Università Mediterranea di Reggio Calabria
Istituzioni di Matematica
A.A. 2019/20

Miscellanea di esercizi proposti

Docente: Prof. G. Floridia

Indice

1 Insiemi numerici

1.1 Proprietà dei numeri naturali

Esercizio 1 *Considerata la formula*

$$C(n) := \sum_{h=1}^{n} h^3 = 1 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

i. verificare la validità della (1) *nei casi* $n = 1$, $n = 2$ *e* $n = 3$*;*

ii. *enunciare sinteticamente il principio d'induzione;*

iii. *dimostrare mediante l'uso del principio d'induzione la* (1)*;*

iv. *dare la formula relativa alla somma* $S(n)$ *dei primi* n *numeri naturali* $\left(S(n) := \sum_{h=1}^{n} h := 1 + 2 + \ldots + n \right)$ *ed evidenziare il legame algebrico tra i numeri* $C(n)$ *e* $S(n)$ *(per ogni* $n \in \mathbb{N}$*);*

v. *calcolare, usando le formule introdotte,* $\displaystyle\sum_{h=6}^{10} h$ *e* $\displaystyle\sum_{h=6}^{10} h^3$.

1.2 Numeri complessi

Esercizio 2 *Scrivere in forma algebrica il seguente numero complesso*

$$z = \frac{\overline{1-i}}{3+i} - \frac{\bar{i}}{-1-i} \quad .$$

Esercizio 3 *Dato il numero complesso*

$$z = \frac{2}{1-i} - \frac{i}{1+i}\,,$$

calcolare la forma algebrica, il modulo e la forma trigonometrica di z.

Esercizio 4 *Calcolare la forma algebrica del numero complesso*

$$z = (1+i)^8\ .$$

Esercizio 5 *Dato il numero complesso*

$$z = \sqrt{3} + i,$$

calcolare la forma algebrica e trigonometrica di z *e* z^6.

Esercizio 6 *Dato il numero complesso*

$$z = \frac{1}{i} + \frac{2}{\sqrt{3} - i},$$

calcolare la forma algebrica e trigonometrica di z *e* z^6.

Esercizio 7 *Determinare le radici complesse cubiche del numero* $w = -27$.

Esercizio 8 *Determinare le radici complesse quarte del numero* $w = -625$.

Esercizio 9 *Risolvere nel campo complesso le seguenti equazioni:*

i. $x^2 + x + 1 = 0$;

ii. $x^2 - 5x + 6 = 0$;

iii. $x^2 + 2x + 1 = 0$;

iv. $x^2 + 9 = 0$;

v. $x^3 - 1 = 0$;

vi. $x^3 + 27 = 0$;

vii. $x^4 - 16 = 0$;

viii. $x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12 = 0$.

Esercizio 10 *Risolvere la seguente equazione nel campo complesso*

$$z^2 - z\bar{z} + 2 + 2i = 0.$$

2 Funzioni

2.1 Dominio, studio del segno e proprietà elementari

Esercizio 11 *Considerata la funzione*

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 2x - 3} - x + 2}{\sqrt[3]{8x^3 - 11x^2 + 5x - 7} + 1 - 2x}$$

i. determinare l'insieme di definizione di f*;*

ii. studiare il segno (determinandone anche gli zeri) di f.

Esercizio 12 *Per ognuna delle seguenti funzioni*

$$f(x) = x^{x^2-3x+2} - 1, \qquad g(x) = \log_x(x+5), \qquad h(x) = \frac{\cos^2 x - \cos x + 7}{2 - \cos x},$$

i. *determinare l'insieme di definizione;*

ii. *studiare il segno (determinandone anche gli zeri);*

iii. *analizzare la presenza di eventuali simmetrie.*

Esercizio 13 *Considerata la funzione* $f(x) = 4x^2 + 1$

i. *determinare l'insieme* Imf*;*

ii. *studiare l'invertibilità di* f*;*

iii. *dopo aver determinato gli intervalli in cui* f *è invertibile calcolare la funzione inversa di* f *su ciascuno di tali intervalli;*

iv. *scrivere esplicitamente e rappresentare graficamente la funzione*

$$g(x) = \left| f(x) - 3x^2 - 4x - 1 \right| .$$

2.2 Studio di funzione

Si ricorda che lo studio di una funzione si può sintetizzare nei seguenti passi: determinare il dominio, studiare il segno e le intersezioni con gli assi, ricercare eventuali simmetrie, determinare gli eventuali asintoti, determinare gli intervalli di crescenza e decrescenza ed eventuali massimi e minimi relativi, determinare gli intervalli in cui la funzione è convessa o concava ed eventuali flessi, tracciarne il grafico.

Esercizio 14 *Studiare la funzione*

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x} .$$

Esercizio 15 *Studiare la funzione*

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1} .$$

Esercizio 16 *Studiare la funzione*

$$g(x) = \frac{x - 3}{x^2 - 4}.$$

Esercizio 17 *Studiare la funzione*

$$g(x) = e^{\frac{x}{x^2+1}}.$$

Esercizio 18 *Studiare la funzione*

$$g(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x+2}}.$$

2.3 Integrazione

Esercizio 19 *Calcolare il seguente integrale indefinito*

$$\int [x^2 \cos(2x^3) - xe^x] \, dx \, .$$

Esercizio 20 *Calcolare il seguente integrale definito*

$$\int_0^1 [x + x^2 + x^3 + \cos(\pi x)] \, dx \, .$$

Esercizio 21 *Svolgere i seguenti punti:*

i. calcolare l'integrale definito

$$\int_1^e \frac{1}{x(1+\log^2 x)} \, dx \, ;$$

ii. calcolare l'area dell'insieme

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \, 1 \le x \le e^2, \; 0 \le y \le \log^2 x\}.$$

2.4 Continuità, derivabilità, integrazione e ulteriori proprietà

Esercizio 22 *Data la funzione $f\colon [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{1-\cos x} & \text{se } x \in [-\pi, 0[\\[2ex] x^2 + 1 - \cos x & \text{se } x \in [0, \pi] \, , \end{cases}$$

studiare la continuità di f e la sua derivabilità in $x = 0$.

Esercizio 23 *Considerata, al variare del parametro* $\alpha \in \mathbb{R}$, *la funzione* $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definita dalla seguente legge*

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \sqrt{2\alpha^2 x^2 + \alpha^2} - 1 & \text{se } x \in]-\infty, 0] \\ \\ (\alpha^2 + \alpha) x e^{-x^2} & \text{se } x \in]0, +\infty[\,, \end{cases}$$

e posto, nel caso particolare $\alpha = 1$, $g(x) := f_1(x)$ *svolgere i seguenti punti:*

i. *studiare, al variare del parametro* $\alpha \in \mathbb{R}$, *la continuità e la derivabilità nel punto* $x_0 = 0$ *della funzione* f_α;

ii. *rappresentare graficamente la funzione* f_α *per quei valori del parametro reale* α *per cui* $f_\alpha(x)$ *risulta derivabile nel punto* $x_0 = 0$;

iii. *calcolare l'area dell'insieme*

$$T_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \, 0 \le x \le 1, \; 0 \le y \le f_\alpha(x)\};$$

iv. *determinare il massimo e il minimo assoluto della funzione* $g(x)$ *(e i rispettivi punti di minimo e di massimo assoluto) nell'intervallo* $[-2, 3]$;

v. *provare che la funzione* g *è invertibile in* $]-\infty, 0]$, *determinare l'immagine della restrizione di* g *all'intervallo* $]-\infty, 0]$ *e precisare su quali insiemi opera l'inversa della restrizione di* g *a* $]-\infty, 0]$, *quindi calcolare* $(g^{-1})'(2)$;

vi. *dopo aver classificato il punto* $x_0 = 0$ *(per la funzione* g*) determinare le tangenti al grafico della funzione* $g(x)$ *nei punti* $x_0 = 0$ *e* $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

vii. *studiare la funzione* $g(x)$ *(studiare il segno, determinare gli eventuali asintoti, determinare gli intervalli di crescenza o di decrescenza di* f *ed eventuali massimi e minimi relativi, determinare gli intervalli in cui* f *è convessa o concava ed eventuali flessi, tracciare il grafico di* g*).*

Esercizio 24

Considerata, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, *la funzione* $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definita dalla seguente legge*

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} x^3 + 6x^2 + 9\alpha^2 x + \alpha & \text{se } x \in]-\infty, 0[\\ \\ (\alpha + 1)x + \alpha^2 - arctg x & \text{se } x \in [0, +\infty[\,, \end{cases}$$

svolgere i seguenti punti:

i. studiare, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, la continuità e la derivabilità nel punto $x_0 = 0$ della funzione f_α;

ii. calcolare l'integrale definito

$$\int_0^1 f_\alpha(x)\, dx.$$

Posto, nel caso particolare $\alpha = 1$, $g(x) := f_1(x)$ svolgere gli ulteriori punti:

iii determinare il minimo e il massimo assoluto della funzione $g(x)$ (e i rispettivi punti di minimo e di massimo assoluto) nell'intervallo $[-5, 0]$;

iv ricercare eventuali asintoti orizzontali o obliqui per la funzione $g(x)$;

v determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore della funzione $g(x)$ nell'intervallo $[-5, +\infty[$;

vi dopo aver classificato il punto $x_0 = 0$ (per la funzione g) determinare le tangenti al grafico della funzione $g(x)$ nei punti $x_0 = 0$ e $x^* = -3$.

Esercizio 25

Considerata, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, la funzione $f_\alpha : D \to \mathbb{R}$, $D = \mathbb{R}\backslash\{3\}$, definita dalla seguente legge

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} -\left|\alpha^2(x^2 + 3x + 2)\right| & \textit{se } x \in]-\infty, 1[\\ \alpha\, \dfrac{x^2 - 3x + 14}{x^2 - 3x} & \textit{se } x \in [1, +\infty[\backslash\{3\}\,, \end{cases}$$

svolgere i seguenti punti:

i. studiare, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, la continuità e la derivabilità della funzione f_α nell'insieme di definizione D;

ii. calcolare il valore di $\alpha \in \mathbb{R}$ per il quale si ha $\displaystyle\int_1^2 f_\alpha(x)\, dx = 1$.

iii. posto, nel caso particolare $\alpha = 1$, $g(x) := f_1(x)$, studiare la funzione $g(x)$ (studiare il segno e le intersezioni con gli assi, determinare gli eventuali asintoti, determinare gli intervalli di crescenza e decrescenza di f ed eventuali massimi e minimi relativi, determinare gli intervalli *in cui f è convessa o concava ed eventuali flessi; dopo aver classificato i punti $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, determinare le tangenti al grafico della funzione g in tali punti e tracciare il grafico di g).*

Esercizio 26
Considerata, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, la funzione $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita dalla seguente legge

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} x^4 + 5x^3 + 6x^2 + \alpha x & \text{se } x \in]-\infty, 0] \\ \\ 2x^2(\ln x - 1 + \alpha) & \text{se } x \in]0, +\infty[\,, \end{cases}$$

svolgere i seguenti punti:

i. *studiare, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, la continuità e la derivabilità nel punto $x_0 = 0$ della funzione f_α;*

ii. *calcolare il valore di $\alpha \in \mathbb{R}$ per il quale si ha $\displaystyle\int_{-2}^{0} f_\alpha(x)\,dx = 0$.*

iii. *posto, nel caso particolare $\alpha = 0$, $g(x) := f_0(x)$, studiare la funzione $g(x)$ (studiare il segno e le intersezioni con gli assi, determinare gli eventuali asintoti, determinare gli intervalli di crescenza e decrescenza di f ed eventuali massimi e minimi relativi, determinare gli intervalli in cui f è convessa o concava ed eventuali flessi, tracciare il grafico di g).*

3 Equazioni differenziali ordinarie (EDO)

3.1 EDO lineari

3.1.1 Primo ordine

Esercizio 27 *Risolvere il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = (1+y)\cos^2 x \\ y(0) = y_0\,, \end{cases}$$

nei casi $y_0 = -1$ e $y_0 = 0$.

3.1.2 Secondo ordine a coefficienti costanti

Esercizio 28 *Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale ordinaria lineare*

$$y'' - 6y' + 5y = x \,.$$

Esercizio 29 *Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale ordinaria lineare*

$$y'' - 4y' + 3y = x + 1 \,.$$

Esercizio 30 *Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale ordinaria*

$$y'' + y' - 6y = e^{2x}.$$

Esercizio 31 *Risolvere il seguente problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 5y = \mathrm{sen} x, \\ \\ y(0) = 0, \; y'(0) = 1. \end{cases}$$

Esercizio 32 *Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale ordinaria*

$$y'' + 2y' + (1 + 4k^2)y = e^{-x},$$

al variare del parametro reale k.

Esercizio 33 *Sia $\alpha \in \mathbb{R}$, considerato il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 2y = e^{-x}\mathrm{sen} x \\ y(0) = \alpha \\ y'(0) = 0 \,, \end{cases}$$

si dermini:
(i) la soluzione $y_\alpha(x)$;
(ii) $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $\lim_{x \to +\infty} y_\alpha(x) = 0$.

3.1.3 Ordine n a coefficienti costanti $(n > 2)$

Esercizio 34 *Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale ordinaria*

$$y''' + y' = e^x + x \ .$$

Esercizio 35 *Risolvere il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y''' - 3y'' + 2y' = e^x(x-1) \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0 \, . \end{cases}$$

Esercizio 36 *Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale ordinaria lineare*

$$y''' + ky'' + y' = e^x,$$

al variare del parametro reale k.

Esercizio 37 *Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale ordinaria lineare omogenea*

$$y^{(4)} + ky''' + y'' = 0,$$

al variare del parametro reale k. Inoltre, si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y^{(4)} + y'' = \mathrm{sen} x + \cos x \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0 \, . \end{cases}$$

Esercizio 38 *Si consideri l'equazione differenziale ordinaria lineare omogenea*

$$y^{(6)} - y'' = 0,$$

e si dermini: (i) l'integrale generale; (ii) tutte le soluzioni $y(x)$ tali che $\lim_{x \to +\infty} y(x) = 0$; (iii) tutte le soluzioni $y(x)$ limitate su $\mathbb{R}$.

Esercizio 39 *Si consideri l'equazione differenziale ordinaria lineare*

$$L(y) := y^{(6)} + y^{(5)} - y^{(3)} - y'' = 0,$$

e si dermini: (i) l'integrale generale; (ii) tutte le soluzioni $y(x)$ tali che $\lim_{x \to -\infty} y(x) = 0$; (iii) tutte le soluzioni $y(x)$ limitate su $[0, +\infty[$; (iv) una soluzione particolare dell'equazione $L(y) = x^3 + 1$.

3.1.4 Secondo ordine a coefficienti non costanti

Esercizio 40 *Risolvere il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} x^2y''(x) + 4xy'(x) + 2y(x) = e^{-x} \\ y(1) = \frac{1}{e} \\ y'(1) = 0\,. \end{cases}$$

(Suggerimento: Si determini l'integrale generale per l'equazione lineare omogenea associata cercando soluzioni l.i. della forma $y(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. *In letteratura, tale EDO prende il nome di equazione lineare di Eulero).*

3.2 EDO di Bernoulli

Esercizio 41 *Risolvere il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' - 4y = 2e^x\sqrt{y} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

(Suggerimento: Dopo aver osservato che si tratta di un'equazione di Bernoulli, si può procedere dividendo per $\sqrt{y}$ *ed effettuando l'opportuna sostituzione).*

Esercizio 42 *Risolvere il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} xy' + y = xy^4 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

(Suggerimento: Dopo aver osservato che si tratta di un'equazione di Bernoulli, si può procedere effettuando l'opportuna sostituzione).

Esercizio 43 *Risolvere il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} (1-x^2)y' - xy = x(1-x^2)\sqrt{y} \\ y(\sqrt{2}) = y_0\,, \end{cases}$$

nei casi $y_0 = 0$ *e* $y_0 = 1$.
(Suggerimento: Ricondursi a un'equazione di Bernoulli, e poi procedere effettuando l'opportuna sostituzione).