

Esercizi su disequazioni algebriche, razionali, con valori assoluti, irrazionali, esponenziali e logaritmiche, trigonometriche

Docente: Prof. G. Florida

Indice

1	Disequazioni algebriche e razionali	1
1.1	Disequazioni algebriche lineari	1
1.2	Disequazioni algebriche di secondo grado	2
1.3	Disequazioni razionali	2
1.4	Disequazioni algebriche di grado superiore al secondo	3
2	Disequazioni con i valori assoluti	5
3	Disequazioni irrazionali	6
4	Disequazioni logaritmiche ed esponenziali	8
5	Disequazioni trigonometriche	9

1 Disequazioni algebriche e razionali

1.1 Disequazioni algebriche lineari

Esercizio 1 (Disequazioni lineari) *Risolvere le seguenti disequazioni lineari:*

i. $3x - 6 \geq 0$

ii. $-2x + 1 < 0$

iii. $5x - 2 > -5x + 3$

iv. $3x - 2 + 4x \leq 7x + 3$

v. $2x - 2 - 9x > -7 - 7x + 5$

vi. $\frac{x-1}{2} - \frac{3x-6}{3}$

vii. $\frac{1}{3} - \frac{x+5}{15} + \frac{2}{3} - \frac{x+1}{3} \leq \frac{4x-5}{15} - \frac{x}{3}$

1.2 Disequazioni algebriche di secondo grado

Esercizio 2 (Disequazioni di secondo grado) *Risolvere le seguenti equazioni:*

i. $x^2 - 5x + 6 \geq 0$

ii. $2x^2 + x + 3 \leq 0$

iii. $-4x^2 + 4x + 5 < 0$

iv. $x^2 + 8x + 16 \leq 0$

v. $x^2 - 9 < 0$

vi. $x^2 + 23 > 0$

vii. $2x^2 + 7x \geq 0$

1.3 Disequazioni razionali

Esercizio 3 (Disequazioni razionali) *Risolvere le seguenti disequazioni fratte:*

i. $\frac{2x+1}{3x-2} \leq 0$

ii. $\frac{x+5}{x^2-11x+18} \geq 0$

iii. $\frac{1+2x}{x^2+1} < 0$

iv. $\frac{x^2-6x+8}{2x^2-11x+9} \leq 0$

1.4 Disequazioni algebriche di grado superiore al secondo

Esercizio 4 (Disequazioni algebriche di grado maggiore di 2) *Risolvere le seguenti disequazioni algebriche*

i. $(2x - \pi)(x - 5)(2x - 7) < 0$

ii. $(x + 1)^3(x^2 - 2)(3x - \sqrt{2}) \leq 0$

iii. $(3x + 1)^4(2x + 1)^3(x^2 + \sqrt{3}) > 0$

iv. $(2x - \sqrt[3]{5})^3(x^2 + 1)(2x - 9) \geq 0$

Esercizio 5 (Scomposizione di polinomi) *Scomporre, in fattori irriducibili, i seguenti polinomi:*

i. $x^2 - 16$

ii. $x^2 + 2x + 1$

iii. $x^2 - 2x + 1$

iv. $x^2 + 8x + 16$

v. $x^3 - 8$

vi. $x^3 + 27$

vii. $x^3 + 4x^2 + 4x$

viii. $x^4 - 16$

ix. $81x^4 - 64$

x. $x^4 - 16$

xi. $x^4 - 2x^2 + 1$

xii. $x^4 + 2x^3 + x^2$

xiii. $(x + 1)^4 - (x^2 - 1)^2$

Esercizio 6 (Diseguazioni di grado maggiore di 2 e scomposizione)

Risolvere le seguenti equazioni:

- i. $x(x-4)(x^4-16) < 0$
- ii. $(x-2)(x+1)(x^4+2x^3+x^2) \leq 0$
- iii. $(x^2-8x+7)(x^4-81) \geq 0$
- iv. $(2x+1)[(x+1)^4-(x^2-1)^2] > 0$
- v. $(2x+2)^4-(x+1)^4 > 0$
- vi. $(x-1)^3+(x^2-1) \geq 0$
- vii. $x^4-4x^3-x^2+16x-12 \leq 0$

Esercizio 7 (Diseguazioni biquadratiche) Risolvere le seguenti diseguazioni biquadratiche

- i. $x^4-2x^2-15 \leq 0$
- ii. $16x^4-17x^2+1 > 0$
- iii. $3x^4+2x^2-5 > 0$
- iv. $x^4-5x^2 \geq 0$
- v. $\pi x^4+5x^2+9 \leq 0$
- vi. $\sqrt{5}x^4-3x^2+2 > 0$
- vii. $\sqrt[5]{3}x^4+5x^2 > 0$

Esercizio 8 (Diseguazioni reciproche) Introdotti i seguenti polinomi reciproci:

$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a$ (polinomio reciproco di prima specie)

ax^4+bx^3-bx-a (polinomio reciproco di seconda specie)

- i. Provare che se $\alpha \neq 0$ è radice di un polinomio reciproco di prima o di seconda specie anche $\frac{1}{\alpha}$ è radice dello stesso polinomio.
- ii. Provare che un polinomio reciproco di seconda specie ha sempre come due delle sue radici ± 1 .

iii. Risolvere le disequazioni:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a > 0 \text{ (disequazione reciproca di prima specie)}$$

$$ax^4 + bx^3 - bx - a > 0 \text{ (disequazione reciproca di seconda specie)}$$

iv. Risolvere le seguenti disequazioni reciproche:

$$x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 \geq 0$$

$$3x^4 + 10x^3 - 10x - 3 \geq 0$$

$$x^4 - 4x^3 + 4x - 1 \leq 0$$

$$4x^4 - 17x^3 + 8x^2 - 17x - 4 \geq 0.$$

2 Disequazioni con i valori assoluti

Esercizio 9 (Proprietà dei valori assoluti) Siano $M, N > 0$, dimostrare che

i.

$$|x| < M \iff -M < x < M$$

ii.

$$|x| > N \iff x < -N, \quad x > N$$

iii.

$$|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|, \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

iv.

$$||x_1| - |x_2|| \leq |x_1 - x_2|, \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

Esercizio 10 (Disequazioni con i valori assoluti) Risolvere le seguenti disequazioni con i valori assoluti

i.

$$|x - 5| - 5 \leq 0$$

ii.

$$7(1 - |x|) \geq -x$$

iii.

$$x^2 + |x| - 6 \leq 0$$

iv.

$$|x| < |5x^2 - 15x|$$

v.

$$\frac{|x|}{x^2 - 9|x| - 22} < 1$$

vi.

$$|3x^2 - 8x - 21| < 2$$

vii.

$$\left| \frac{x-2}{x-5} \right| < 1$$

viii.

$$\left| \frac{3x-2}{7-x} \right| > 2$$

3 Disequazioni irrazionali

Esercizio 11 (Disequazioni irrazionali: radici ad indice dispari) *Risolvere le seguenti disequazioni irrazionali*

i.

$$2x - 1 < \sqrt[3]{8x(x^2 - 1)}$$

ii.

$$\sqrt[5]{x^5 - 5x^2 + 19x - 12} < x$$

Esercizio 12 (Disequazioni irrazionali: radici ad indice pari) *Risolvere le seguenti disequazioni irrazionali:*

i.

$$2x + 1 < \sqrt{4x^2 - 4x - 15}$$

ii.

$$\sqrt{x^2 + 4x - 21} < 2x - 3$$

iii.

$$9x - 1 \leq \sqrt{9 - x^2}$$

Esercizio 13 (Disequazioni irrazionali) *Risolvere le seguenti disequazioni irrazionali:*

i. $\sqrt{2x-1} \leq 5$

ii. $-5 < \sqrt{4x^2 - 4x - 15}$

iii. $\sqrt{3x-2} \leq -51$

iv. $\sqrt{3x-2} > -1$

Esercizio 14 (Disequazioni irrazionali con risoluzione mediante posizioni) *Risolvere le seguenti disequazioni irrazionali*

i.
$$3\sqrt{x+1} + \sqrt[4]{x+1} - 4 > 0$$

ii.
$$3\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[6]{2x-1} - 2 < 0$$

Esercizio 15 (Disequazioni irrazionali con valori assoluti) *Risolvere le seguenti disequazioni*

i.
$$|x| \sqrt{1-2x^2} > 2x^2 - 1$$

ii.
$$|x-1| \sqrt{3x^2-1} > \sqrt{2}(x-1)$$

iii.
$$|7x-1| \sqrt{3-4x^2} > 4x^2 - 3$$

iv.
$$(7x-1) \sqrt{3-4x^2} > 4x^2 - 3$$

v.
$$|x| \sqrt{x^2-2} < x^2 - 1$$

4 Disequazioni logaritmiche ed esponenziali

Esercizio 16 (Disequazioni logaritmiche) *Risolvere le seguenti disequazioni logaritmiche*

i.

$$\log_2 x < \frac{1}{3}$$

ii.

$$\log_{\frac{1}{5}} x \geq \sqrt{3}$$

iii.

$$\log_{\frac{1}{27}}(x^2 + 4x) \leq \log_{\frac{1}{27}} 5$$

iv.

$$\log_{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{x} \right) \geq 1$$

v.

$$-2 > \log(x - 1)$$

vi.

$$\log(3x - 2x^2) < 0$$

vii.

$$\log_4(-2x^2 + x^4) < \frac{3}{2}$$

viii.

$$\log(x^2 - 2x) < \log(x^2 + 2)$$

Esercizio 17 (Disequazioni esponenziali) *Risolvere le seguenti disequazioni esponenziali*

i.

$$9^x < 3$$

ii.

$$5 > \left(\frac{1}{5} \right)^{x-12x^2}$$

iii.

$$81^{x-1} \geq 3^{x^2}$$

Esercizio 18 (Diseguazioni) *Risolvere le seguenti disequazioni*

i.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^{|x-1|}$$

ii.

$$81^{x-1} \geq 3^{x^2}$$

iii.

$$e^{2x} + e^x - 2 < 0$$

iv.

$$e^{-x} - e^x - 2 < 0$$

v.

$$(x+2)^{(x^2-2)} > 1$$

vi.

$$(x^2-4)^x > (x^2-4)$$

vii.

$$\log_{x+3}(x^2-5x+6) > 0$$

5 Disequazioni trigonometriche

Esercizio 19 (Disequazioni trigonometriche) *Risolvere le seguenti disequazioni trigonometriche*

i.

$$\sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ii.

$$\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}$$

iii.

$$2 \sin^2 x - 5 \sin x + 1 > 0$$

iv.

$$2 \cos x < \sqrt{3}$$

v.

$$2 \cos^2 x < 1$$

vi.

$$\cos^2 x - 2 \cos x - 3 < 0$$

Esercizio 20 (Disequazioni trigonometriche) *Risolvere le seguenti disequazioni trigonometriche*

i.

$$\sqrt{3} - 3 \operatorname{tang} x > 0$$

ii.

$$\cos x - \sin x > 0$$

iii.

$$\cos^2 x - \sin^2 x > 0$$

iv.

$$2\sqrt{2} \sin x \cos x - 1 < 0$$

Esercizio 21 (Disequazioni trigonometriche) *Risolvere la seguente disequazione trigonometrica*

$$\sqrt{1 - 2 \sin^2 x} \geq \sqrt{2} \sin x + 1$$