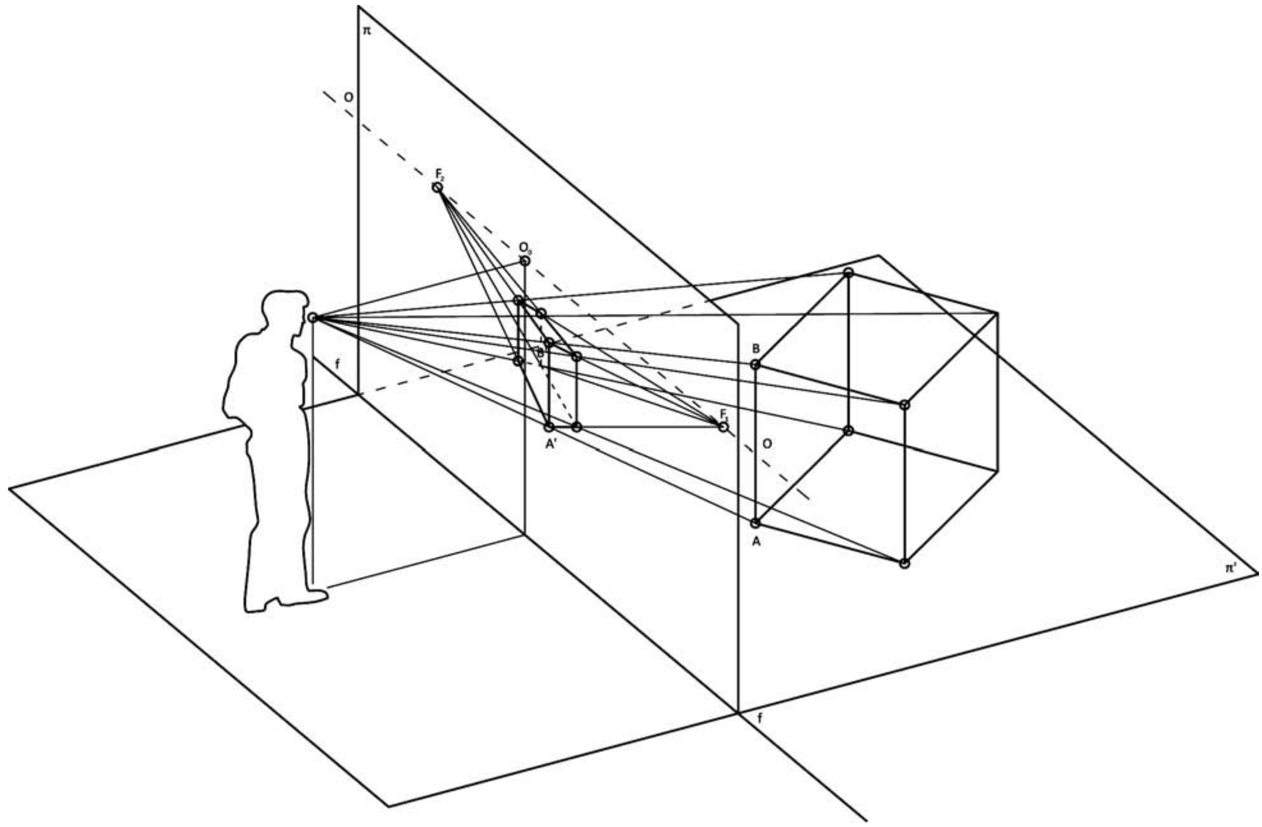

Fig. 140

La figura 140 mostra una situazione generica; si possono infatti avere diversi "modelli" di prospettiva. Essi derivano dalle reciproche posizioni del punto di vista, dell'oggetto e del quadro.

Se il quadro è verticale e parallelo a uno dei lati dell'oggetto da rappresentare (immaginiamo sempre di voler rappresentare uno spazio di forma parallelepipeda), si ottiene un modello che prende il nome di **prospettiva centrale** (Fig. 141).

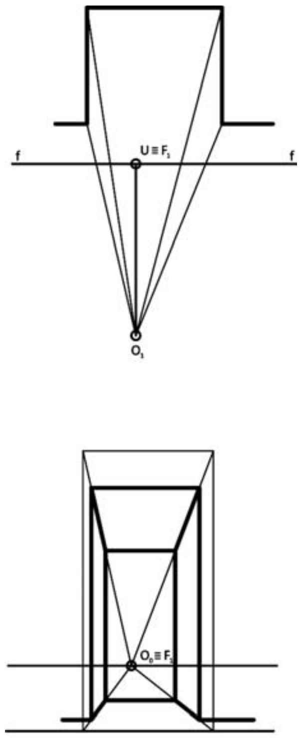

Fig. 141

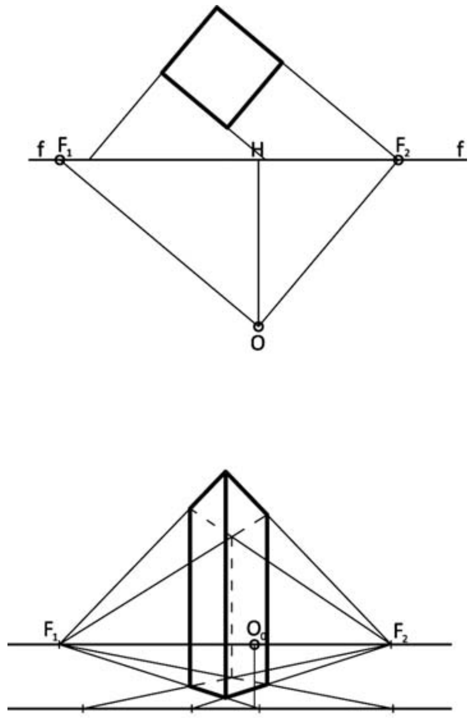

Fig. 142

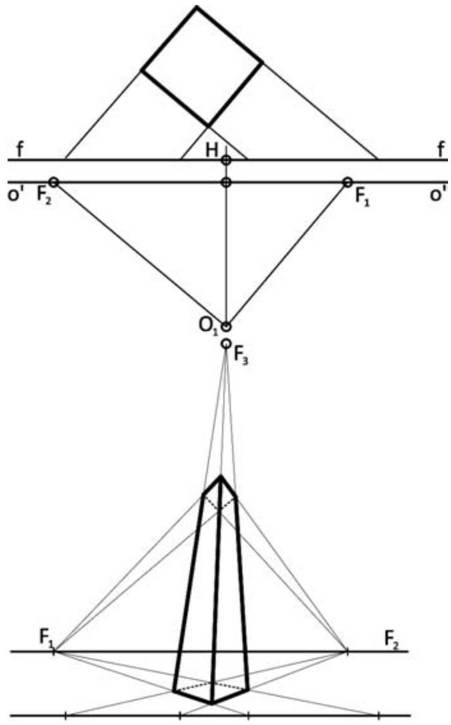

Fig. 143

Se il quadro è verticale ma parallelo a nessuno dei lati del parallelepipedo, il modello prende il nome di **prospettiva accidentale** (Fig. 142).

Se, infine, il quadro è inclinato rispetto alla verticale, si ottiene un modello che prende il nome di **prospettiva a quadro inclinato** (Fig. 143).

Le espressioni "prospettiva a un punto di fuga", "prospettiva a due punti di fuga", "prospettiva a tre punti di fuga" **sono errate e non devono essere usate MAI**. Chiariremo meglio questo concetto più avanti.

4.1.2. Elementi di riferimento per la costruzione di una prospettiva (da memorizzare!!)

Per la costruzione di una prospettiva occorre definire (Fig. 144):

- un piano π, detto **quadro**, disposto verticalmente;
- un piano ausiliario π_1, detto **geometrale**, disposto orizzontalmente;
- la retta di intersezione fra π e π_1**,** detta **linea di terra;**
- un **punto di vista** O;
- la proiezione O_0 di O sul quadro, detta **punto principale**;
- la distanza O-O_0, detta **distanza principale**;
- la retta parallela alla linea di terra passante per O_0, detta **linea di orizzonte**;
- la proiezione O_1 di O sul geometrale, prima **proiezione del punto di vista**;
- la distanza fra O e O_1, detta **altezza del punto di vista**;
- la proiezione di O_0 sul geometrale (punto H);
- il cerchio, tracciato sul quadro con centro in O_0 e raggio pari alla distanza principale, detto **cerchio di distanza**;
- i punti di intersezione della linea di orizzonte col cerchio di distanza, detti **punto di distanza destro** (Dd) e **punto di distanza sinistro** (Ds).

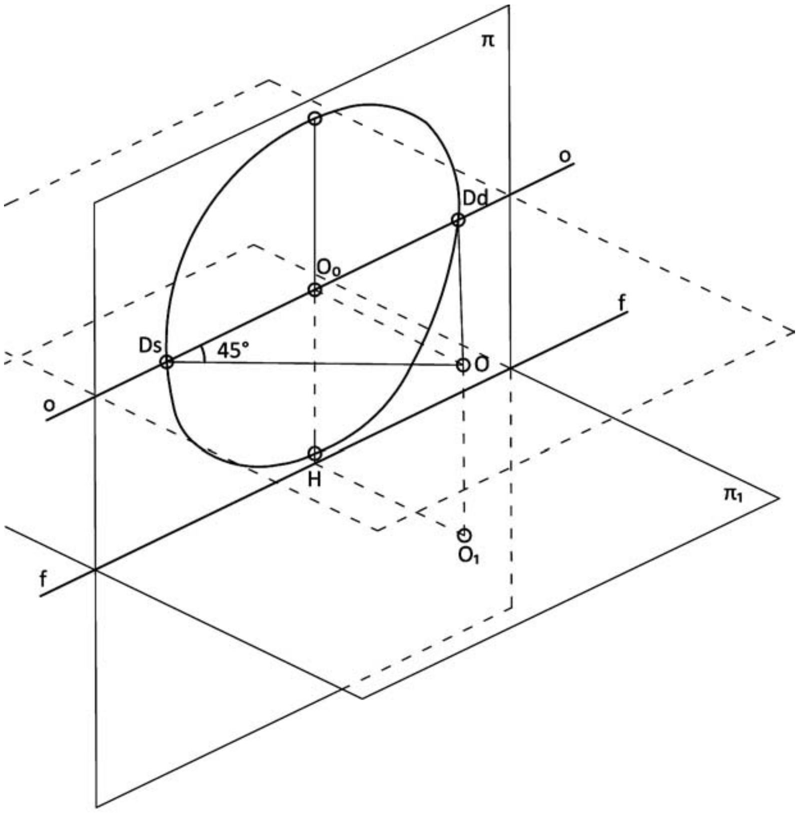

Fig. 144

Gli elementi visualizzati nella Fig. 144, però, non possono essere rappresentati in un'unica proiezione ortogonale. Occorre quindi riprodurli utilizzando il Metodo di Monge (doppia proiezione ortogonale), ampiamente trattato nelle prima parte del corso (Fig. 145).

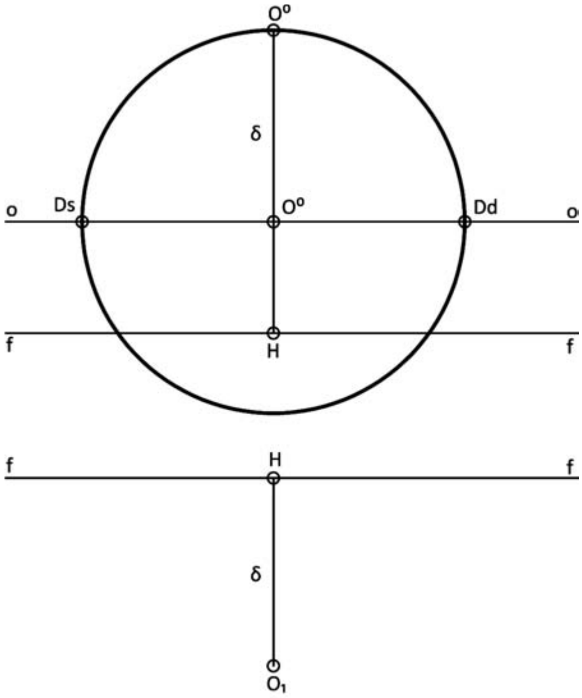

Fig. 145

4.2.1. Quadrato posto sul geometrale in posizione generica (Fig. 146)

Dovendo rappresentare il lato AB di un quadrato **disposto sul geometrale**, innanzitutto si costruisce la retta r passante per esso e la si prolunga fino a incontrare la linea di terra nel punto Tr (**traccia** di r).

A questo punto dobbiamo costruire l'immagine di tale retta. Per far ciò, dobbiamo proiettare due dei suoi punti dal punto di vista O sul quadro π, e trovare la loro rappresentazione. Il primo punto che sceglieremo sarà Tr; esso infatti appartiene sia alla retta r che al quadro π, e la sua immagine coincide con se stesso.

Il secondo punto che sceglieremo sarà il punto improprio (ossia all'infinito) della retta r. La sua proiezione si otterrà mandando la parallela ad r da O. Tale parallela incontrerà il quadro nel punto Fr, **punto di fuga** della retta r e immagine del punto all'infinito di r sul quadro.

A questo punto, basterà unire Tr con Fr per ottenere r', immagine prospettica della retta r.

Per ottenere l'immagine prospettica dei punti A e B, è sufficiente congiungerli con O e trovare l'intersezione dei raggi visuali con r'. Tali intersezioni determineranno A' e B', immagini prospettiche di A e B.

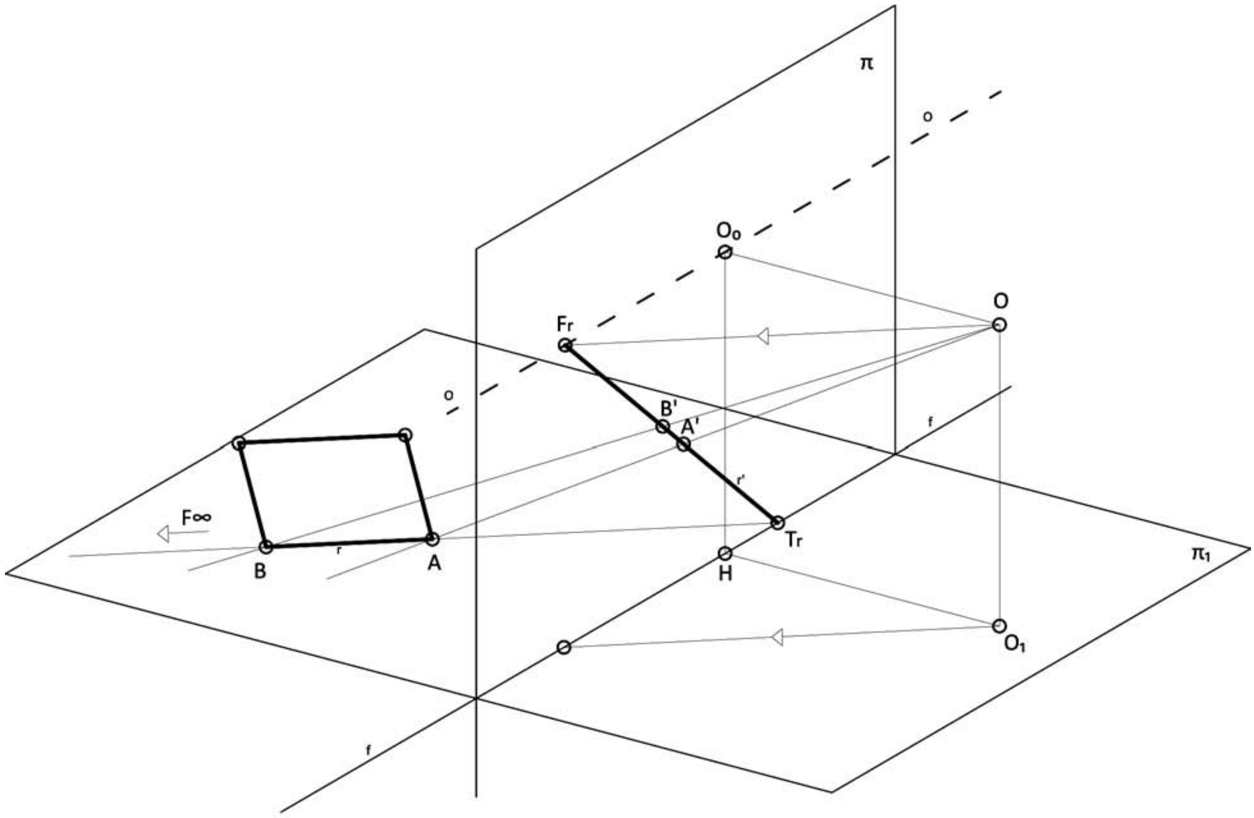

Fig. 146

Ma tutto questo avviene nello spazio. Spostiamo il problema sul piano da disegno, utilizzando il metodo della doppia proiezione ortogonale (Fig. 147).

Il procedimento di costruzione è il seguente:

1. Si costruisce in pianta il quadrato ABCD;
2. Si fa passare per il lato AD una retta r; l'intersezione di r con la linea di terra sarà Tr (traccia di r);
3. Si riporta il segmento HTr sul piano del quadro;
4. In pianta, da O_1 si manda la parallela ad r fino a incontrare la linea di terra nel punto Fr (proiezione in pianta della fuga della retta r);
5. Sul piano del quadro, si riporta il segmento HFr sulla linea di orizzonte ottenendo, all'altezza della linea di orizzonte, il punto Fr (fuga della retta r);
6. Si congiunge, sempre sul piano del quadro, Tr con Fr, ottenendo l'immagine prospettica della retta su cui giace uno dei lati del quadrato.

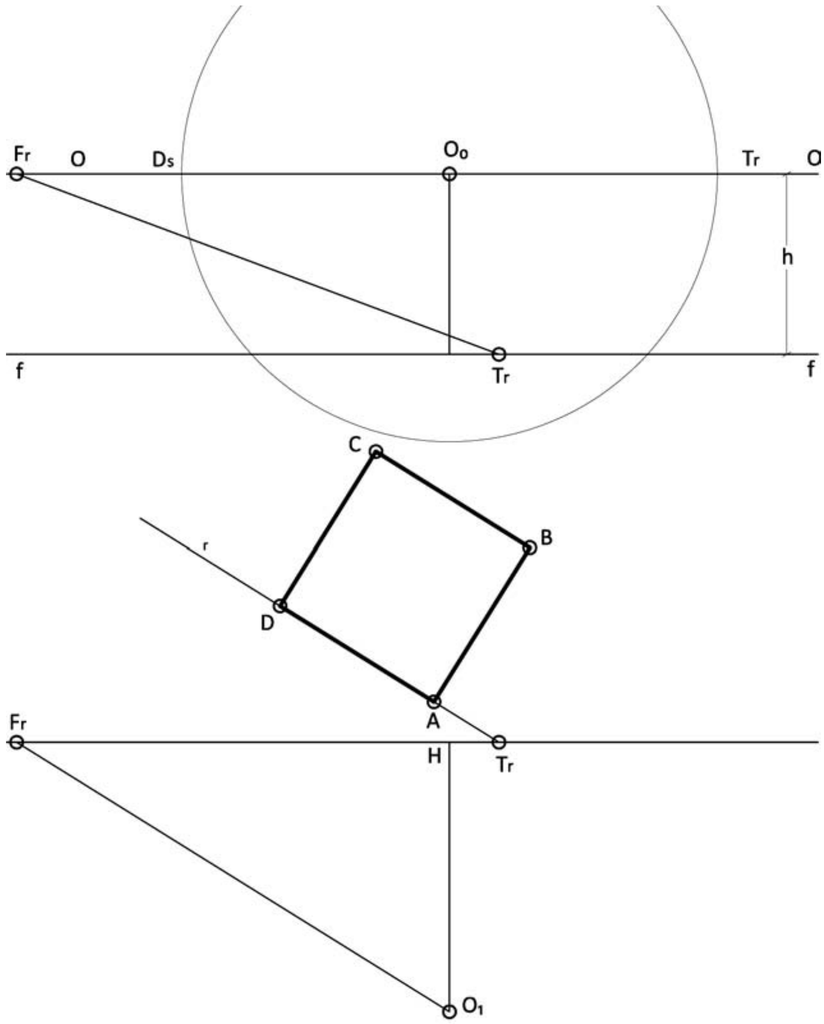

Fig. 147

Con lo stesso procedimento si ottengono le immagini prospettiche delle altre tre rette su cui giacciono i lati del quadrato; le loro intersezioni determinano i vertici A, B, C. D (Fig. 148).

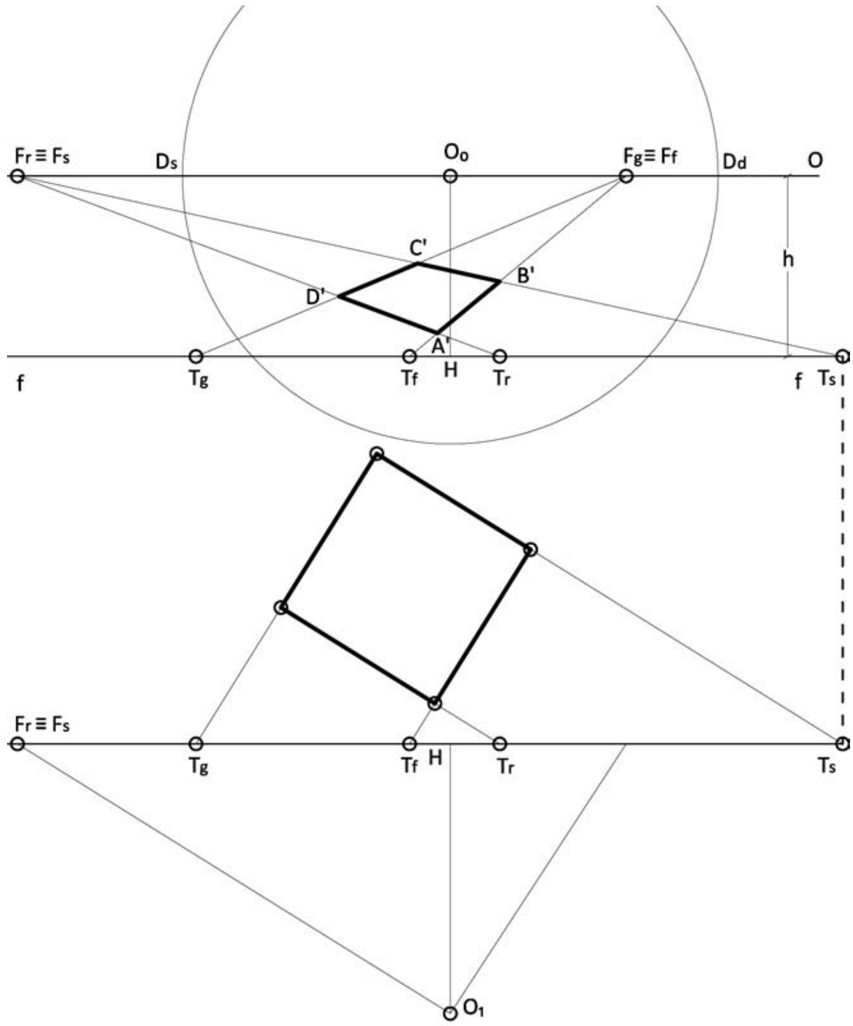

Fig. 148

Osservando la Fig. 148 è evidente una proprietà fondamentale della rappresentazione prospettica, ossia: **rette parallele convergono tutte in un unico punto di fuga**.

Tale punto può essere **improprio** (se le rette sono parallele al quadro) o **proprio** (se le rette non sono parallele al quadro). Nel caso esaminato le rette non sono parallele al quadro e, quindi, i punti di fuga sono propri. I punti di fuga, quindi, sono tanti quanto le direzioni delle rette presenti nella figura da rappresentare.

4.2.2. Quadrato posto sul geometrale con il lato parallelo alla linea di terra (Fig. 149).

Si inizia la costruzione come nel caso precedente, ossia:

1. Si determina Tr;

2. Si conduce per O_1 la parallela alla retta r fino a ottenere sulla linea di terra il punto Fr (esso coincide col punto H e, sul quadro, col punto O_0; ciò significa che le **rette perpendicolari al quadro hanno il punto di fuga coincidente col punto principale**);

3. Si ripete lo stesso procedimento per la retta s.

Per quanto riguarda la retta g, il procedimento non si può applicare in quanto, essendo parallela alla linea di terra, ha la traccia impropria. Inoltre, conducendo per O_1 la parallela a g per trovare la sua fuga, si noterà che è anch'essa impropria. Di conseguenza, l'immagine prospettica della retta g, avendo traccia e fuga improprie, sarà parallela alla linea di terra e alla linea di orizzonte;

4. Bisogna ricorrere a una retta ausiliaria, come la diagonale del quadrato d. Si prolunga d ottenendo Td (traccia di d);

5. Si manda da O_1 la parallela a d, ottenendo Fd (fuga di d);

6. Si riportano Td e Fd sul piano del quadro;

Dato che d è inclinata di 45° rispetto alla linea di terra, si nota che il segmento HFd è uguale al segmento O_1H. Considerato che quest'ultimo è uguale alla distanza principale, anche il segmento HFd è uguale ad essa. Ricordando la definizione del cerchio di distanza (cerchio di raggio pari alla distanza principale), è evidente che **i punti di fuga delle rette inclinate a 45° coincidono con i punti di distanza**, definiti come intersezione fra il cerchio di distanza e l'orizzonte;

7. Si congiunge Td con Fd e si ottiene la retta d'; tale retta interseca r' nel punto D' e s' nel punto A';

8. Si manda da A' la parallela alla linea di terra fino a incontrare la retta r'; nel punto di intersezione si troverà B';

9. Si manda da D' la parallela alla linea di terra fino ad incontrare la retta s'; nel punto di intersezione si troverà C', immagine prospettica dell'ultimo lato del quadrilatero.

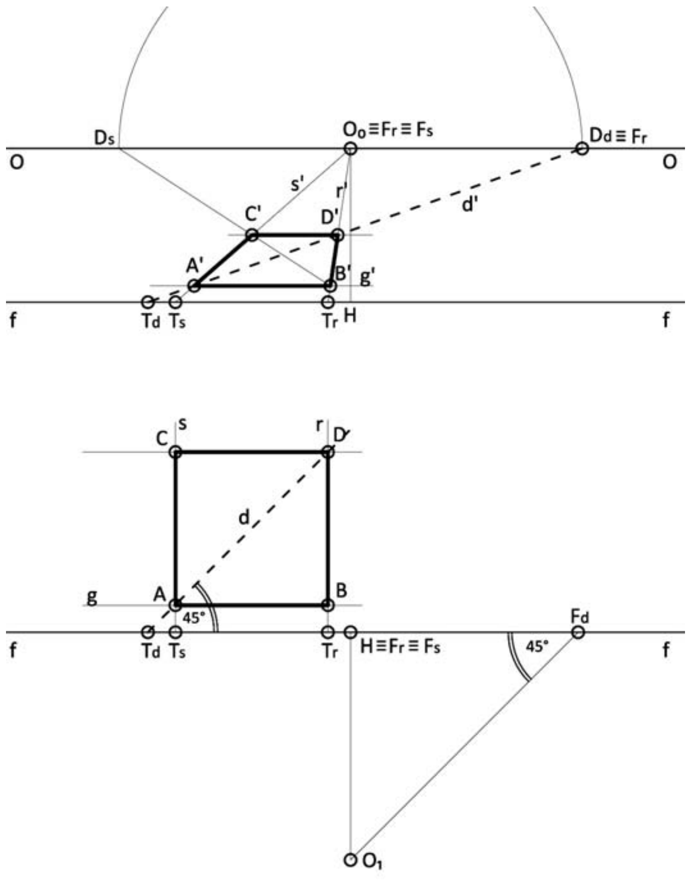

Fig. 149

4.2.3. Rette parallele al geometrale (Fig. 150)

Sia data una retta r parallela al geometrale. La sua immagine prospettica si determina nel seguente modo:

1. Si prolunga la retta r fino ad incontrare il quadro nel punto Tr (traccia di r);

2. Dal punto di vista O si costruisce una retta parallela ad r, fino ad incontrare il quadro nel punto Fr (fuga di r). Visto che r è parallela al geometrale, il punto Fr giacerà sulla linea di orizzonte;

3. Si congiunge Tr con Fr.

Consideriamo ora la retta r_1, proiezione sul geometrale di r. È evidente che r ed r_1 sono parallele e, quindi, Fr_1 (fuga di r_1) e Fr (fuga di r) coincideranno. La traccia Tr_1 è situata sulla stessa verticale di Tr; la distanza fra le due tracce Tr_1 e Tr è uguale all'altezza h che separa la retta r dalla sua proiezione r_1. Quindi, per la costruzione prospettica di una retta parallela al geometrale, è sufficiente riportare, a partire da Tr_1, un segmento perpendicolare alla linea di terra di altezza h pari all'altezza intercorrente fra la retta r e la sua proiezione r_1 per individuare Tr e poi, congiungendola con Fr, costruire l'immagine prospettica della retta r.

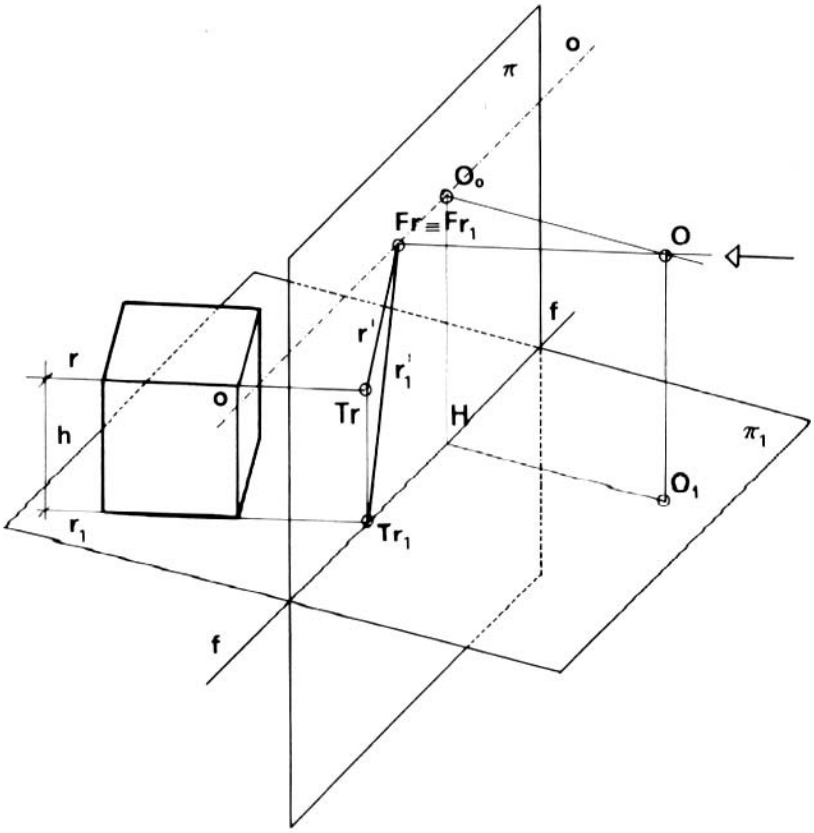

Fig. 150

La Fig. 151 riassume i concetti finora esposti; riproduce due cubi, poggiati sul geometrale, disposti in posizione differente rispetto al quadro,.

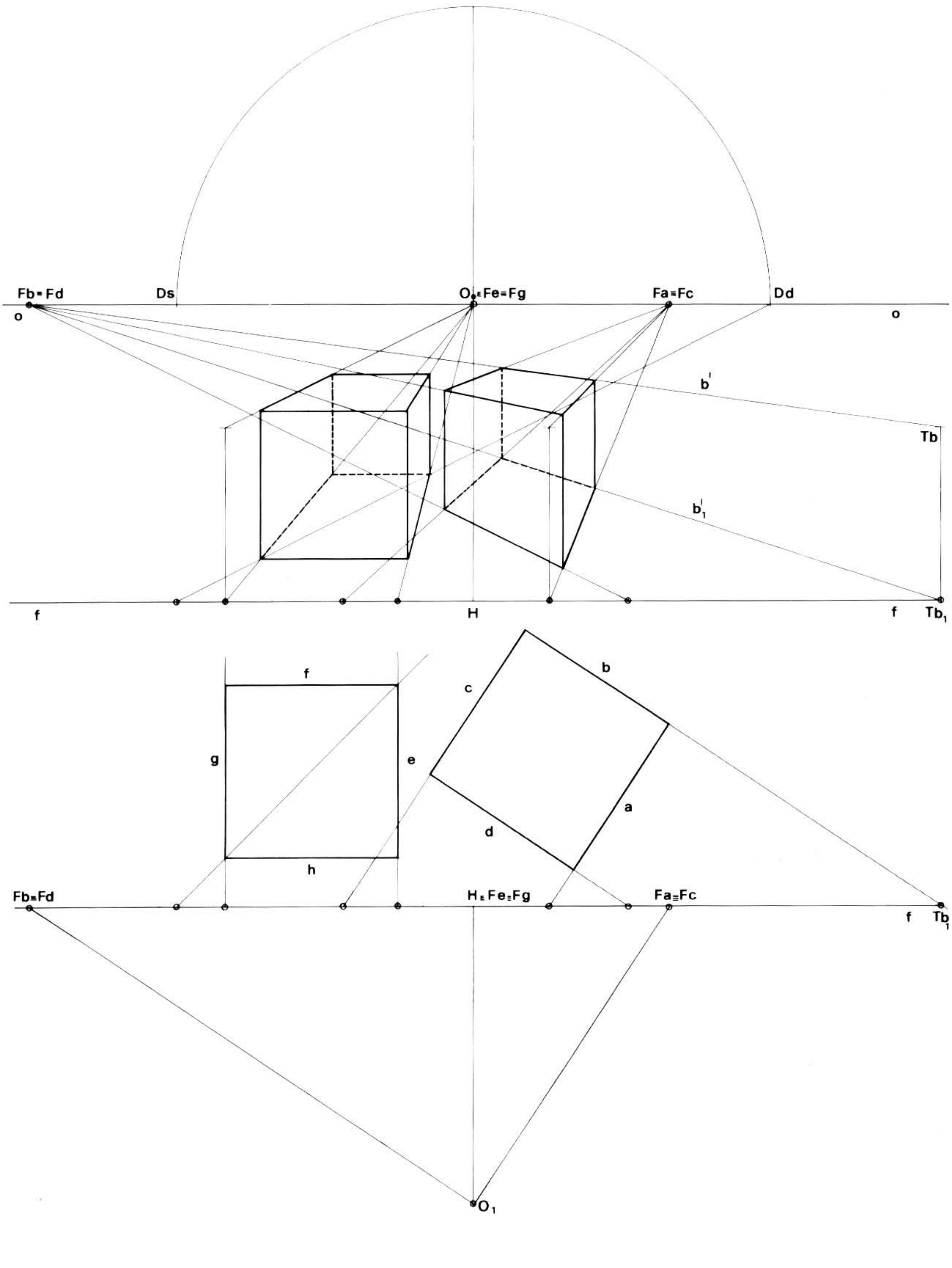

Fig. 151

Rappresentazione del punto

La rappresentazione di un punto si esegue attraverso l'ausilio di due rette distinte passanti per esso.

4.3. La prospettiva con il metodo dei punti di misura

Sia data una retta r sul geometrale (Fig. 152). Si determini la sua immagine prospettica costruendo la traccia Tr e la fuga Fr. Stabiliamo quindi di riportare, sull'immagine della retta r, i punti A, B, C appartenenti ad essa, operando direttamente sul quadro e senza passare dal geometrale.

Per far questo, si immagini di fare cerniera in Tr e di ruotare la retta r fino a sovrapporla alla linea di terra. A rotazione avvenuta, i punti A, B e C si porteranno nei punti A*, B* e C*. La rotazione corrisponde alla proiezione dei punti A, B e C sulla linea di terra secondo una direzione normale alla bisettrice dell'angolo φ, formato dalla retta r con la linea di terra.

I segmenti AA*, BB* e CC* costituiscono un fascio di rette parallele la cui immagine prospettica del punto all'infinito è rappresentata da Mr, appartenente all'orizzonte. Mr si definisce **punto di misura** della retta r; si costruisce tracciando da O la parallela ai segmenti AA*, BB*, CC*. Tale operazione corrisponde alla proiezione di O sull'orizzonte in direzione normale alla bisettrice dell'angolo che la linea di orizzonte forma con OFr o, più semplicemente, al ribaltamento di O sull'orizzonte facendo centro in Fr.

Congiungendo i punti riportati sulla fondamentale con il punto di misura Mr, si ottengono le immagini dei raggi proiettanti che tagliano r' nei punti cercati A', B' e C'.

Mr si definisce punto di misura della retta r in quanto consente di riportare, sull'immagine prospettica r', segmenti di misura nota operando direttamente sul quadro.

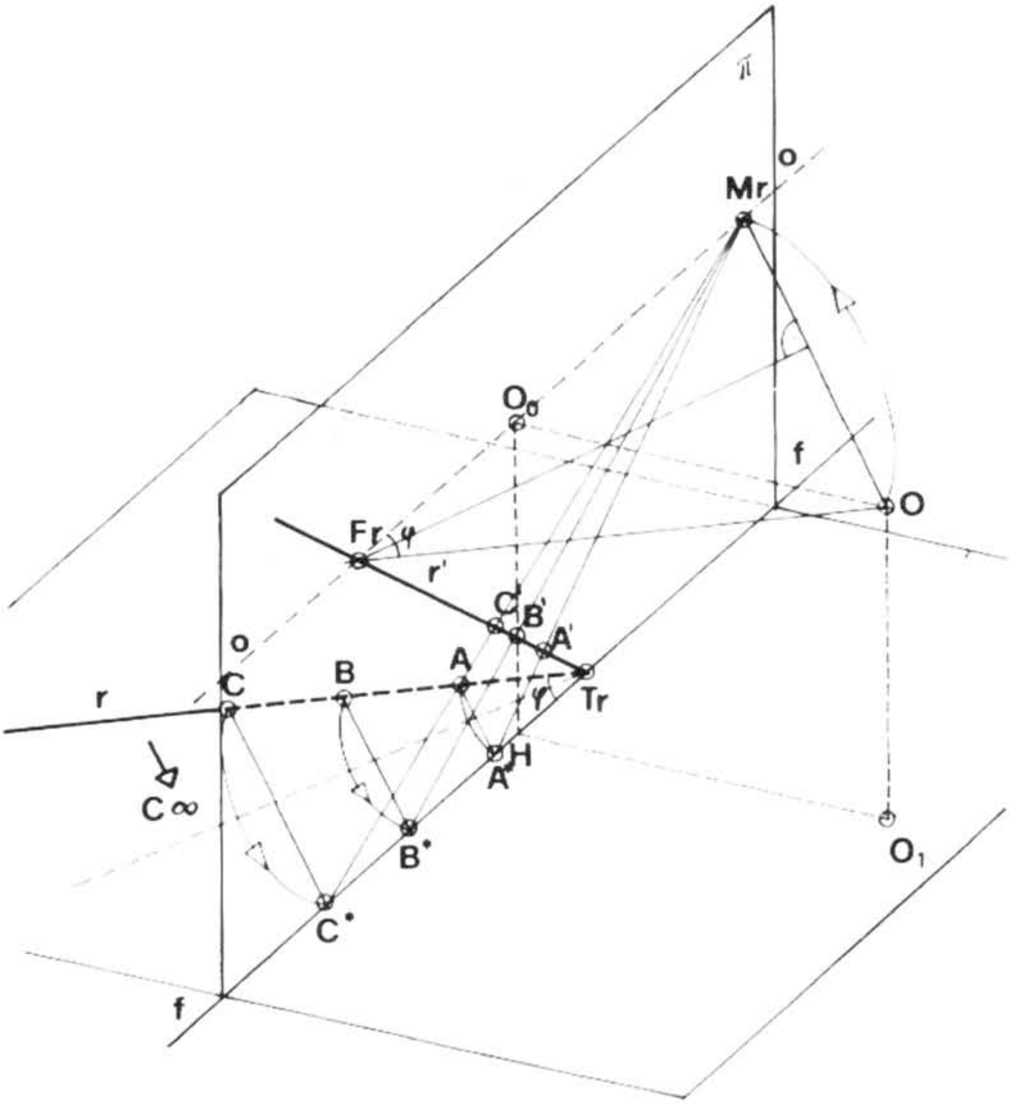

Fig. 152

Osserviamo adesso la Fig. 153. Dopo avere rappresentato in prospettiva la retta r, si è ricavato il punto di misura Mr, effettuando il ribaltamento della prima proiezione del punto di vista O1, e anche (sul quadro) ruotando dalla fuga Fr il punto O* sulla linea di orizzonte.

Riportando sulla linea di terra, facendo centro in Tr, i segmenti TrA*, TrB*, ecc., e congiungendo gli estremi di questi segmenti con il punto di misura Mr, posto sull'orizzonte, si determina il fasco di rette proiettanti che tagliano la retta r' nei punti A', B', C'.

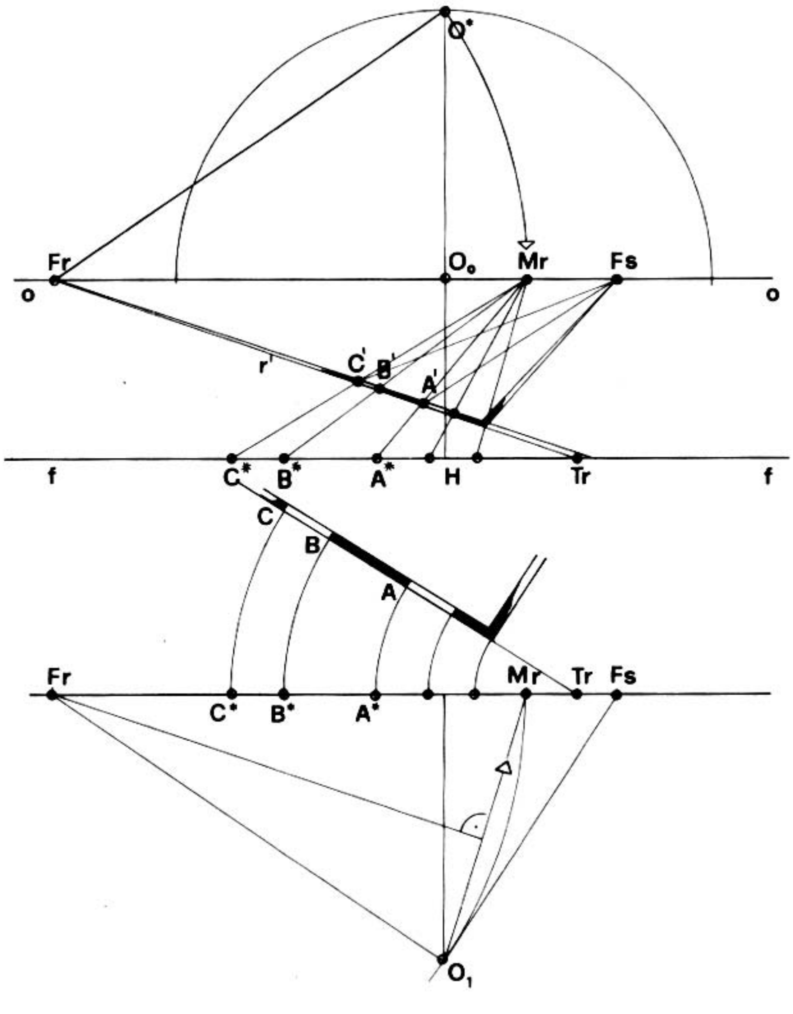

Fig. 153

4.4. La prospettiva con il metodo del ribaltamento

Questo metodo proiettivo si utilizza quando si devono costruire immagini prospettiche di figure complesse; esso sfrutta le proprietà proiettive che si stabiliscono fra la figura posta sul geometrale, il suo ribaltamento sul quadro e l'immagine prospettica (Fig. 154).

Data una figura sul geometrale, di vertici A, B, C, D, occorre innanzitutto costruire la sua immagine prospettica coi metodi già illustrati. Poi si ribalta il piano geometrale attorno alla linea di terra f-f, fino a farlo coincidere col quadro. A rotazione avvenuta, la figura si troverà sul quadro nei punti A*, B*, C*, D*.

La rotazione del piano geometrale può essere anche sostituita da una proiezione, da un punto di vista improprio V, in direzione perpendicolare al piano bisettore posto fra il geometrale e il quadro.

Se osserviamo ora le due figure poste sul quadro (l'immagine prospettica A', B', C', D' e la figura ribaltata A*, B*, C*, D*), esse possono considerarsi come ottenute dalla proiezione di una stessa figura (quella disposta sul geometrale) da due centri distinti, costituiti dal punto di vista O e dal punto improprio V. Quindi è possibile, per semplificare la costruzione, sfruttare la corrispondenza che si stabilisce fra i punti ribaltati e i punti dell'immagine prospettica.

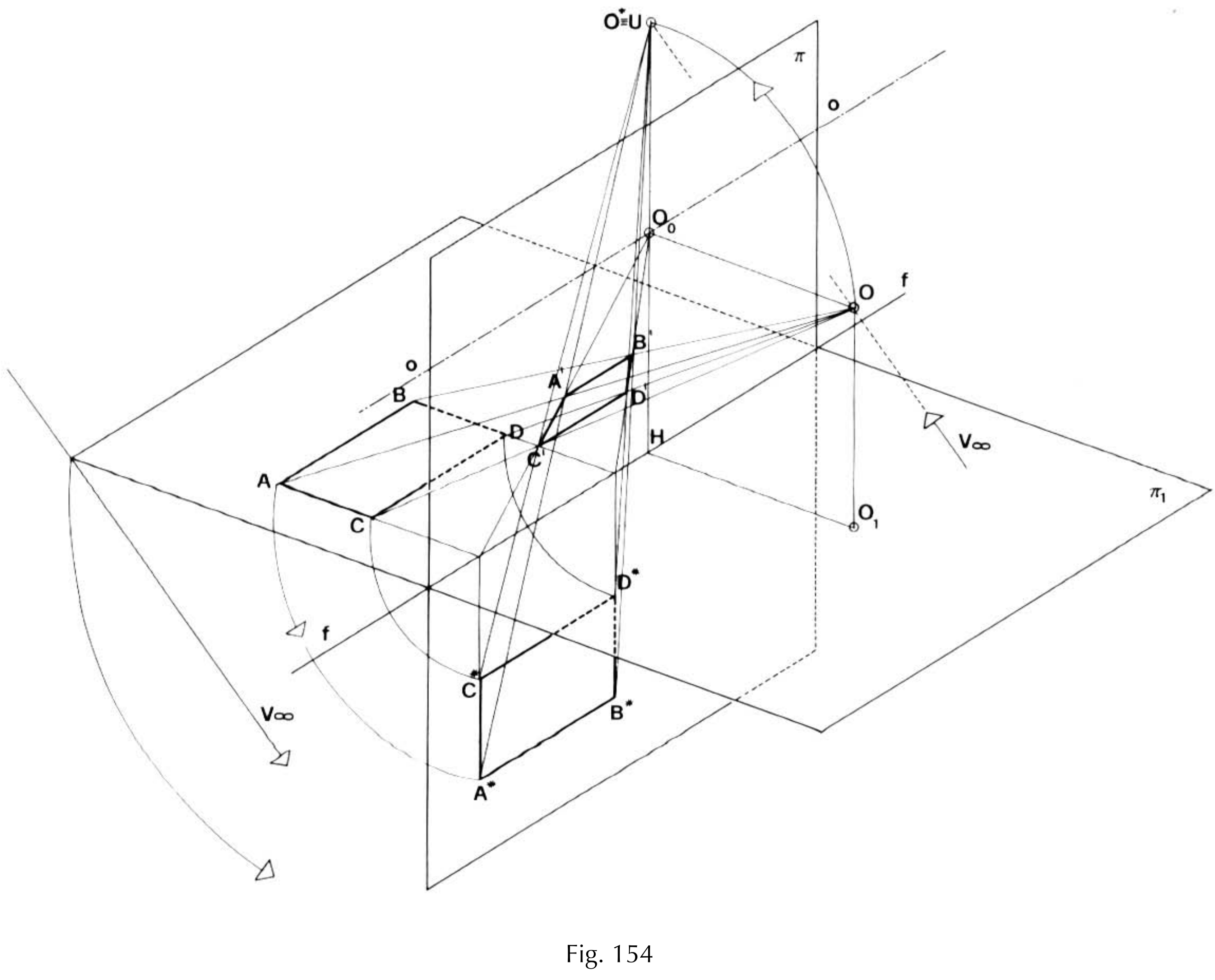

Fig. 154

Supponiamo di volere rappresentare una circonferenza in prospettiva utilizzando il metodo del ribaltamento (Fig. 155).

Si precede nel seguente modo:

- si ribalta la circonferenza sul quadro;
- si costruisce il quadrato nel quale il cerchio è inserito;
- si prolunga il diametro D*E* fino a incontrare la linea di terra e si congiunge con Oo, punto di fuga delle rette perpendicolari al quadro;
- si congiungono i punti D* e E* con U e si individua il punto di intersezione col diametro D*E*, ottenendo quindi i punti D' e E';
- si procede rappresentando tutti gli altri punti che completano l'immagine della circonferenza.

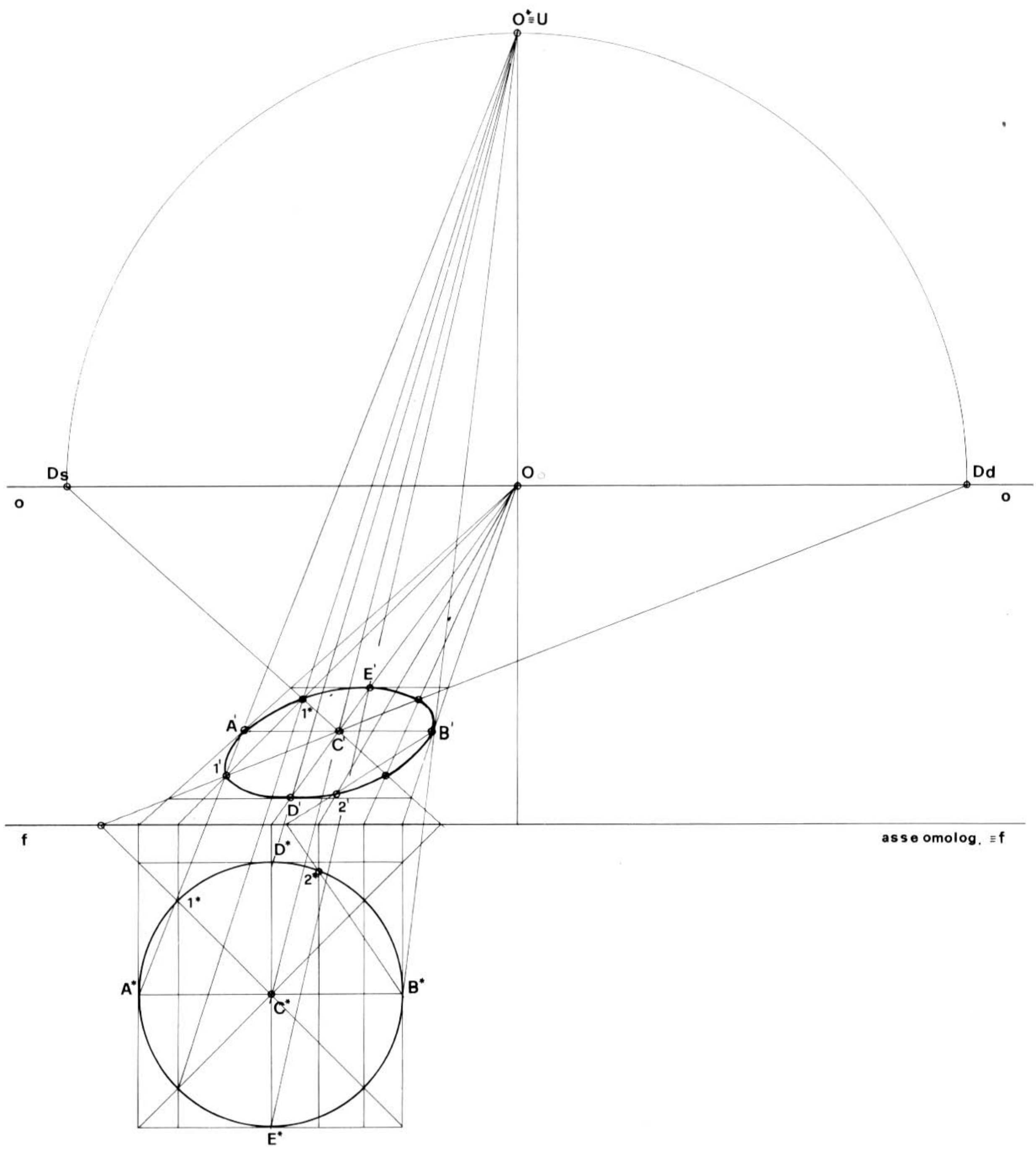

Fig. 155

4.5. La prospettiva a quadro orizzontale

In alcuni casi, è utile disporre l'osservatore in alto rispetto all'oggetto da rappresentare; in questo caso, il raggio principale O-O_1 sarà verticale, mentre il quadro sarà orizzontale e coinciderà con il geometrale.

La Fig. 156 evidenzia le condizioni proiettive della prospettiva a quadro verticale e le condizioni proiettive della prospettiva a quadro orizzontale. Nel secondo caso, è evidente che la pianta dell'oggetto è già in prospettiva in quanto il geometrale e il quadro coincidono.

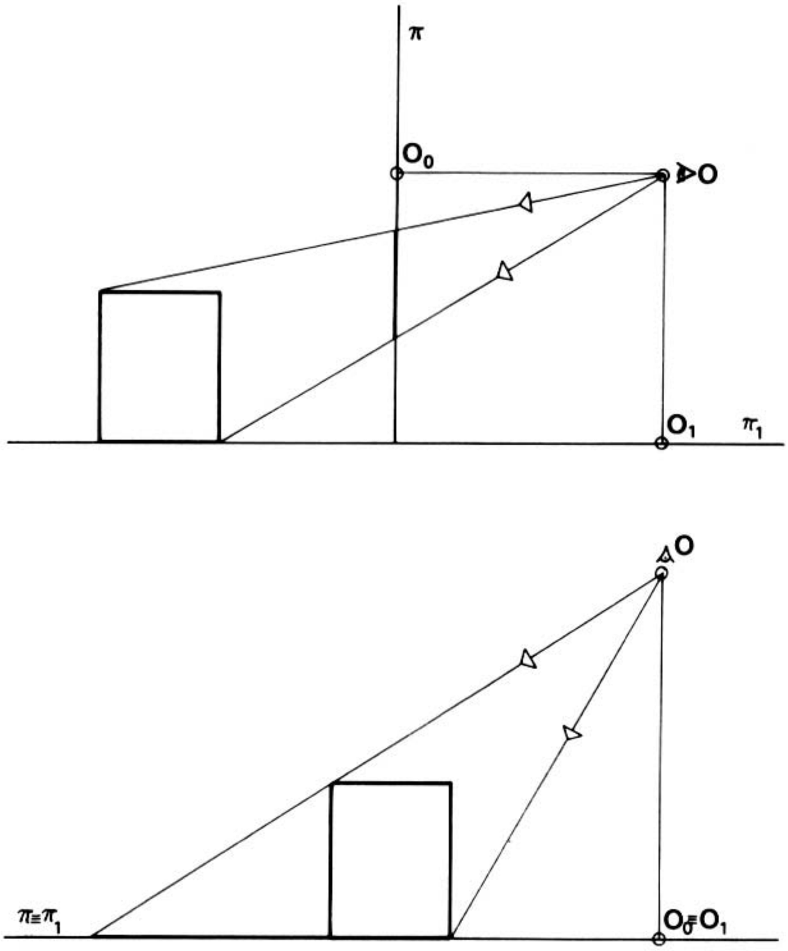

Fig. 156

Supponiamo di voler rappresentare una stanza vista dall'alto. Si procederà nel seguente modo (Fig. 151).

1. Si disegna la pianta della stanza;

2. Si fissa la posizione del punto di vista, individuando:

- la sua proiezione sul quadro (O_0) e sul geometrale (O_1); per le premesse fatte, O_0 e O_1 coincideranno;

- la distanza principale, rappresentata dal cerchio di distanza;

3. Si tracciano tutte le rette coincidenti con gli spigoli verticali degli elementi presenti (muri, arredi, ecc.). Tale costruzione è immediata in quanto:

- le tracce delle rette coincidono con la posizione in pianta degli elementi in questione (ricordiamo che il quadro e il geometrale coincidono; nel caso in esame, le tracce degli spigoli della stanza coincidono con i punti A,B,C,D, proiezione in pianta degli spigoli stessi);

- le fughe delle rette coincidono con il punto principale O_0, in quanto sono tutte perpendicolari al quadro;

4. Si ribalta il punto di vista sul cerchio di distanza, in una direzione a piacere (p. es. verticale), ottenendo il punto O*. Poi si ribalta, nella stessa direzione e in scala, uno degli spigoli verticali (nel caso in esame, lo spigolo BE, ottenendo il punto E*). Congiungendo O* con E* si determina l'intersezione di questo raggio proiettante con la proiezione prospettica della retta su cui giace lo spigolo BE, individuando il punto E', immagine prospettica del punto E;

5. Analogamente si procede con gli altri elementi verticali.

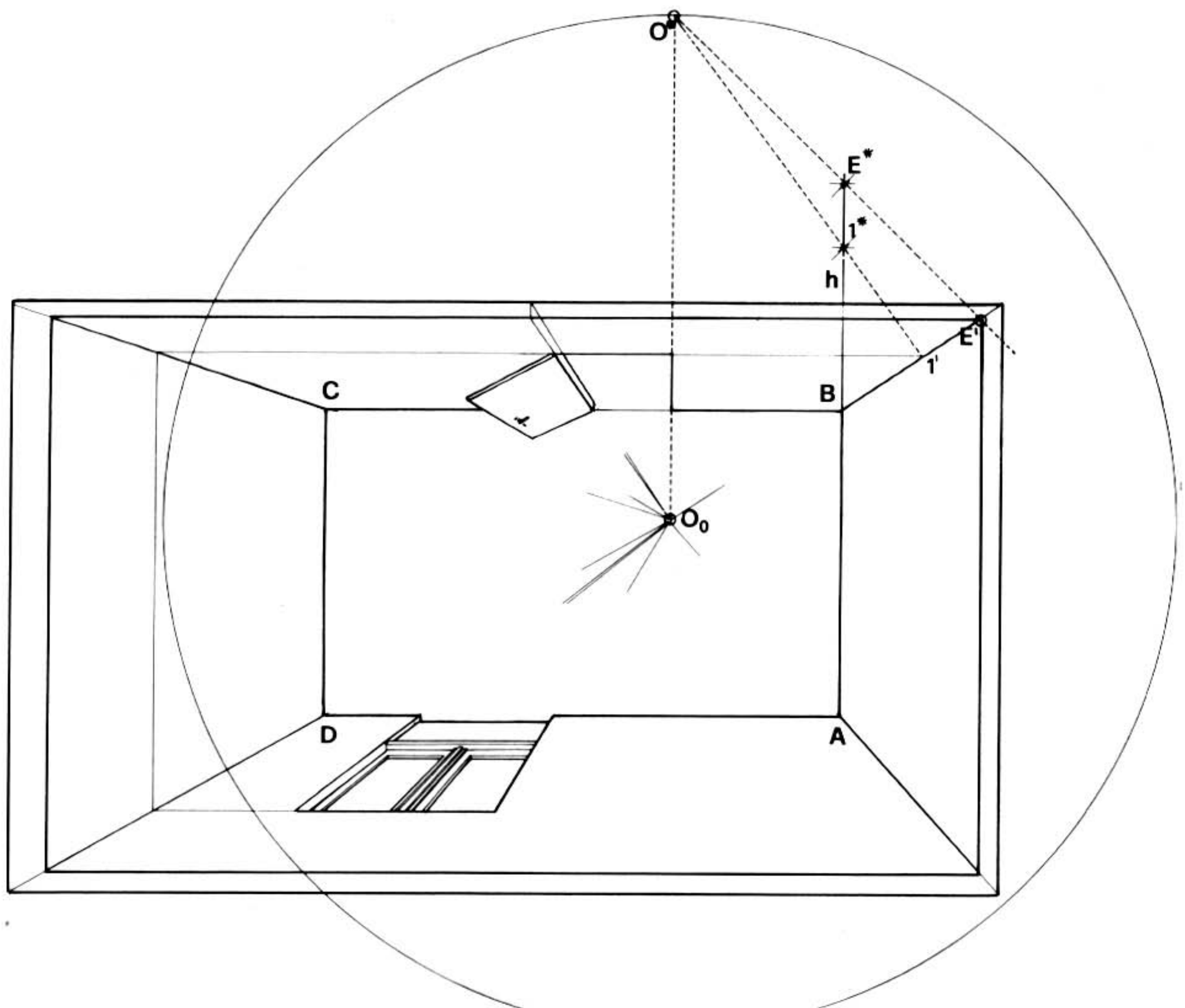

Fig. 157

4.6. Uso prospettiva nel disegno di architettura

La scelta di un tipo di prospettiva piuttosto che un altro dipende, come sempre, dal tema della rappresentazione, cioè dall'effetto finale che intendiamo ottenere e dal tipo di messaggio che vogliamo trasmettere. Come abbiamo detto, oltre alla posizione dell'oggetto rispetto al quadro, dobbiamo considerare la posizione del punto di vista rispetto al quadro. Analizzando questo parametro, dobbiamo tenere conto di almeno tre fattori.

Il primo riguarda la distanza dell'osservatore (cioè del punto di vista) dal quadro: più esso si avvicina, maggiore è lo scorcio prospettico e, quindi, aumenta lo scarto dimensionale fra oggetti vicini e oggetti lontani.

Il punto di vista non deve essere collocato troppo vicino all'oggetto da rappresentare; Leonardo da Vinci suggeriva di porre il punto di vista a una distanza pari a una volta e mezzo la dimensione maggiore dell'oggetto da rappresentare.

Più genericamente, possiamo dire che per evitare rappresentazioni eccessivamente aberrate occorre che l'osservatore stia a una distanza tale che l'intero edificio in pianta sia compreso in un angolo visuale non superiore ai 60°(per gli interni; per gli esterni è bene non superare i 45°) e a una distanza non inferiore al triplo dell'altezza dell'edificio stesso. Questo accorgimento ci garantisce la costruzione di immagini equilibrate, cioè abbastanza simili alla visione che si avrebbe in presenza dell'oggetto. Avvicinando la posizione del punto di vista, l'effetto prospettico si accentua; allontanandolo, si attenua (Fig. 158).

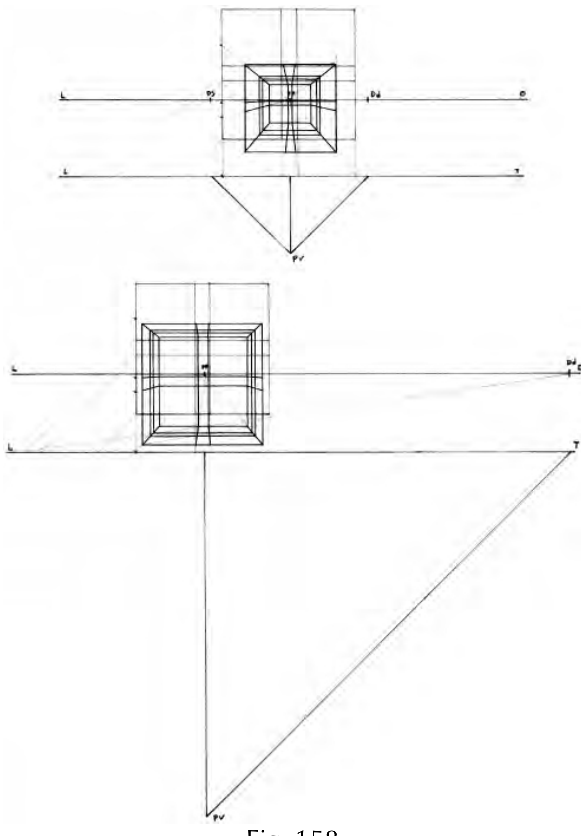

Fig. 158

Il secondo è relativo all’allineamento della posizione dell’osservatore rispetto agli spigoli e alle membrature dell’edificio. Il punto di vista non deve essere posto a un'altezza pari alla metà dell'oggetto da rappresentare; questa condizione, infatti, genera un'immagine statica e volumetricamente poco soddisfacente; il punto di vista non deve essere collocato sulla bisettrice dell'angolo dell'oggetto da rappresentare; tale condizione genera un'immagine piatta. Bisogna evitare che la linea d’orizzonte sia alla stessa quota di parti morforstrutturali importanti come cornicioni o marcapiani, perché in questo caso si riduce l’effetto prospettico. È bene anche evitare che il raggio visuale ortogonale al quadro (il cosiddetto “asse ottico”) sia incidente con gli spigoli verticali dell’edificio. Errori da evitare. A sinistra, raggio visuale ortogonale al quadro coincidente con lo spigolo dell'edificio. A destra, linea di orizzonte coincidente con la linea di gronda (Fig. 159).

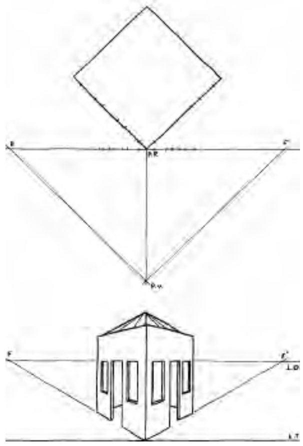

Fig. 159

Il terzo fattore è costituito dall’altezza dell’osservatore (e, quindi, della linea d’orizzonte) rispetto all’oggetto. La modifica dell'altezza dell'osservatore consente di realizzare prospettive “a volo d’uccello” (la linea di orizzonte è più in alto degli oggetti rappresentati, Fig,. 160) ad “altezza d’uomo” (la linea d’orizzonte è a circa 2 m dal terreno, Fig. 161) a “occhio di cane” (la linea d’orizzonte è a circa 50 cm dal terreno) fino alla cosiddetta “prospettiva novecento”, molto usata dagli architetti razionalisti italiani, in cui la linea di orizzonte coincide con la linea di terra (Figg. 162-163). Naturalmente è possibile realizzare anche prospettive in cui la linea di orizzonte sia posta al di sotto della linea di terra.

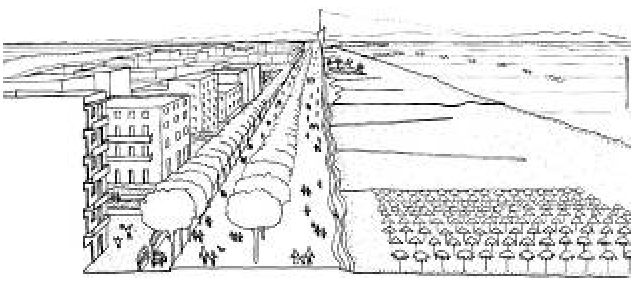

Fig. 160

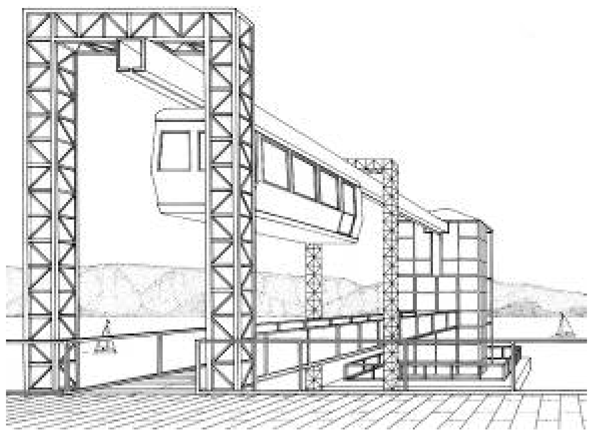

Fig. 161

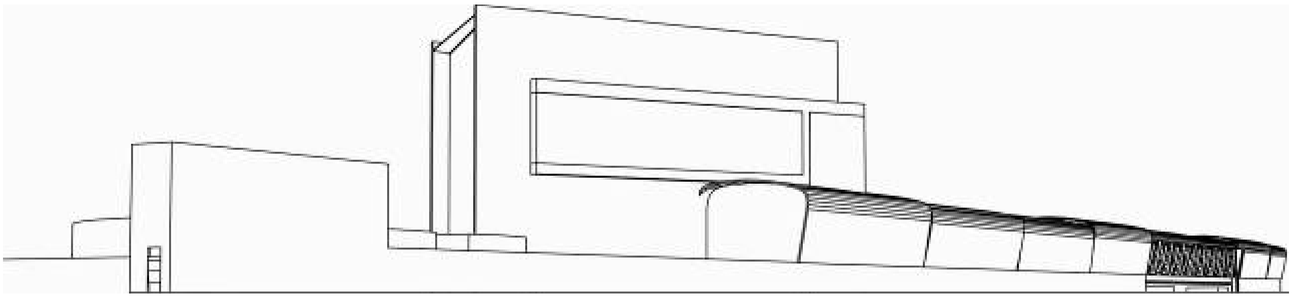

Fig. 162

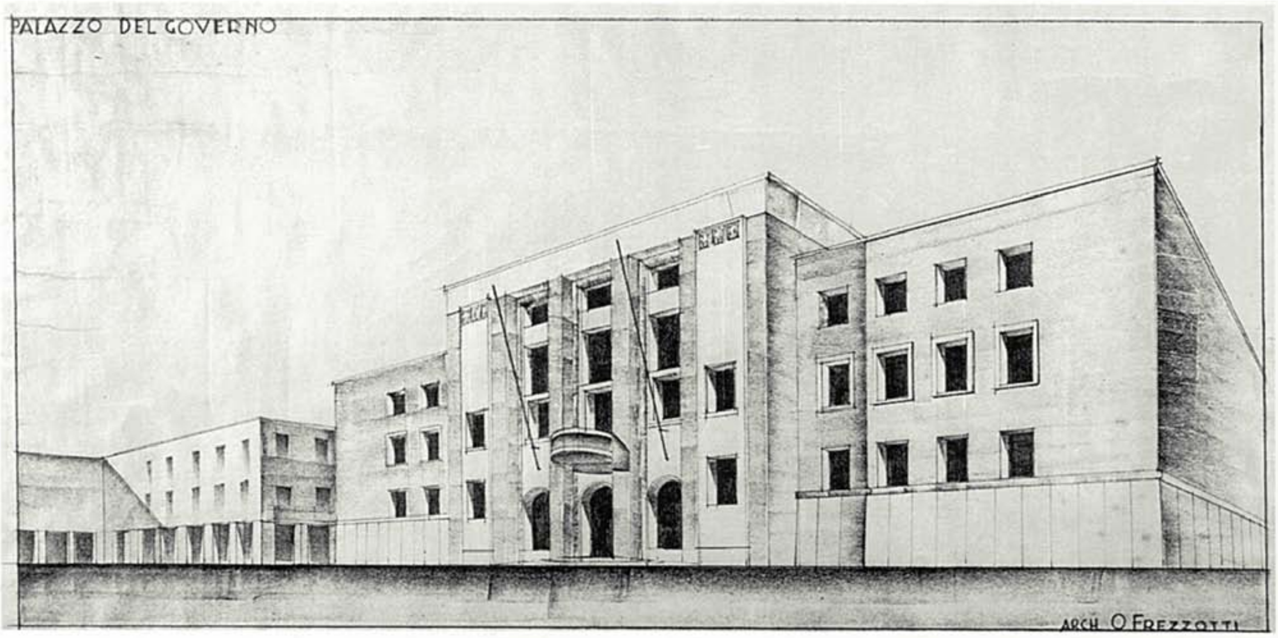

Fig. 163