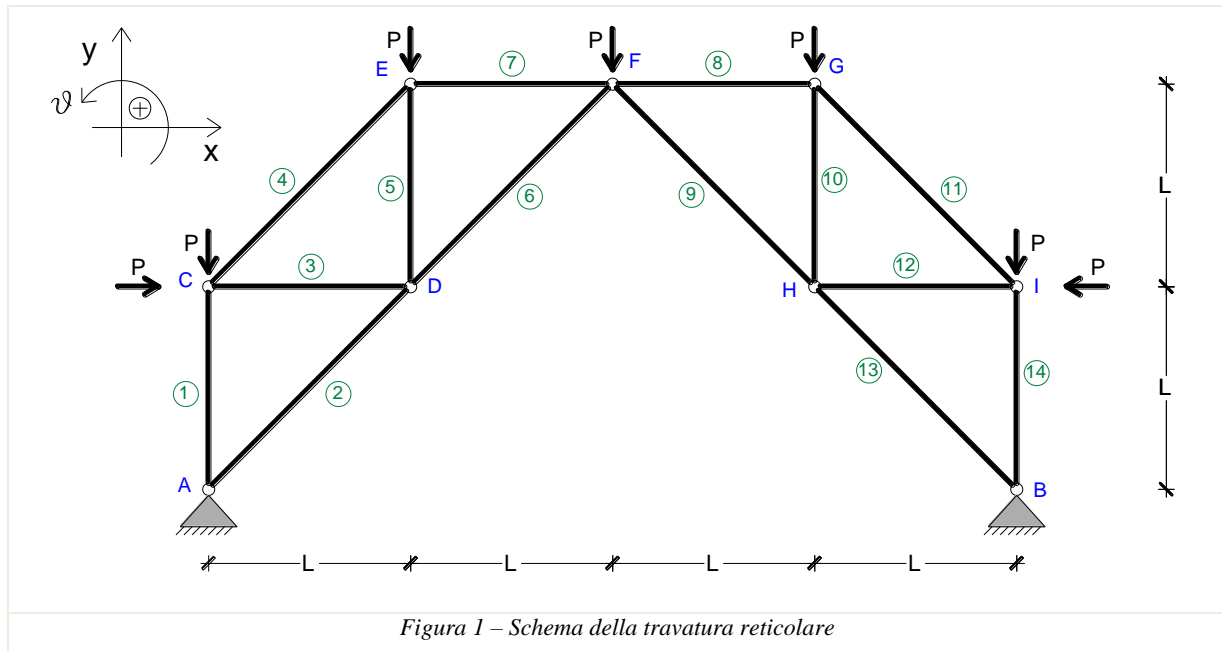


**ESERCIZIO n.2**

Data la travatura reticolare piana triangolata semplice illustrata in Figura 1, determinare gli sforzi normali nelle aste utilizzando i seguenti metodi: metodo dell'equilibrio ai nodi; metodo delle sezioni di Ritter; metodo diretto (applicazione del principio dei lavori virtuali (P.L.V.) ad una catena cinematica reticolare definita a partire dalla travatura data).



## 1. Valutazione dell'isostaticità della travatura

### Condizione necessaria per l'isostaticità ( $l=0$ )

Si valuta il grado di labilità apparente,  $l$ , della travatura interpretandola come un sistema in cui i nodi (soggetti ai carichi esterni concentrati o alle reazioni vincolari esterne) sono gli elementi dotati di gradi di libertà di corpo rigido (2 G.L. nel piano); mentre le aste (non soggette a carichi esterni direttamente applicati su di esse) vengono considerate come dei pendoli interni (di molteplicità unitaria) che collegano i nodi stessi. Pertanto si può scrivere:

$$l = 2n - a - \mu_e = 2 \times 9 - 14 - 4 = 0,$$

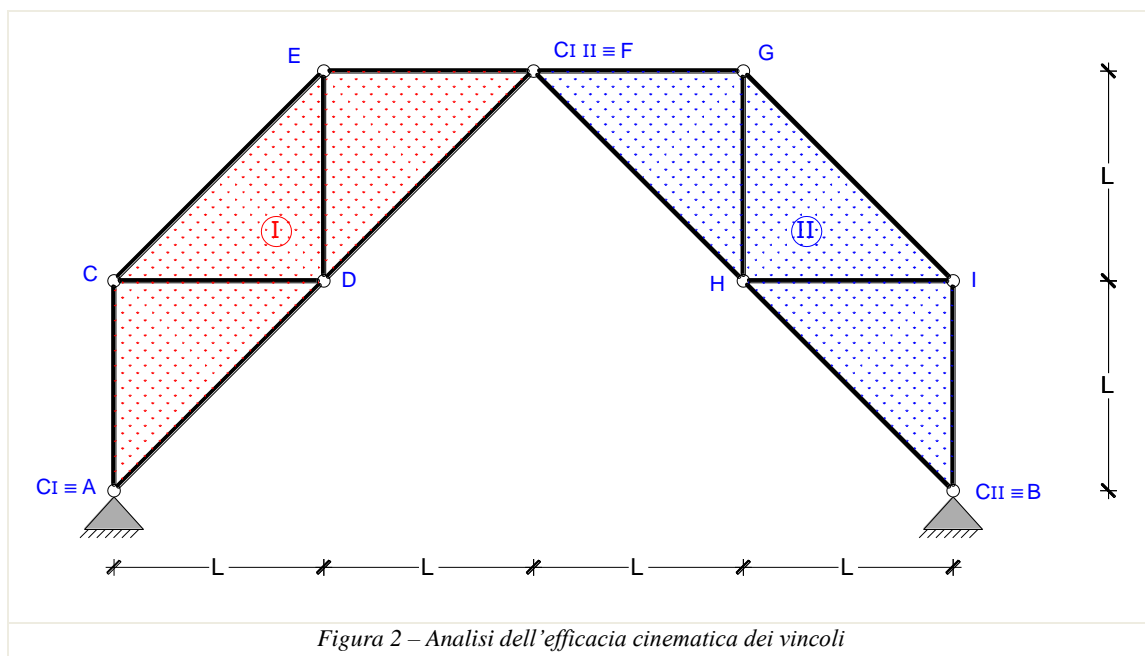
essendo:  $n$  = numero dei nodi;  $a$  = numero delle aste;  $\mu_e$  = molteplicità globale dei vincoli esterni.

La condizione necessaria per l'isostaticità della travatura reticolare è quindi soddisfatta.

### Condizione sufficiente per l'isostaticità

La travatura in esame è costituita da due maglie triangolari semplici e quindi da due sistemi strettamente indeformabili. Essa può infatti considerarsi come un sistema articolato costituito da due corpi rigidi piani (maglie ACEFD e BIGFH campite in Figura 2) vincolati all'esterno con due cerniere, A e B, e collegati mutuamente da una vincolo cerniera interna, nodo F.

Con riferimento alla Figura 2, nella quale la campitura delle maglie triangolari indeformabili aiuta ad interpretare la travatura come un sistema articolato costituito da due corpi rigidi piani, si può verificare l'efficacia cinematica dei vincoli.



Trattasi di un arco a tre cerniere non allineate, A, B ed F, rispettivamente centro assoluto del corpo I ( $C_I$ ), centro assoluto del corpo II ( $C_{II}$ ) e centro relativo ( $C_{I II}$ ); per tale sistema non sono possibili movimenti di

corpo rigido. Pertanto anche la condizione sufficiente per l'isostaticità della travatura risulta soddisfatta e il sistema, nel suo complesso, risulta isostatico.

## 2. Determinazione delle reazioni vincolari esterne

### Metodo analitico

Si risolve il sistema in termini di reazioni vincolari esterne; a tal fine si considera lo schema di corpo libero nel quale i vincoli esterni sono sostituiti dalle reazioni che essi sono potenzialmente in grado di esplicare. Tali reazioni si applicano con versi arbitrari, ad esempio concordi a quelli del sistema di riferimento adottato, così come illustrato in Figura 3:

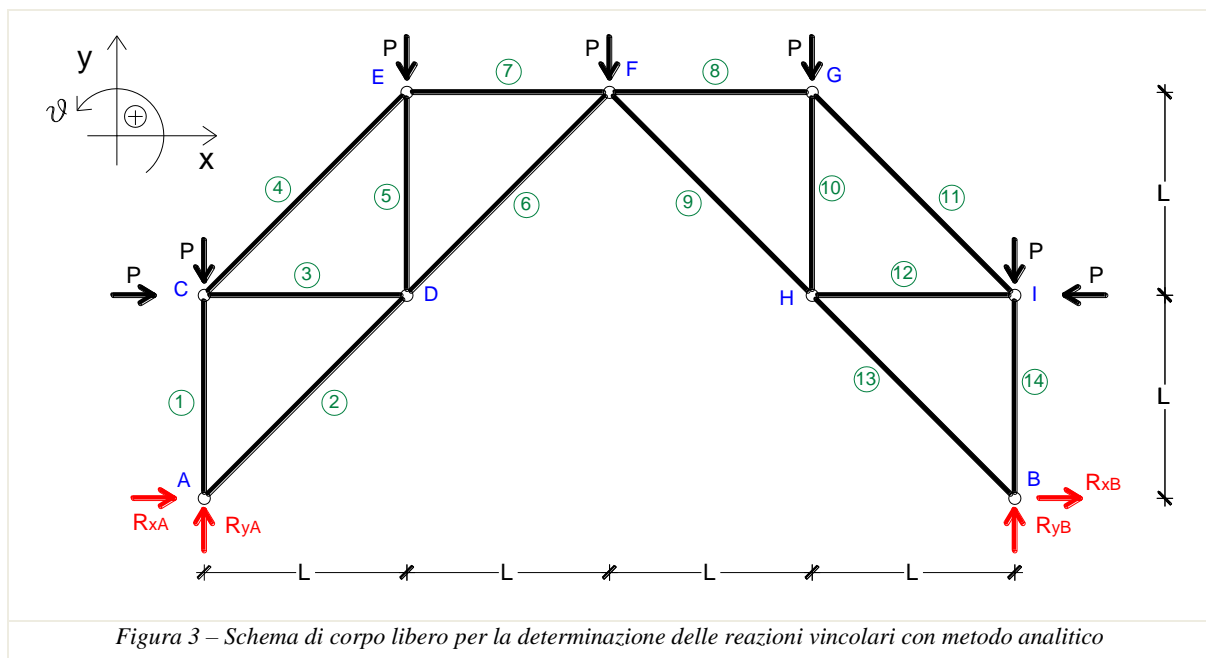


Figura 3 – Schema di corpo libero per la determinazione delle reazioni vincolari con metodo analitico

Si hanno in questo caso 4 componenti di reazioni incognite determinabili attraverso le 3 equazioni di equilibrio globali (riferite cioè all'intero sistema) ed 1 equazione di equilibrio parziale, quest'ultima tenendo conto della funzione cinematica della cerniera interna F (per esempio in questo caso si impone che la porzione I non ruoti rispetto alla porzione II); in dettaglio:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_{xA} + R_{xB} + P - P = 0 \Rightarrow R_{xB} = -R_{xA} \Rightarrow \boxed{R_{xB} = -\frac{P}{2}}$$

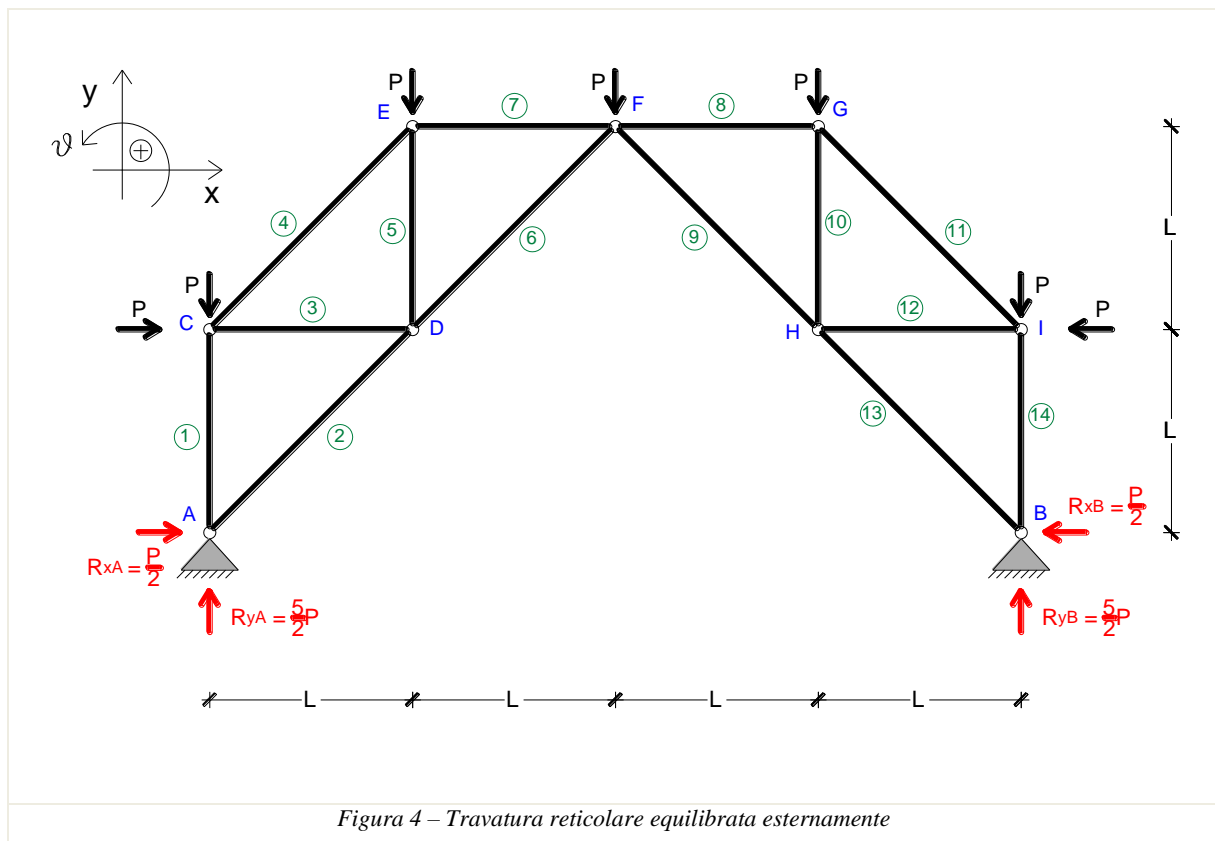
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_{yA} + R_{yB} - 5P = 0 \Rightarrow R_{yA} = 5P - R_{yB} \Rightarrow \boxed{R_{yA} = 5P - \frac{5P}{2} = \frac{5P}{2}}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow R_{yB} \cdot 4L - P \cdot L - P \cdot L - P \cdot 2L - P \cdot 3L - P \cdot 4L + P \cdot L = 0 \Rightarrow \boxed{R_{yB} = \frac{10}{4}P = \frac{5}{2}P}$$

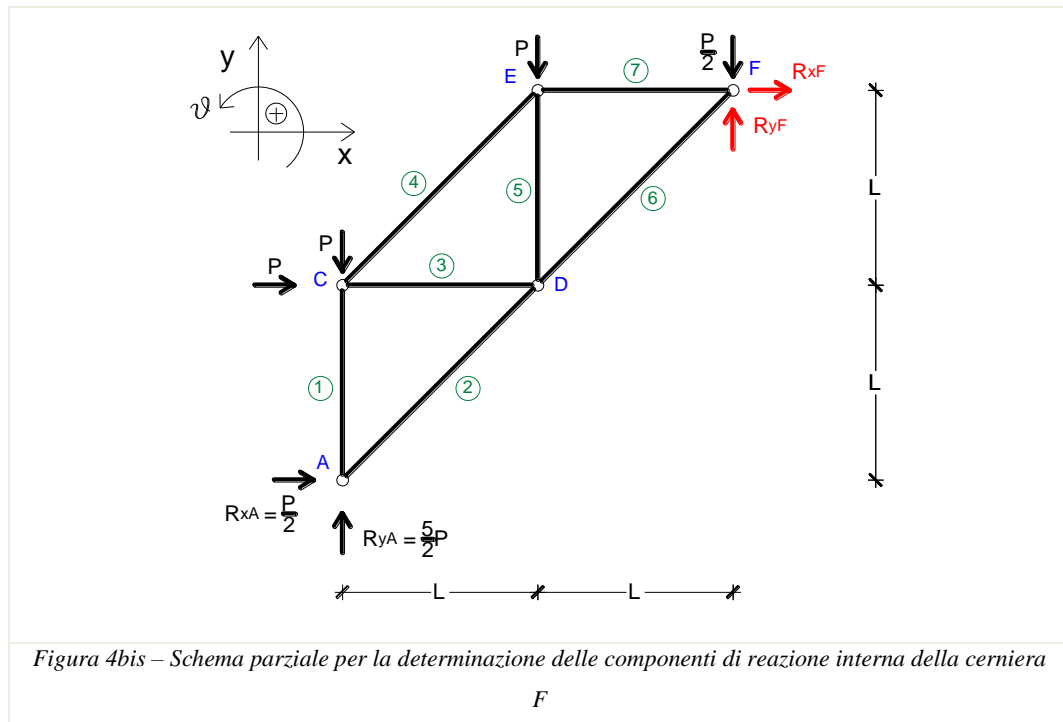
$$\sum M_F^I = 0 \Rightarrow R_{xA} \cdot 2L - R_{yA} \cdot 2L + P \cdot L + P \cdot 2L + P \cdot L = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_{xA} \cdot 2L = \frac{5}{2}P \cdot 2L - 4P \cdot L \Rightarrow \boxed{R_{xA} = \frac{P}{2}}$$

Il valore analitico della reazione  $R_{xB}$  risulta negativo, pertanto il verso effettivo del vettore  $R_{xB}$  risulta opposto a quello ipotizzato in Figura 3. Si ha:



Le componenti di reazione interna della cerniera F possono trovarsi indifferentemente imponendo l'equilibrio di I o di II. A tal fine sostituendo la cerniera F con le reazioni che essa è in grado di esplicare si impone l'equilibrio della porzione di struttura considerata applicando su di essa le reazioni esterne note oltre, ovviamente, i carichi su di essa agenti.

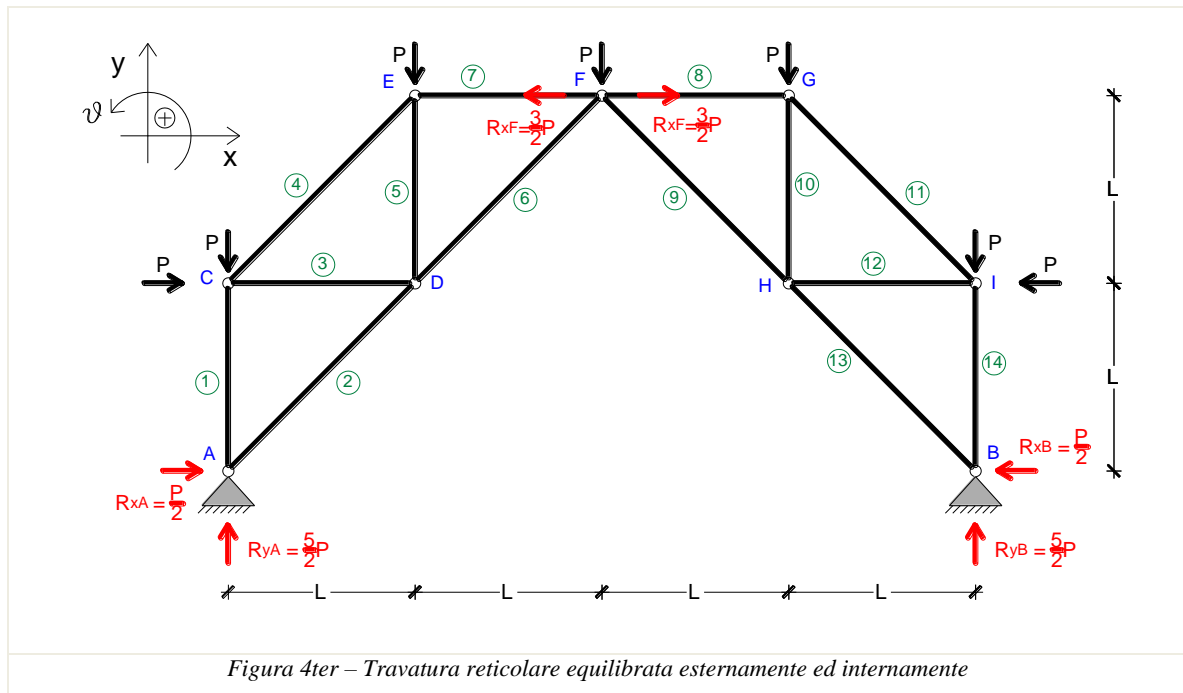


$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_{xF} + P + \frac{P}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{R_{xF} = -\frac{3}{2}P}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_{yF} - 2P - \frac{P}{2} + \frac{5}{2}P = 0 \Rightarrow \boxed{R_{yF} = 0}$$

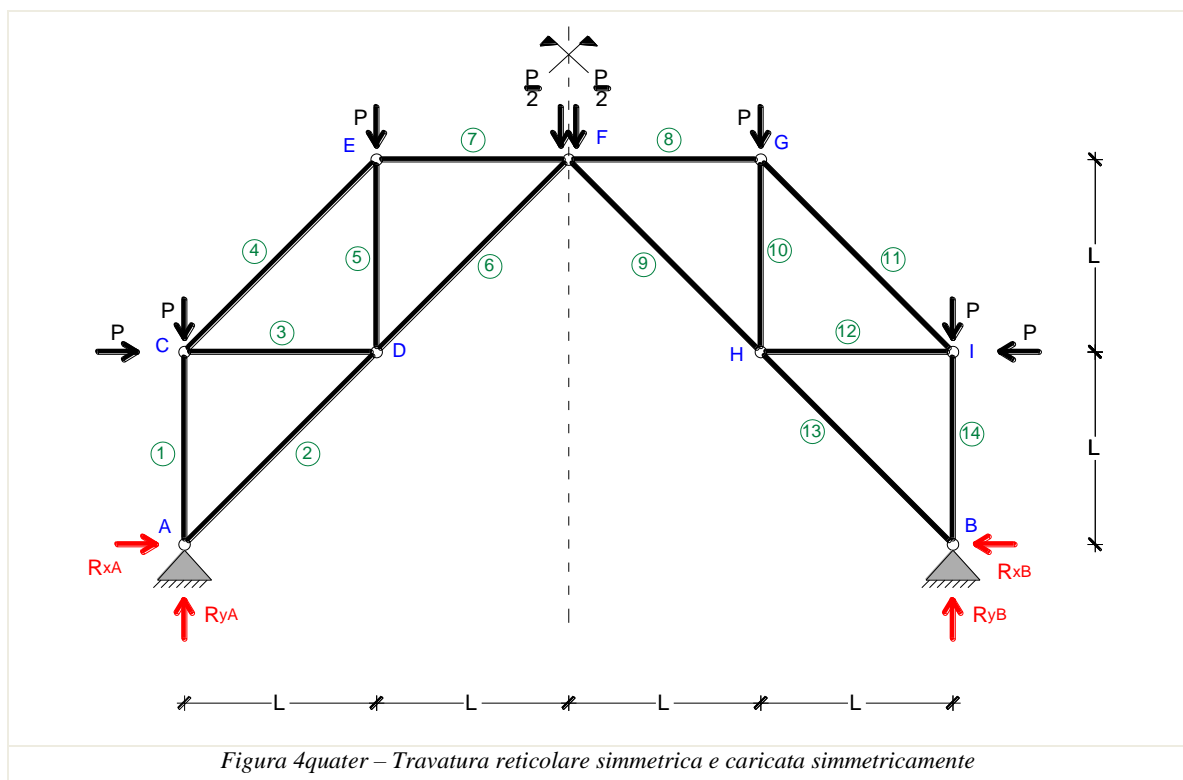
dove si è tenuto conto che il carico verticale  $P$  in corrispondenza del nodo  $F$  si distribuisce equamente ( $\frac{P}{2}$  e  $\frac{P}{2}$ ) nei due corpi rigidi I e II connessi nel nodo medesimo.

Si ha in definitiva:

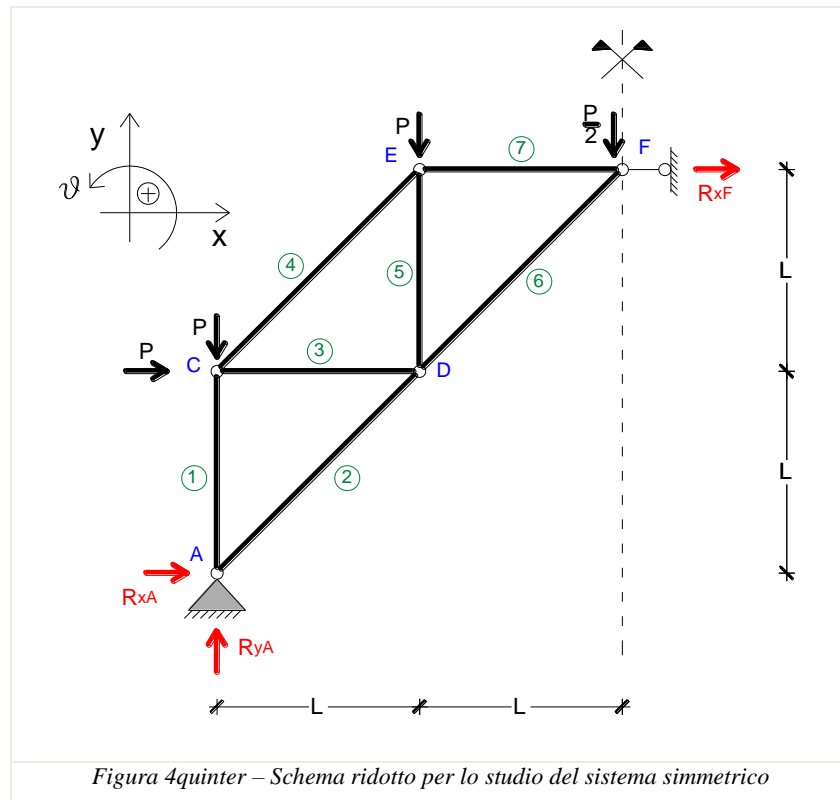


### Osservazione

Dal momento che il sistema articolato in esame risulta simmetrico rispetto ad un asse e carico simmetricamente, le condizioni di equilibrio del sistema stesso impongono che anche le reazioni vincolari esterne devono essere simmetriche rispetto al medesimo asse.



L'analisi (statica e cinematica) di un sistema simmetrico e caricato simmetricamente può essere effettuata studiando un sistema ridotto costituito da una sola delle due parti simmetriche della struttura; in corrispondenza dell'asse di simmetria si inserisce un opportuno vincolo esterno che non produce alcuna reazione parallela all'asse di simmetria. In questo caso nello schema ridotto (costituito dal solo tratto I) occorre introdurre, in corrispondenza dell'asse di simmetria, un pendolo ad asse orizzontale:



Si impongono le tre equazioni cardinali della statica per ricavare le 3 reazioni incognite dello *schema ridotto isostatico* riportato sopra:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_{xA} + R_{xF} + P = 0 \Rightarrow R_{xA} = -P - R_{xF} \Rightarrow R_{xA} = \frac{P}{2}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_{yA} - 2P - \frac{P}{2} = 0 \Rightarrow R_{yA} = \frac{5}{2}P$$

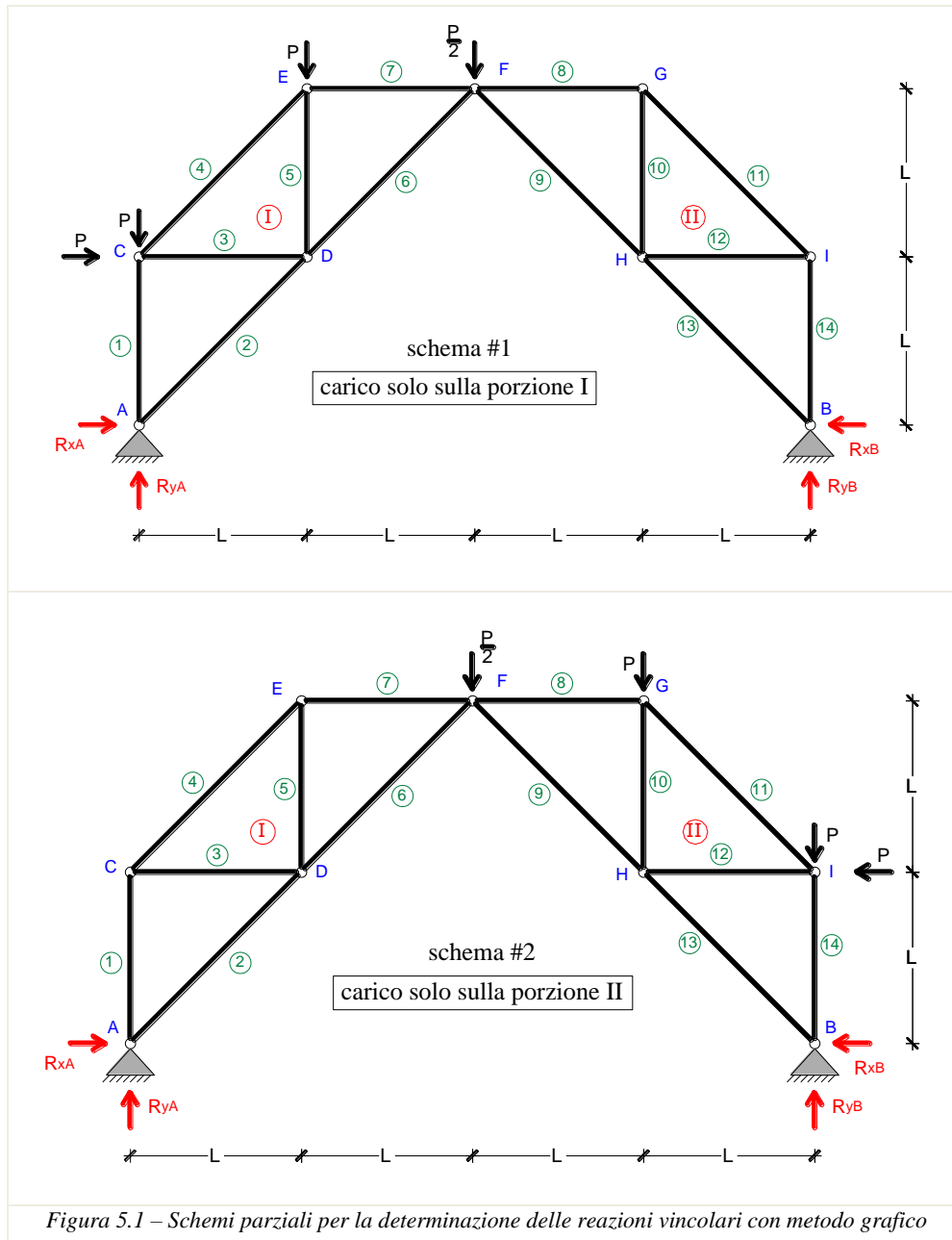
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -P \cdot L - P \cdot L - R_{xF} \cdot 2L = 0 \Rightarrow R_{xF} = -\frac{3}{2}P$$

Le componenti di reazione della cerniera B e della cerniera interna F nel tratto II saranno, per la simmetria, perfettamente speculari a quelle determinate per la cerniera A e per la cerniera interna F nel tratto I.

È facile verificare che i valori delle reazioni vincolari determinati sfruttando la simmetria del problema coincidono con quelli valutati sopra considerando il sistema articolato nella sua interezza.

Metodo grafico

È possibile, sebbene risulti abbastanza laborioso, ricavare le reazioni vincolari con il metodo grafico. Il sistema non è isostatico per vincoli esterni, non presenta tratti “isostatici” (cioè di molteplicità vincoli  $\mu_e + \mu_i = 3$ ), non presenta tratti scarichi. Si applica quindi il principio di sovrapposizione degli effetti valutando le reazioni vincolari sui due schemi seguenti:

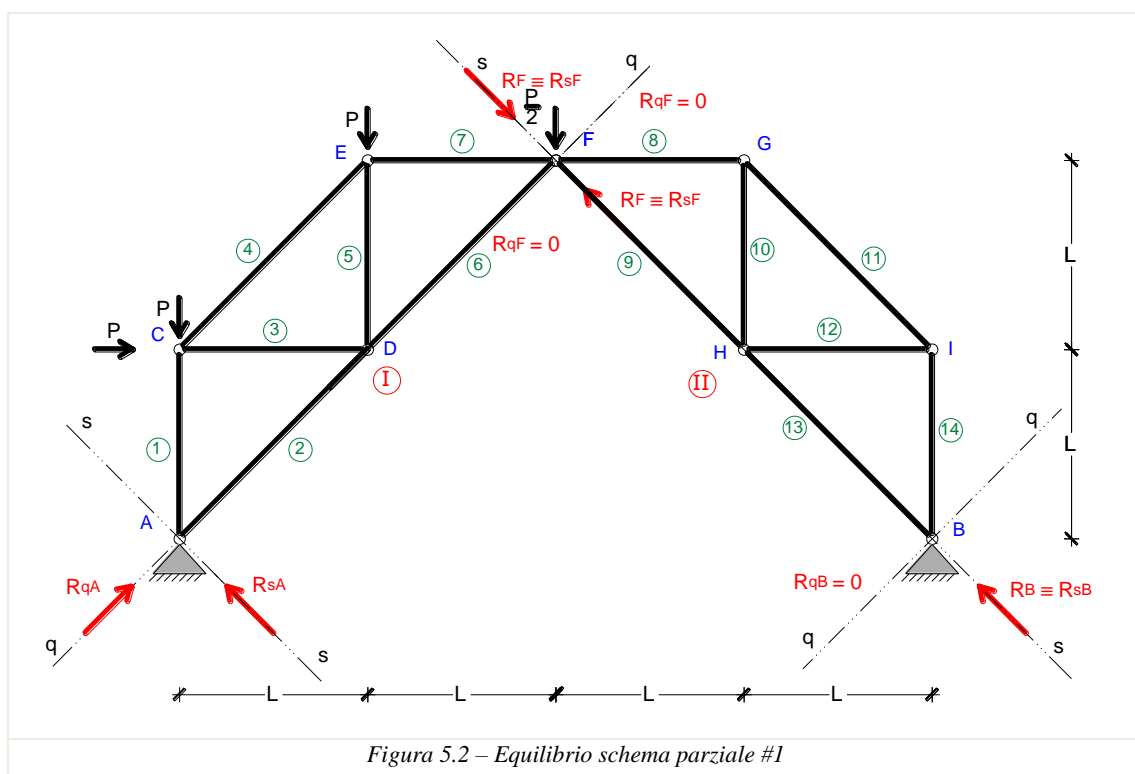


dove si è tenuto conto che il carico verticale  $P$  in corrispondenza del nodo  $F$  si distribuisce equamente ( $\frac{P}{2}$  e  $\frac{P}{2}$ ) nei due corpi rigidi  $I$  e  $II$  connessi nel nodo medesimo.



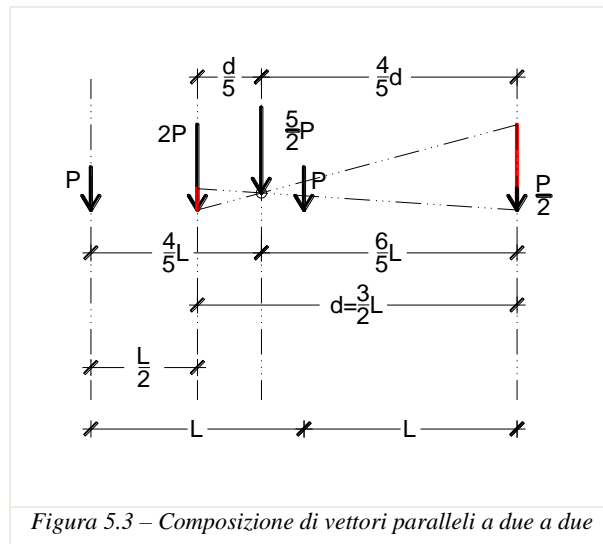
È sufficiente studiare soltanto uno dei due schemi parziali riportati in Figura 5: infatti, per la simmetria geometrica e di carico della travatura, le reazioni vincolari dello schema #1 saranno perfettamente speculari a quelle dello schema #2. Pertanto si studierà soltanto lo schema parziale #1 considerando la condizione di carico sulla sola porzione I, e si estenderanno in seguito i risultati per lo schema #2.

Nello schema #1 la porzione II della travatura risulta scarica, ciò consente di individuare la retta d'azione della reazione della cerniera B e della cerniera interna F (Figura 5.2): dovendo infatti il corpo II essere in equilibrio con carichi esterni nulli, le due forze avranno come retta d'azione la congiungente B-F (direzione  $s$ ) e quindi la componente secondo la direzione  $q$  sarà nulla ( $R_{qB} = R_{qF} = 0$ ). Si può quindi imporre l'equilibrio di I e poi, nota  $R_F$ , imporre l'equilibrio di II.



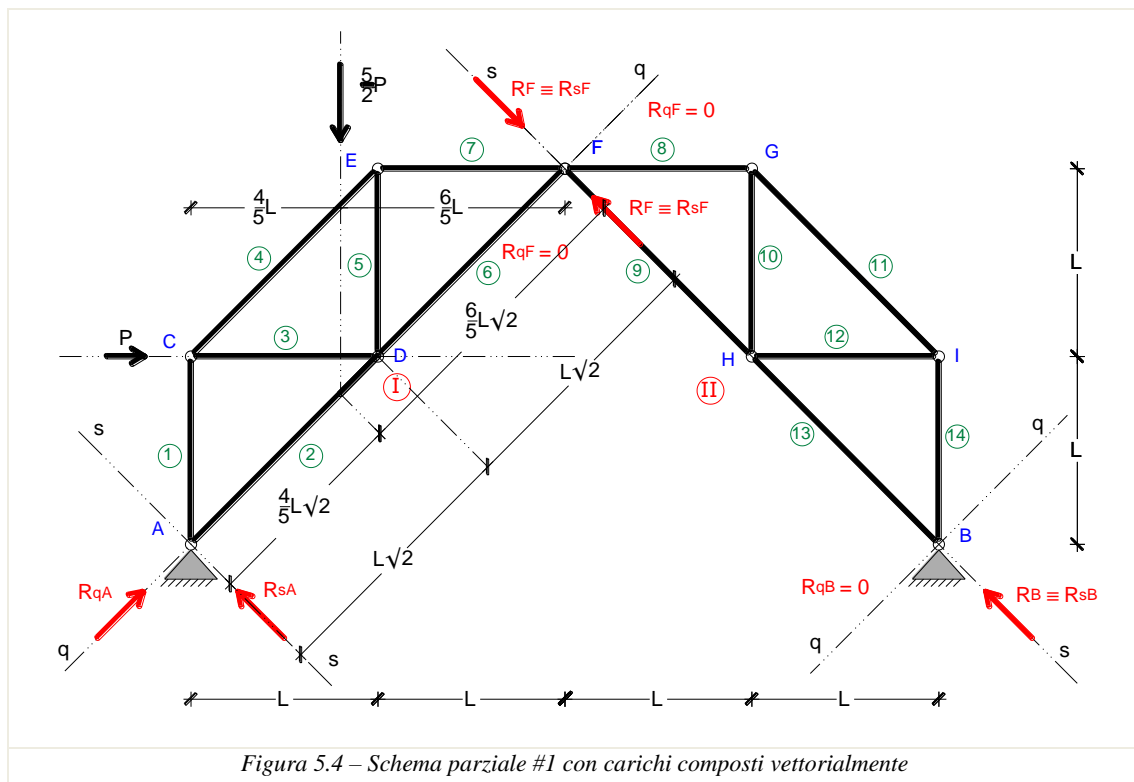
[Si ricorda che la risultante di due forze parallele aventi lo stesso verso è parallela alle due forze, ha modulo pari alla somma dei due moduli e retta d'azione una retta che taglia la congiungente dei punti di applicazione delle forze in parti inversamente proporzionali alle grandezze delle forze.]

Si compongono vettorialmente forze verticali (a due a due) ottenendo:

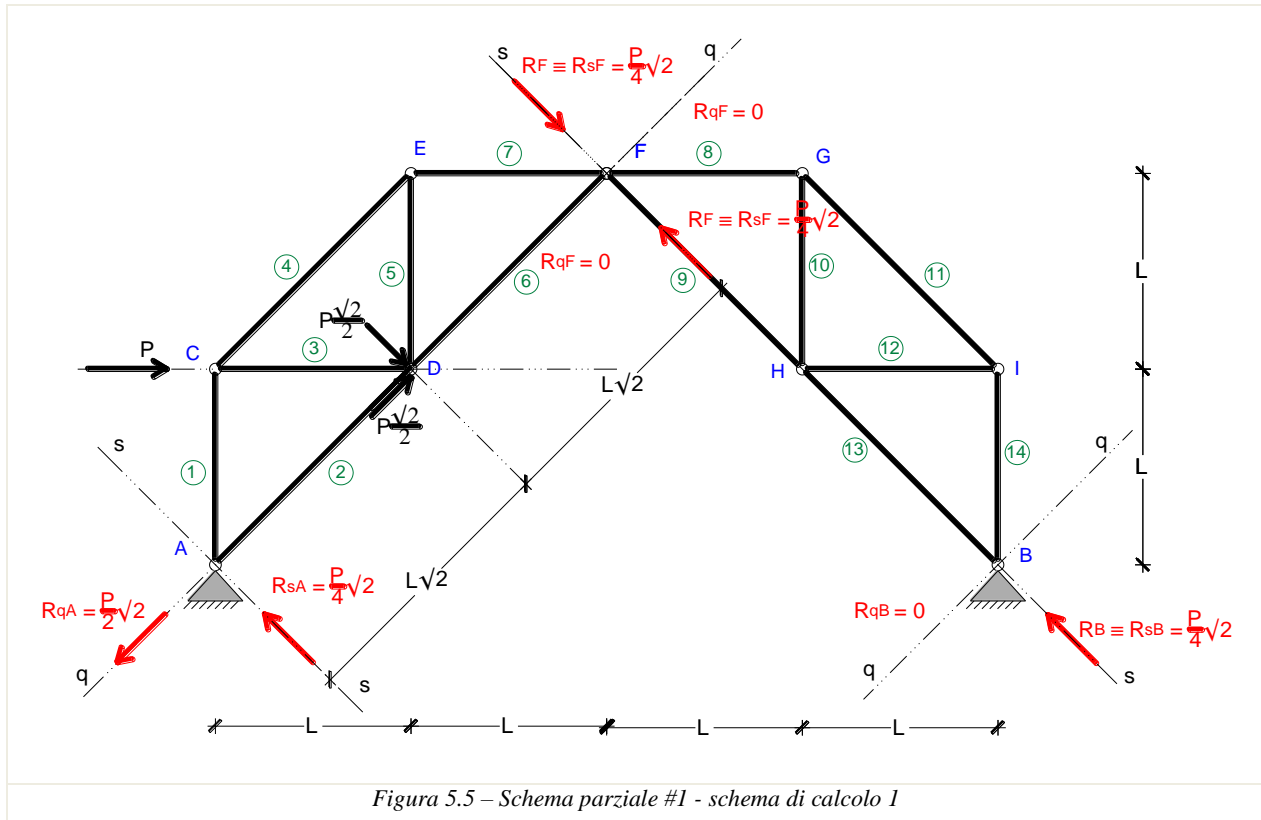


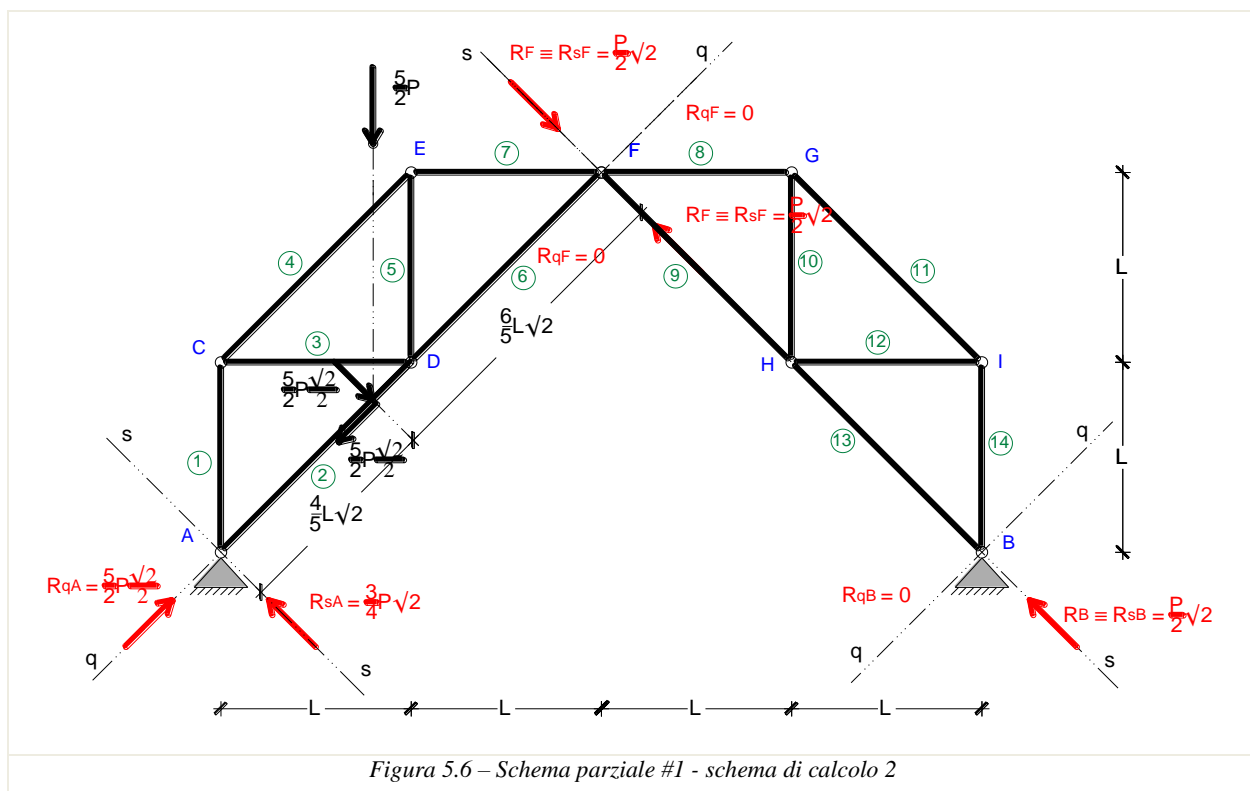
Nella Figura 5.3 si sono sommati dapprima i due vettori di modulo  $P$  (applicati nei nodi C ed E) ottenendo un primo vettore risultante di modulo  $P+P=2P$  applicato ad  $\frac{L}{2}$ ; quindi si è sommato quest'ultimo con il vettore di modulo  $\frac{P}{2}$  (applicato nel nodo F) ottenendo il vettore risultante complessivo di modulo  $2P + \frac{P}{2} = \frac{5}{2}P$  applicato a  $\frac{4}{5}L$  da sinistra.

In definitiva si studierà lo schema:

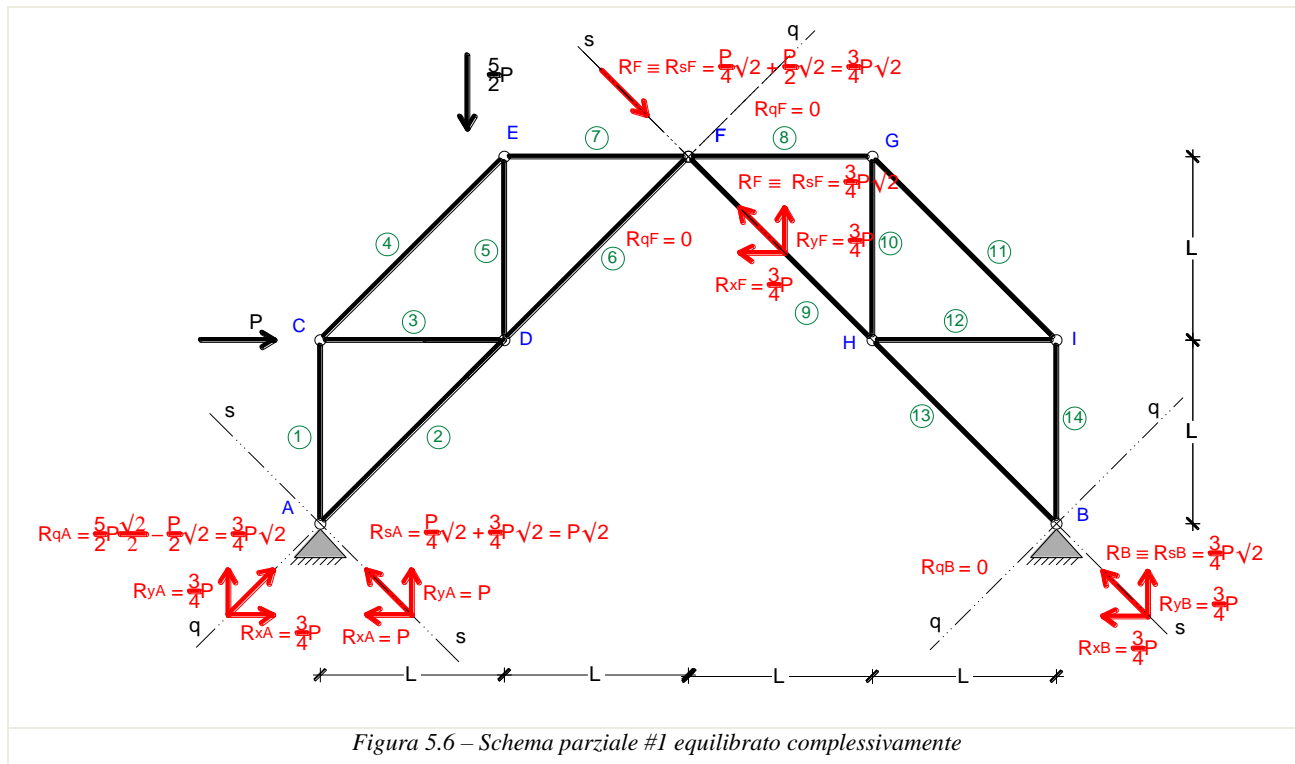


Per imporre l'equilibrio del corpo I in maniera agevole si scompongono i due carichi agenti ( $P$  e  $\frac{5}{2}P$ ) nelle direzioni  $s$  e  $q$ : per la condizione  $R_{qF} = 0$  sopra detta, la componente dei carichi in direzione  $q$  dovrà essere equilibrata da  $R_{qA}$ , mentre quella in direzione  $s$  sarà equilibrata da  $R_{sA}$  ed  $R_{sF}$  secondo le basi teoriche del principio della leva. Si studiano i due schemi di carico separatamente:

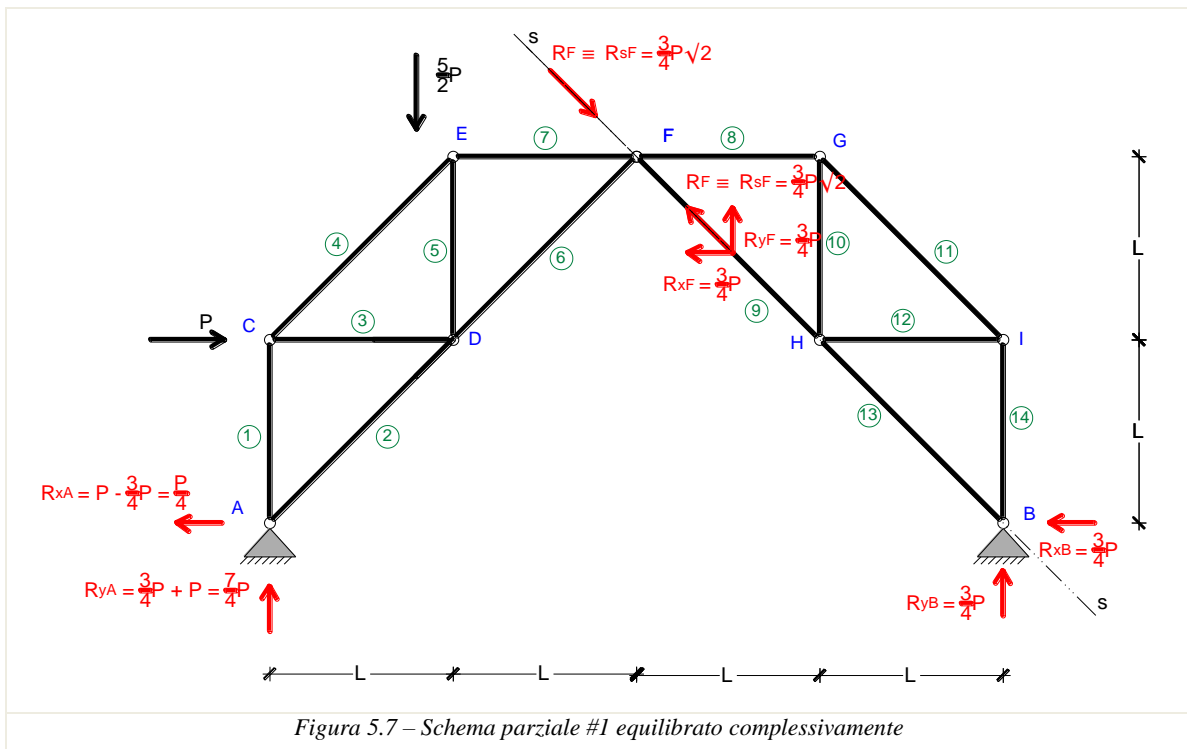




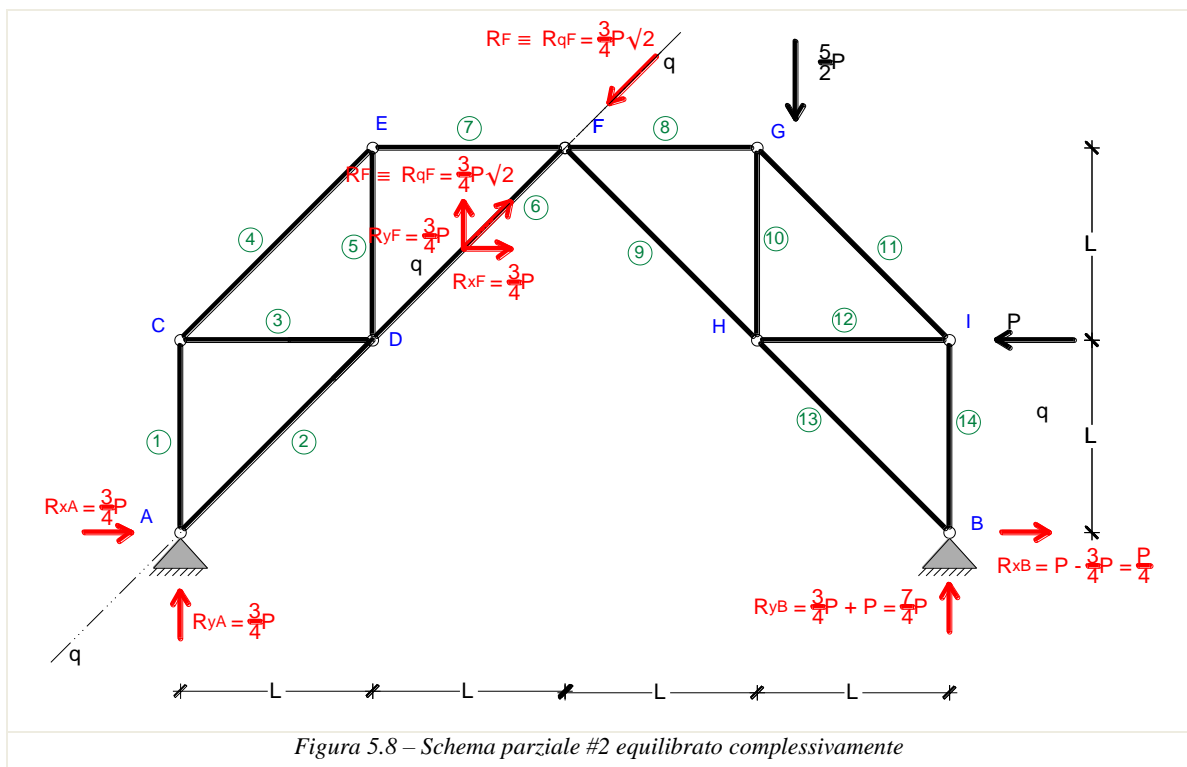
Sovrapponendo gli effetti ed evidenziando le componenti in direzione x e y delle reazioni vincolari:



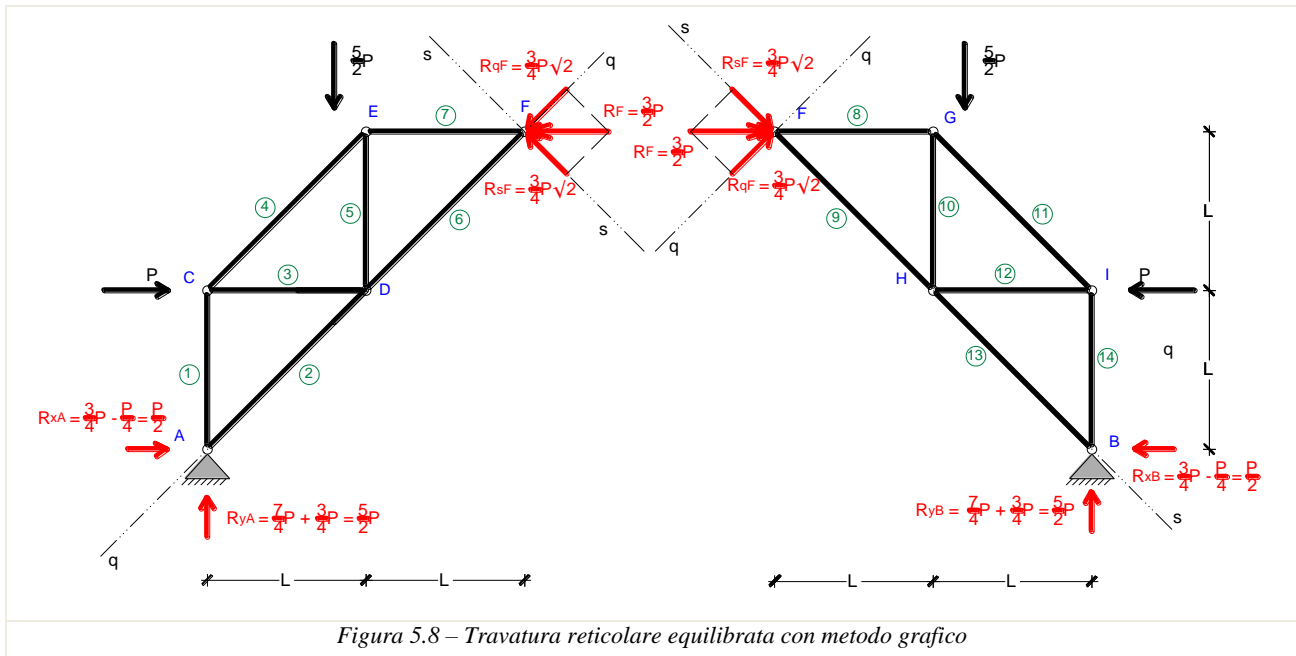
E ancora:



Per quanto sopra detto, ripetendo la procedura appena descritta per lo studio dello schema #2 (caricando solo la porzione II della travatura questa volta) si ottengono reazioni vincolari perfettamente speculari a quelle di Figura 5.7 come mostrato sotto:



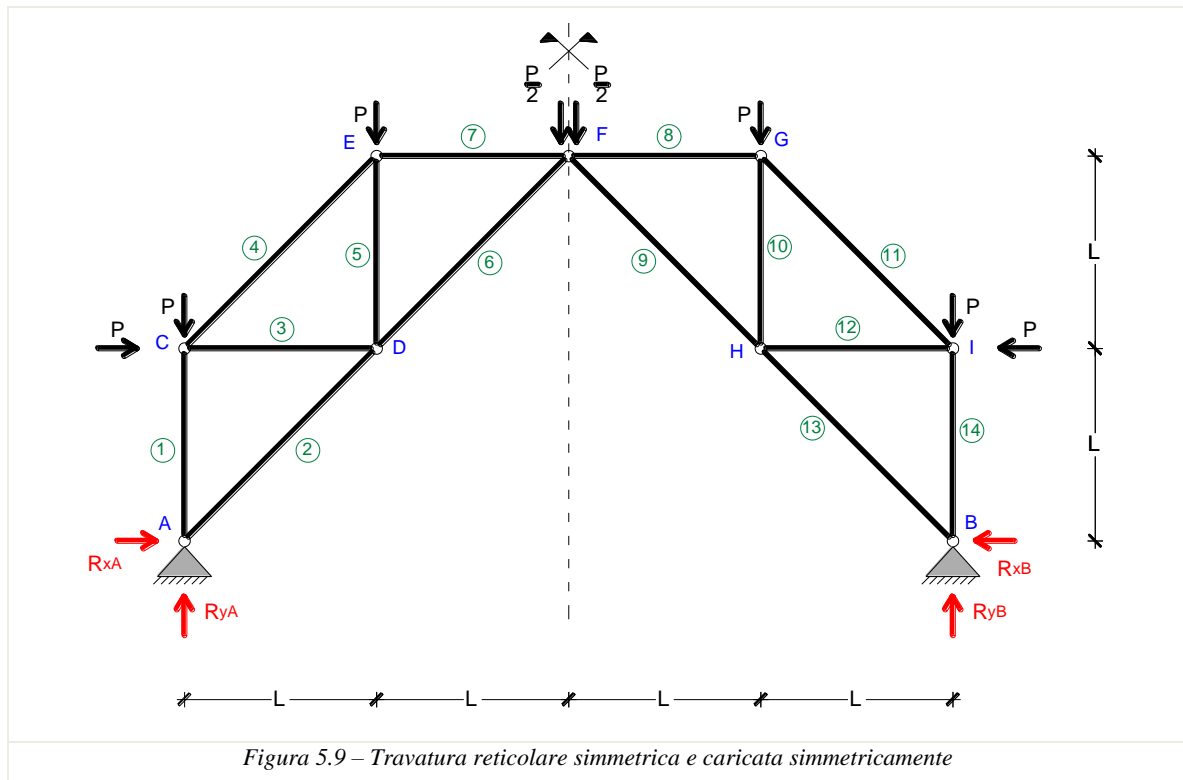
Sovrapponendo gli effetti dello schema #1 (Figura 5.7) e dello schema #2 (Figura 5.8) si ottiene lo schema complessivo di Figura 5.9, dove sono riportate le due porzioni I e II di travatura sconnesse tra di loro, per meglio evidenziare la composizione vettoriale per la determinazione della reazione della cerniera interna F:



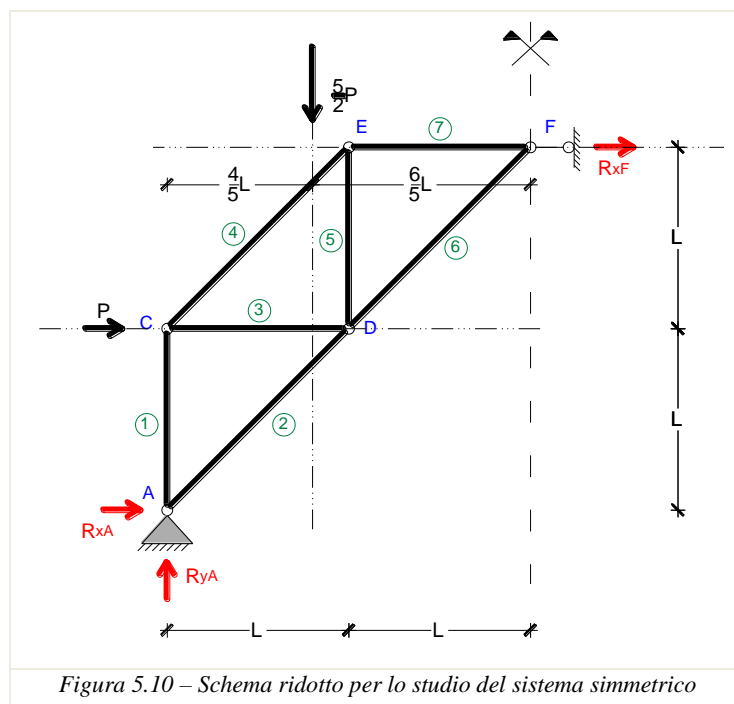
È facile verificare che i valori delle reazioni vincolari determinati per via grafica coincidono con quelli valutati per via analitica.

#### Osservazione

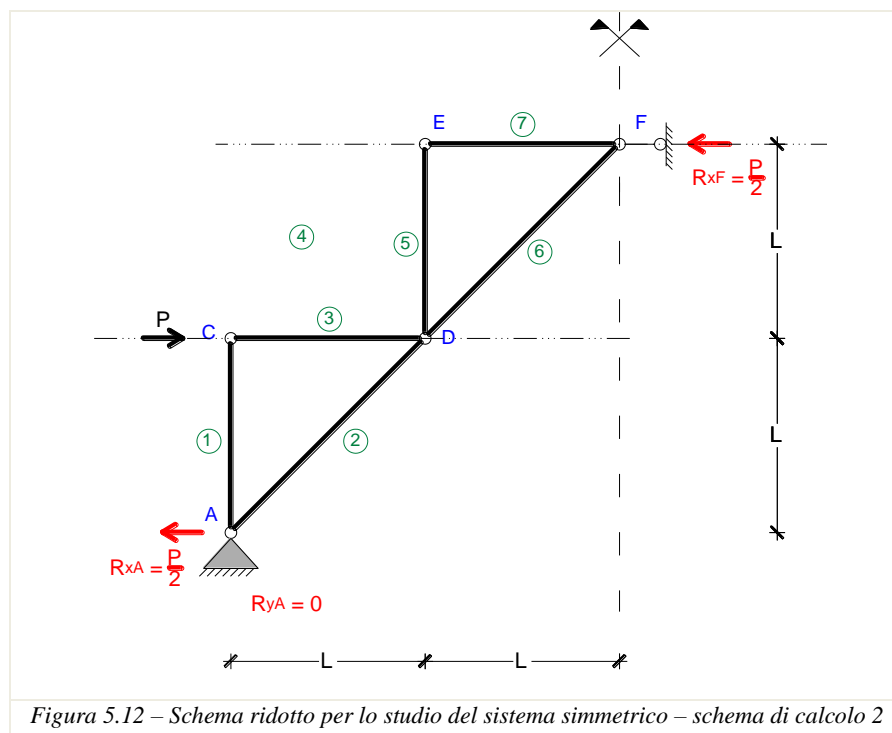
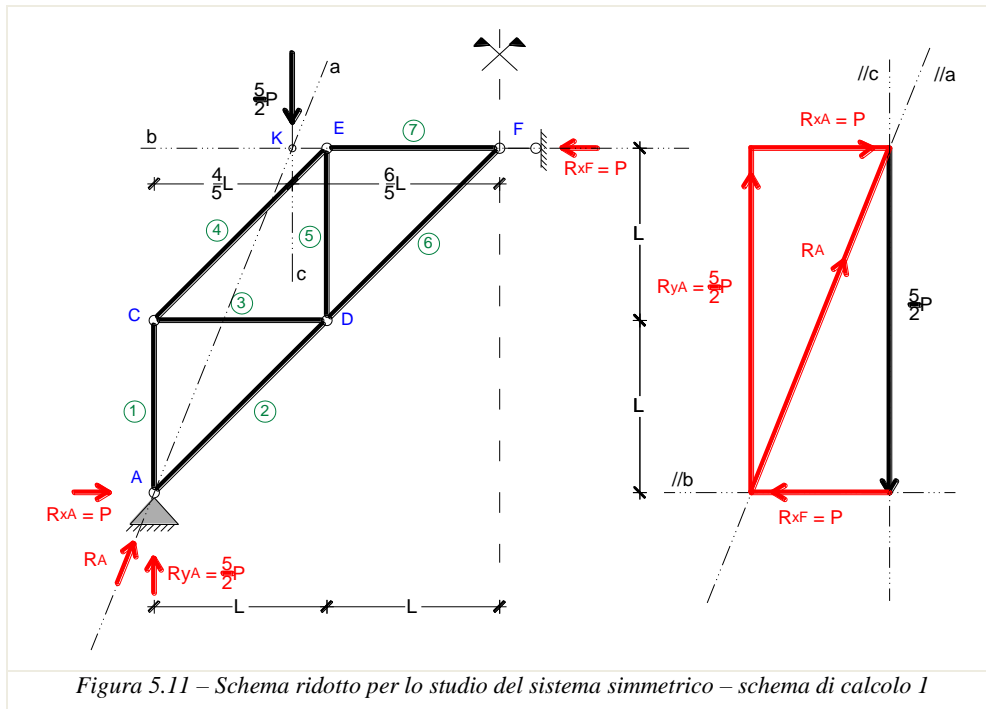
Dal momento che il sistema articolato in esame risulta simmetrico rispetto ad un asse e carico simmetricamente, le condizioni di equilibrio del sistema stesso impongono che anche le reazioni vincolari esterne devono essere simmetriche rispetto al medesimo asse.



L'analisi (statica e cinematica) di un sistema simmetrico e caricato simmetricamente può essere effettuata studiando un sistema ridotto costituito da una sola delle due parti simmetriche della struttura; in corrispondenza dell'asse di simmetria si inserisce un opportuno vincolo esterno che non produce alcuna reazione parallela all'asse di simmetria. In questo caso nello schema ridotto (costituito dal solo tratto I) occorre introdurre, in corrispondenza dell'asse di simmetria, un pendolo ad asse orizzontale.



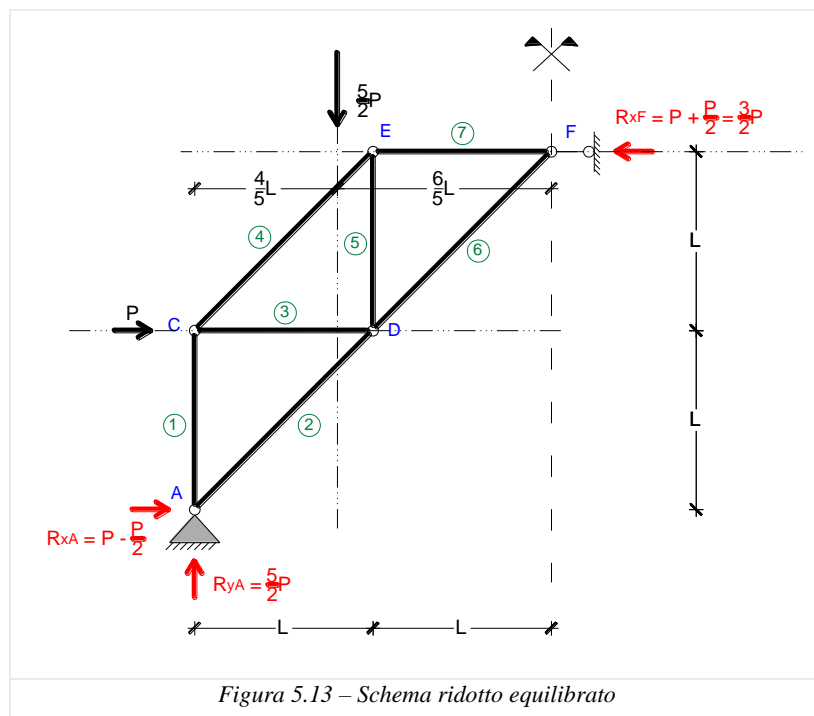
La condizione di carico complessiva è quella già individuata componendo vettorialmente i carichi verticali agenti su metà travatura. Si studiano due schemi di calcolo separatamente. Nel primo si considera agente il solo carico verticale, nel secondo il solo carico orizzontale.





Per quanto riguarda lo schema 1, in accordo alla condizione di equilibrio di tre forze, la retta d'azione  $a$  della reazione della cerniera A deve passare per il punto K, intersezione delle rette  $c$  e  $b$ , rispettivamente retta d'azione del carico esterno e della reazione del pendolo F. Il triangolo delle forze  $R_A$ ,  $R_{xF}$  e  $\frac{5}{2}P$  deve essere chiuso con i versi delle forze che devono rincorrersi in forma ciclica secondo il verso fissato dal carico  $\frac{5}{2}P$ . Per quanto riguarda lo schema 2, banalmente si utilizzano le basi teoriche del principio della leva.

Sovrapponendo gli effetti:



Le componenti di reazione della cerniera B e della cerniera interna F nel tratto II saranno, per la simmetria, perfettamente speculari a quelle determinate per la cerniera A e per la cerniera interna F nel tratto I.

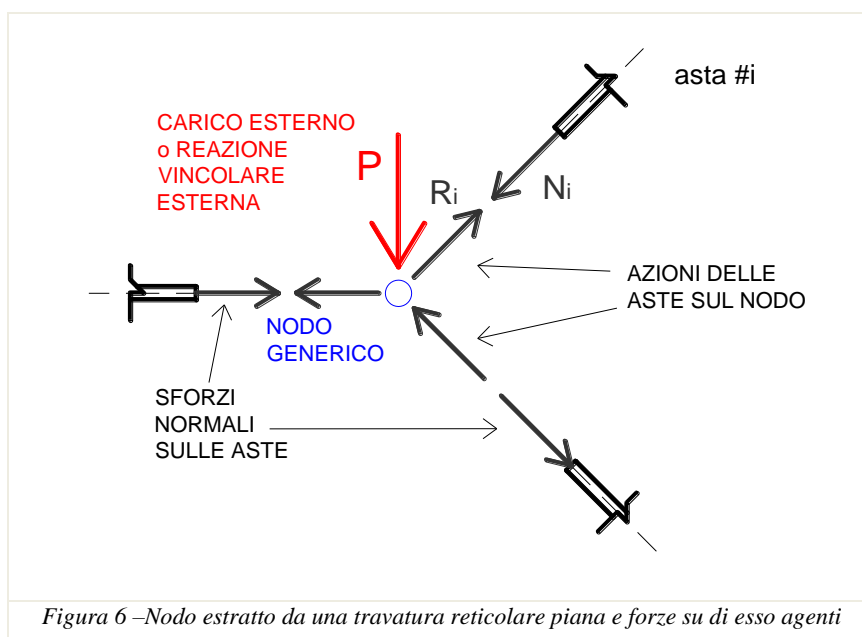
È facile verificare che i valori delle reazioni vincolari determinati sfruttando la simmetria del problema coincidono con quelli valutati sopra considerando il sistema articolato nella sua interezza.

### 3. Calcolo degli sforzi normali

#### Metodo dell'equilibrio ai nodi

Tale metodo si basa sulla considerazione che una struttura reticolare isostatica, soggetta per ipotesi a forze applicate ai nodi (siano esse carichi esterni o componenti di reazioni vincolari esterne), è in equilibrio se è in equilibrio ogni suo nodo.

Con riferimento alla Figura 6 può osservarsi quanto segue. Ogni nodo, supposto estratto dalla struttura, è soggetto a forze esterne (carichi o reazioni vincolari esterne) e ad azioni provenienti dalle aste che in esso concorrono. Le *forze esterne* sono *note in intensità, direzione e verso*. Le *azioni* delle aste sono *note solo in direzione* (quella dell'asse dell'asta) essendo incogniti intensità e verso. L'intensità e il verso delle azioni delle aste sul nodo (e di conseguenza degli sforzi normali sulle aste) possono valutarsi applicando la condizione di equilibrio al nodo che, nel piano, si traduce nelle due condizioni di equilibrio alla traslazione orizzontale e verticale.



La *condizione di equilibrio* al nodo può essere imposta ovviamente sia con *procedimento grafico*, richiedendo la chiusura del poligono delle forze agenti sul nodo, che con *procedimento analitico* e ciò attraverso la scrittura di due equazioni di equilibrio alla traslazione. È evidente quindi che le azioni incognite valutabili non possono essere più di due. Un nodo nel quale tale circostanza è verificata è detto “nodo canonico”. Una struttura reticolare è “a nodi canonici” se, rimossi (o risolti) i nodi canonici e le aste che vi concorrono, i nodi rimanenti sono ancora canonici. Una travatura a nodi canonici può essere completamente risolta applicando il metodo in esame in modo sequenziale, considerando cioè di volta in volta l’equilibrio di un nodo canonico.

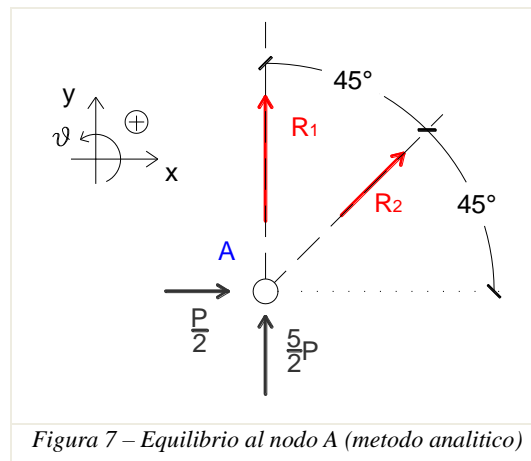
È opportuno osservare infine che, una volta individuata l’azione di un’asta su un nodo, resta individuata anche l’azione della stessa asta sull’altro nodo di estremità, azione che deve essere uguale in modulo (e direzione) e di verso opposto!

Con riferimento alla travatura in esame un nodo canonico da cui poter iniziare la procedura risolutiva è ad esempio il nodo A (o alternativamente il nodo B), in quanto su di esso le azioni incognite sono soltanto due, ovvero le azioni delle aste 1 e 2 che vi concorrono. Come già osservato, nell’imporre le condizioni di equilibrio al nodo occorre considerare non gli sforzi normali  $N_i$  sulle aste bensì le azioni  $R_i$  trasmesse dalle

aste al nodo che, per il Principio di Azione e Reazione, avranno uguale modulo e direzione di  $N_i$  ma verso opposto (Figura 6).

Sul nodo A (cerniera esterna) agiscono le due componenti di reazione vincolare precedentemente valutate,

$R_{xA} = \frac{P}{2}$  e  $R_{yA} = \frac{5}{2}P$ , e le forze (azioni) che le aste 1 e 2 trasmettono sul nodo, denotate con  $R_1$  ed  $R_2$ , entrambe incognite da determinare (Figura 7).



Per convenzione si ipotizza che le azioni  $R_1$  ed  $R_2$  abbiano verso uscente dal nodo, circostanza che equivale a considerare le aste in trazione (nel seguito tale convenzione verrà assunta per ogni nodo anche quando non esplicitamente detto).

I valori delle azioni  $R_1$  ed  $R_2$  si possono determinare scrivendo le (due) equazioni cardinali della statica relativamente ai due gradi di libertà (traslazioni nelle direzioni  $x$  ed  $y$ ) del nodo.

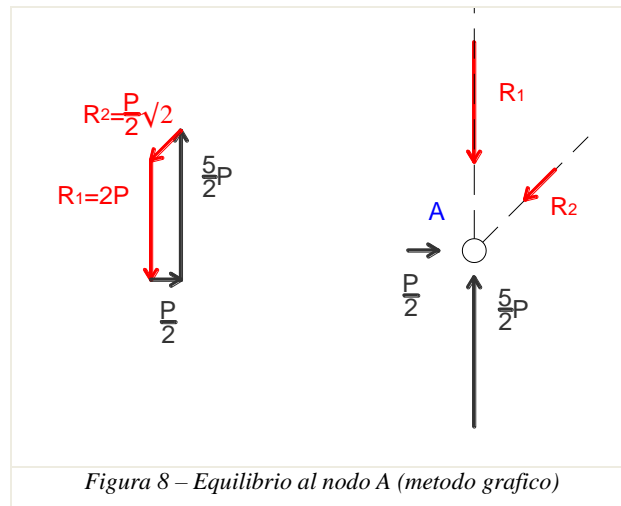
Con riferimento allo schema di Figura 7 può scriversi:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \frac{P}{2} + R_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{R_2 = -\frac{P}{\sqrt{2}} = -P \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

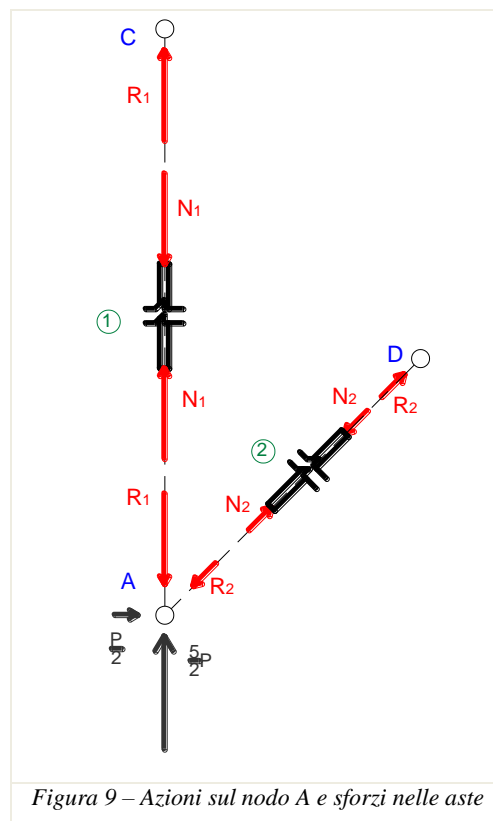
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \frac{5}{2}P + R_1 + R_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow \frac{5}{2}P + R_1 - P \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boxed{R_1 = -2P}$$

Le aste 1 e 2 sono in compressione (puntone) dal momento che i valori valore analitici di  $R_1$  ed  $R_2$  sono negativi e quindi i verso corretti sono opposti a quello ipotizzati in Figura 7.

Il metodo dell'equilibrio ai nodi può, ovviamente e spesso in modo più speditivo, applicarsi per via grafica. La condizione di equilibrio al nodo si traduce graficamente nella condizione di chiusura del poligono delle forze così come riportato nello schema seguente. La costruzione, a scala fissata, di tale poligono fornisce in direzione e verso i valori delle azioni incognite agenti sul nodo.

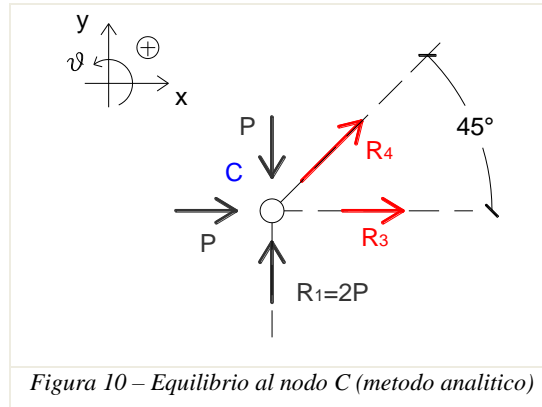


Un'efficace visualizzazione delle azioni ( $R_i$ ) trasmesse dalle aste al nodo A e delle azioni (sforzi  $N_i$ ) trasmesse dal nodo alle aste in esso concorrenti è riportata nella Figura seguente.



Dall'esame della Figura 9 si comprende come, una volta risolto il nodo A, si conoscono di conseguenza le azioni dell'asta 1 sul nodo C e dell'asta 2 sul nodo D. Quest'ultimo, tuttavia, non è ancora "diventato" un nodo canonico in quanto risultano incognite le azioni delle aste 3, 5 e 6 su esso concorrenti.

Il nodo C invece, noto il valore di  $R_1$ , è canonico, poiché risultano incognite solo le azioni  $R_3$  ed  $R_4$ , che possono essere univocamente determinate attraverso due equazioni di equilibrio, scritte qui di seguito con riferimento allo schema di Figura 10:

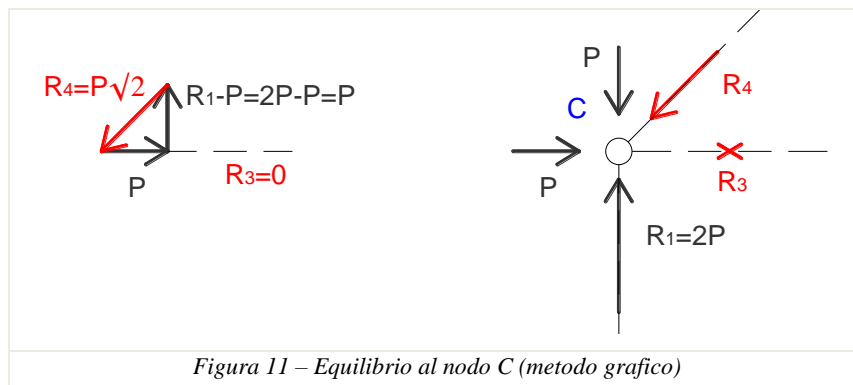


$$\sum F_x = 0 \Rightarrow P + R_3 + R_4 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow P + R_3 - P\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boxed{R_3 = 0}$$

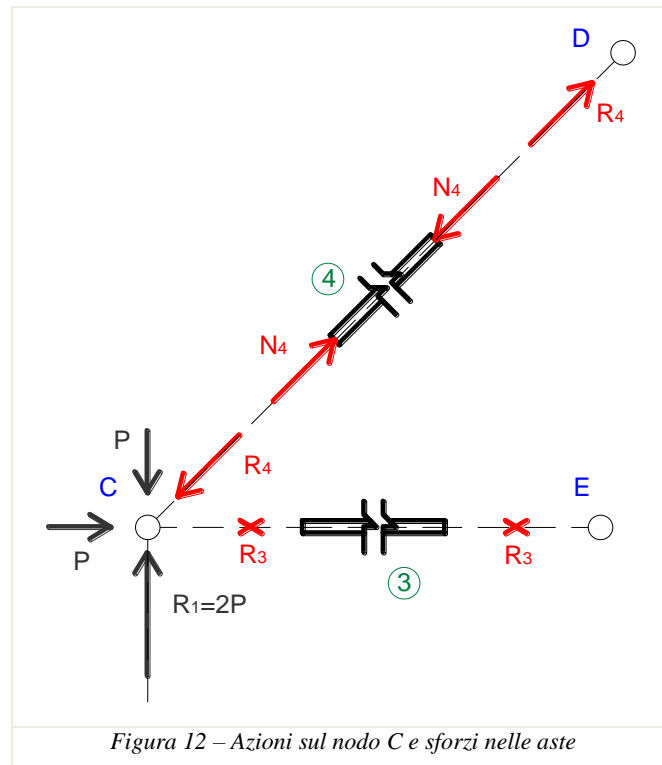
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 2P - P + R_4 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{R_4 = -P \frac{2}{\sqrt{2}} = -P\sqrt{2}}$$

Essendo il valore analitico di  $R_4$  negativo, il verso corretto è opposto a quello ipotizzato e l'asta 4 è in compressione (puntone), l'asta 3 risulta scarica.

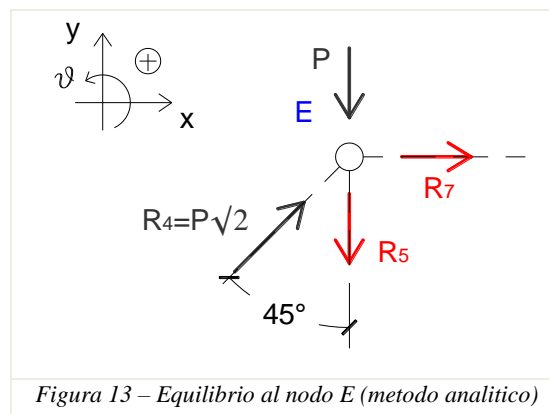
Con metodo grafico risulta:



e, analogamente a quanto fatto in precedenza, si ha:



Risolto il nodo C, si conoscono le azioni dell'asta 4 sul nodo D e dell'asta 3 sul nodo E (nulla nel caso esaminato). Entrambi i nodi D ed E sono “diventati” canonici, in quanto per ogni nodo risultano incognite solo due azioni, rispettivamente,  $R_5$  ed  $R_6$  per il nodo D,  $R_5$  ed  $R_7$  per il nodo E. La scelta di uno tra i due è indifferente, nel seguito si considera dapprima il nodo E:

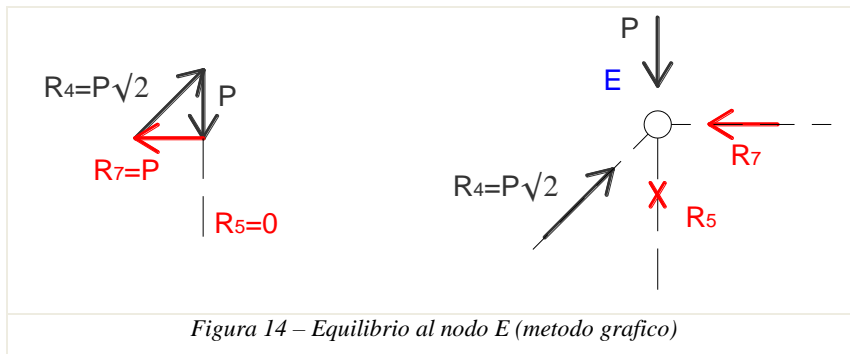


$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_7 + P\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{R_7 = -P}$$

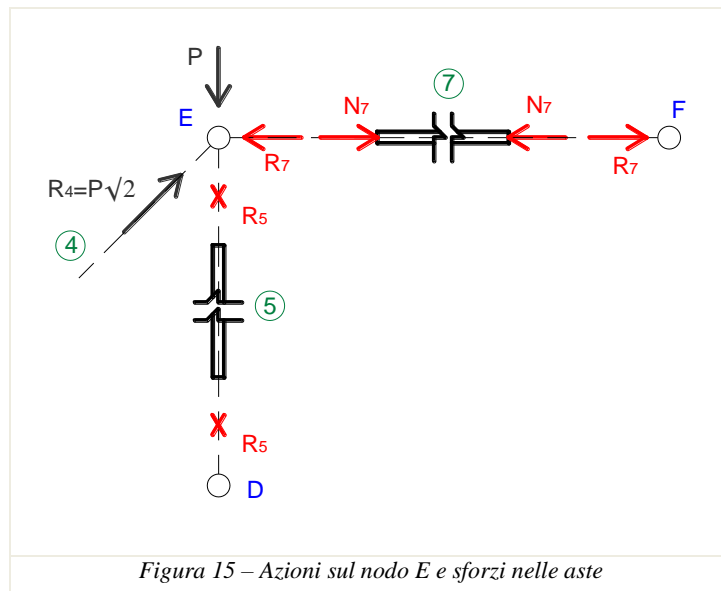
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -P - R_5 + P\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{R_5 = 0}$$

Essendo il valore analitico di  $R_7$  negativo, il verso corretto è opposto a quello ipotizzato e l'asta 7 è in compressione (puntone), l'asta 5 risulta scarica.

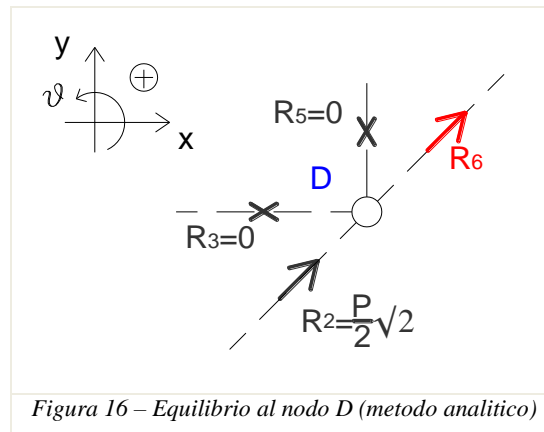
Con il metodo grafico risulta:



E, in definitiva:



Risolto il nodo E, si conoscono le azioni dell'asta 5 sul nodo D (nulla nel caso esaminato) e dell'asta 7 sul nodo F; pertanto per il nodo D l'unica incognita da determinare risulta ora l'azione trasmessa dall'asta 6 ( $R_6$ ):

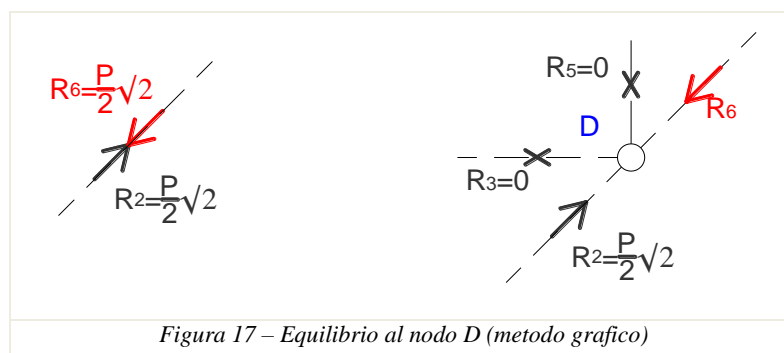


In presenza di una sola incognita è sufficiente scrivere una sola condizione di equilibrio, ad esempio quella in direzione x, si ha:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \frac{P}{2}\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + R_6\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{R_6 = -\frac{P}{2}\sqrt{2}}$$

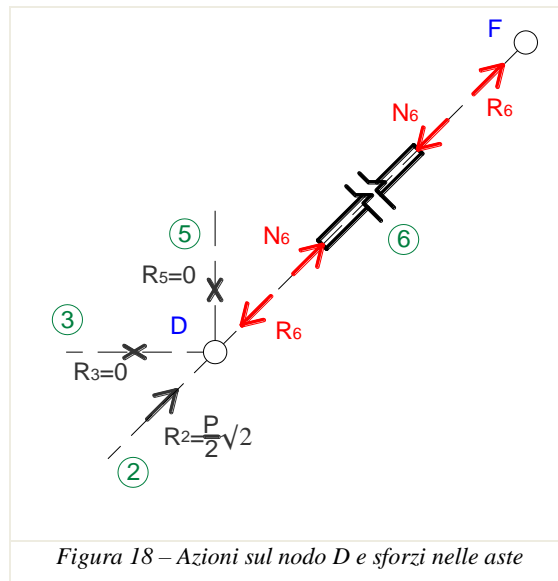
Essendo il valore analitico di  $R_6$  negativo, il verso corretto è opposto a quello ipotizzato e l'asta 6 è in compressione (puntone).

Con il metodo grafico risulta:

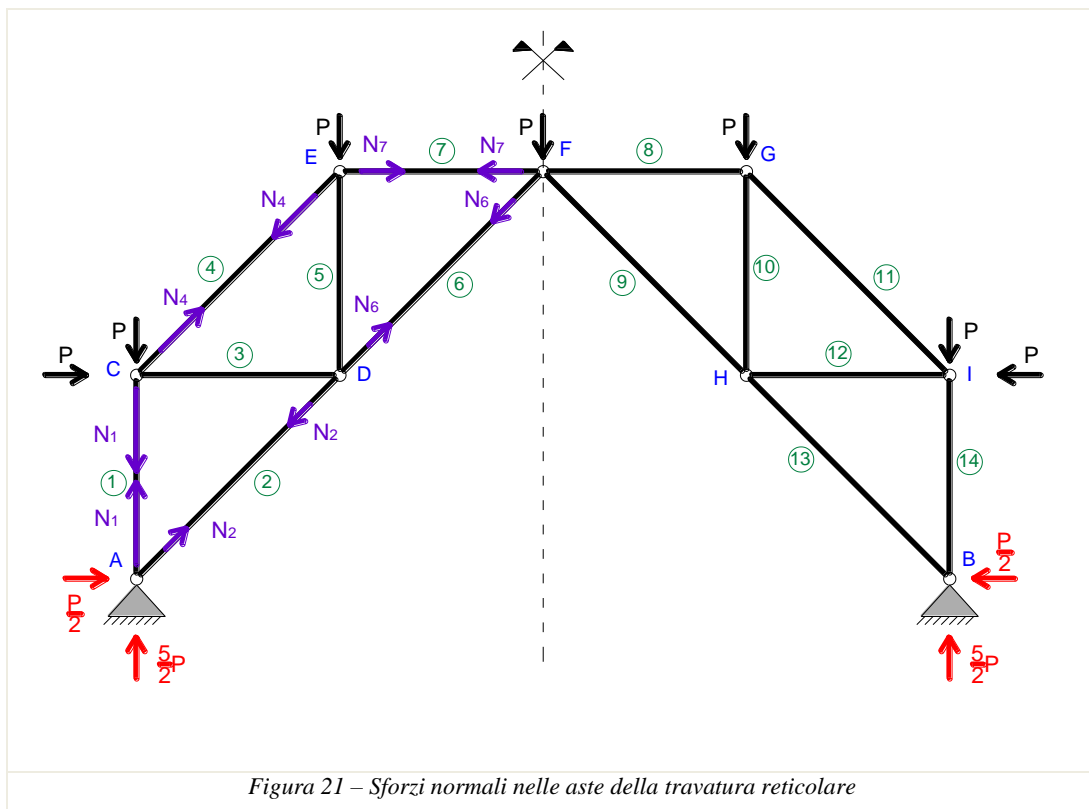


E, in definitiva si ha:





In definitiva gli sforzi normali nelle aste della travatura esaminata risultano:



I valori numerici degli sforzi sulle aste sono invece riportati nella Tabella che segue:

Asta	Sforzo normale	Comportamento
1	$N_1 = -2P$	TIRANTE
2	$N_2 = -\frac{P}{2}\sqrt{2}$	PUNTONE
3	$N_3 = 0$	/
4	$N_4 = -P\sqrt{2}$	PUNTONE
5	$N_5 = 0$	/
6	$N_6 = -\frac{P}{2}\sqrt{2}$	PUNTONE
7	$N_7 = -P$	PUNTONE

Da quanto sin qui sviluppato è evidente che il metodo dell'equilibrio ai nodi risulta facilmente applicabile a strutture con un limitato numero di nodi (come quella in esame ad esempio). Nella maggioranza dei casi pratici però la determinazione degli sforzi nelle aste può diventare eccessivamente onerosa richiedendo la soluzione di molti nodi.

Nell'analisi di questi sistemi strutturali inoltre è spesso sufficiente conoscere lo sforzo solo in alcune aste. Per travature a sostegno di grandi coperture ad esempio può essere importante conoscere, anche in una prima fase di dimensionamento di massima, solo l'entità degli sforzi nelle aste più sollecitate, tipicamente situate in prossimità della mezzeria della travatura (e quindi "lontane" dai nodi canonici dai quali ha inizio la procedura sequenziale di soluzione prima vista).

Di seguito si illustrano due metodi classici per la determinazione degli sforzi in alcune aste senza dovere necessariamente risolvere l'intero sistema (o gran parte di esso); essi sono: il "metodo delle sezioni di Ritter" e il "metodo diretto", quest'ultimo basato sull'applicazione del principio dei lavori virtuali ad una opportuna catena cinematica reticolare definita a partire dal sistema in esame eliminando l'asta nella quale si vuole determinare lo sforzo.

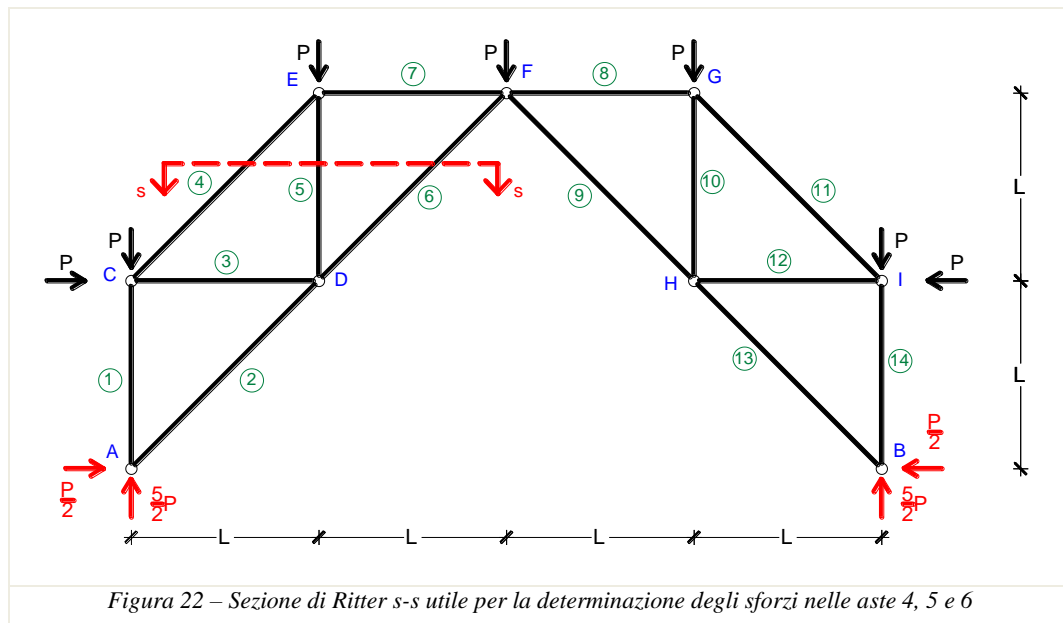
### **Metodo delle sezioni di Ritter**

Questo metodo prevede di suddividere la travatura reticolare piana in *due parti distinte* mediante un'opportuna sezione, detta appunto *sezione di Ritter*. La sezione di Ritter dovrà interessare oltre *l'asta di cui si vuole determinare lo sforzo altre due aste*. Le tre aste sezionate dovranno inoltre essere *a due a due concorrenti* nello stesso punto (tipicamente un nodo se le rette d'azione si incontrano al finito, un punto all'infinito nella direzione degli assi delle aste per coppie di aste parallele tra loro).

Operata la sezione di Ritter, sui monconi delle tre aste tagliate si introducono gli sforzi normali incogniti, e ciò nell'ipotesi che le aste siano tiranti e quindi con versi uscenti dalle sezioni di taglio. Imponendo la condizione di equilibrio alla rotazione di una delle due parti in cui è stata divisa la travatura

rispetto al punto d'intersezione degli assi di due delle tre aste interessate dalla sezione di Ritter si ottiene lo sforzo normale nella terza asta.

Con riferimento alla sezione di Ritter s-s indicata nella Figura 22 e atta alla determinazione dello sforzo nell'asta 4 ad esempio; l'equilibrio alla rotazione di una delle due parti di travatura (già risolta per vincoli esterni) andrà imposto attorno al punto (nodo) D, intersezione delle aste 5 e 6. Tale punto B è detto *polo di Ritter dell'asta 4*.



Per quanto sin qui osservato la sezione di Ritter s-s indicata in Figura 22 è utile anche per determinare gli sforzi nelle aste 5 e 6. Si consideri la parte sinistra della struttura già risolta per vincoli esterni (si può ovviamente considerare anche quella di destra) e si applichino sulle aste tagliate gli sforzi (positivi, di trazione)  $N_4$ ,  $N_5$  ed  $N_6$ , ottenendo così lo schema di Figura 23.

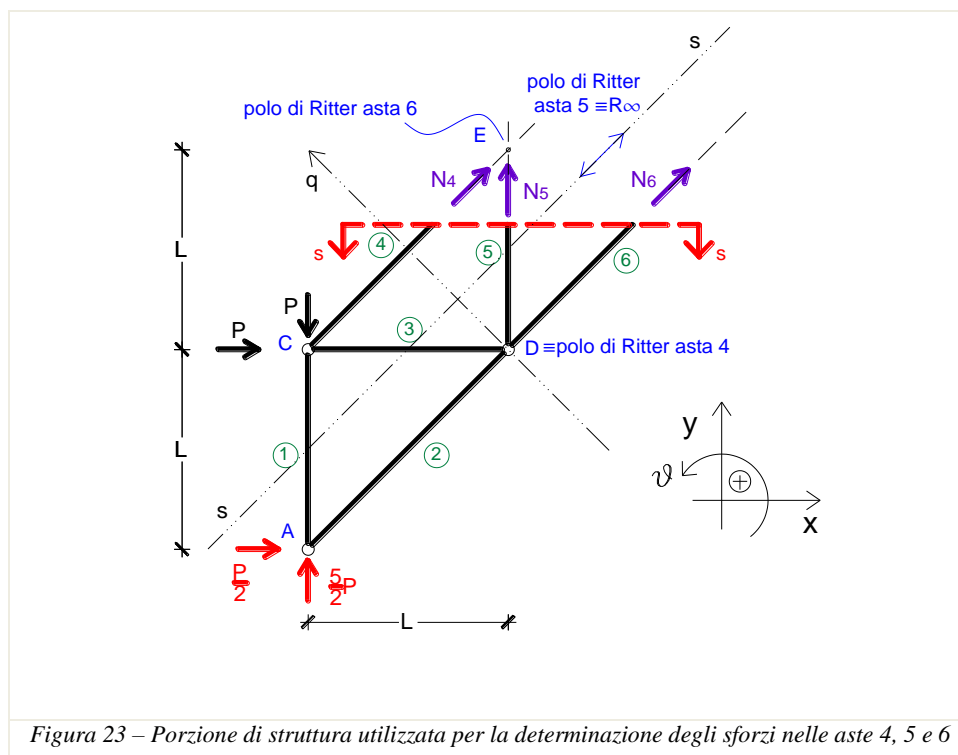


Figura 23 – Porzione di struttura utilizzata per la determinazione degli sforzi nelle aste 4, 5 e 6

Con riferimento alla Figura 23 è facile constatare che: l'asta 4 ha come polo di Ritter il nodo D in cui si incontrano le linee d'asse delle aste 5 e 6; l'asta 4 avrà come polo di Ritter il nodo D intersezione degli assi delle aste 5 e 6; l'asta 5, infine, avrà come polo di Ritter il punto all'infinito della direzione s, intersezione delle rette d'asse delle aste 4 e 6.

La condizione di equilibrio alla rotazione attorno a D fornisce lo sforzo  $N_4$  sull'asta 4; si ha:

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow \frac{P}{2}L - \frac{5}{2}PL + PL - N_4 \frac{L}{2}\sqrt{2} = 0 \Rightarrow N_4 = -P \frac{2}{\sqrt{2}} = -P\sqrt{2}$$

Il valore analitico determinato è negativo e quindi il verso ipotizzato è opposto a quello effettivo; quindi l'asta 4 è un puntone (compressivo).

È opportuno a questo punto osservare che, come appare dall'equazione di equilibrio prima scritta e contenente il solo sforzo incognito  $N_4$ , l'imposizione della condizione di equilibrio alla rotazione della porzione di struttura scelta intorno a D, polo di Ritter dell'asta 4, fa sì che i contributi degli altri due sforzi incogniti,  $N_5$  ed  $N_6$  anch'essi agenti sulla porzione di struttura considerata, siano nulli. Sono nulli infatti i bracci di tali forze rispetto a D, punto d'incontro delle loro rette d'azione (linee d'asse delle aste 5 e 6 appunto). È questa la strategia risolutiva che rende molto efficace ed immediato il metodo esposto.

La condizione di equilibrio alla rotazione attorno al polo di Ritter dell'asta 5 si traduce, ovviamente, in una condizione di equilibrio alla traslazione in direzione q (ortogonale ad s) che permette la determinazione dello sforzo  $N_5$ ; fissato un orientamento positivo per l'asse q (Figura 23) si ha:

$$\sum F_q = 0 \Rightarrow -P \frac{\sqrt{2}}{2} - P \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{P}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{5}{2} P \frac{\sqrt{2}}{2} + N_5 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{N_5 = 0}$$

L'asta 5 risulta scarica.

La condizione di equilibrio alla rotazione attorno ad E fornisce infine lo sforzo  $N_6$ ; si ha:

$$\sum M_E = 0 \Rightarrow \frac{P}{2} 2L - \frac{5}{2} PL + PL + PL + N_6 \frac{L}{2} \sqrt{2} = 0 \Rightarrow \boxed{N_6 = -\frac{P}{2} \sqrt{2}}$$

Il valore analitico determinato è negativo e quindi il verso ipotizzato è opposto a quello effettivo; quindi l'asta 6 è un puntone (compresso).

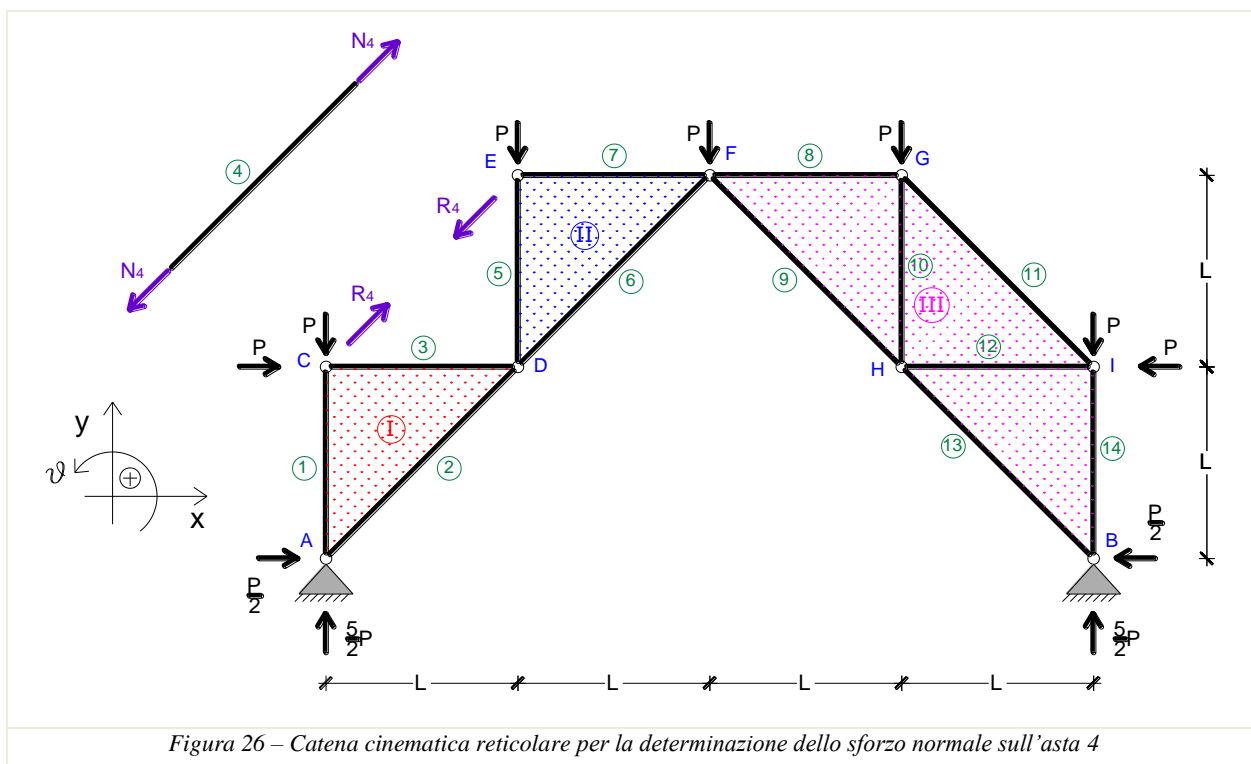
### Metodo diretto

Lo sforzo normale in un'asta della travatura reticolare piana può essere valutato considerando la condizione di equilibrio del *cinematismo* ottenuto sopprimendo l'asta in esame (asta *i-esima* ad esempio) ed introducendo le azioni incognite ( $R_i$ ) che tale asta trasmette ai nodi che le competono. I versi di tali azioni possono essere scelti arbitrariamente; nel seguito si adotterà la convenzione di ipotizzare lo sforzo normale nell'asta soppressa positivo (di trazione) e pertanto le azioni  $R_i$  saranno assunte con verso uscente dai nodi cui l'asta era collegata.

Applicando tale metodo ad una travatura reticolare piana isostatica, già risolta per vincoli esterni, la soppressione di un'asta darà luogo ad un *cinematismo con un solo grado di libertà* e cioè, in questo contesto, ad una *catena cinematica reticolare*. La condizione di equilibrio di tale catena cinematica reticolare si tradurrà in un'unica equazione avente per incognita l'azione dell'asta soppressa la cui soluzione fornirà, in intensità e verso, tale azione e di conseguenza lo sforzo normale cercato. È opportuno osservare inoltre che la soppressione di un'asta di contorno genera tipicamente un sistema costituito da due porzioni (indeformabili) di struttura mutuamente collegate da una cerniera. L'imposizione della *condizione di equilibrio parziale* di una delle due porzioni rispetto all'altra (equilibrio alla rotazione relativa) fornisce in modo immediato (senza cioè ricorrere allo studio della catena cinematica reticolare) lo sforzo normale cercato.

### *SFORZO NORMALE NELL'ASTA 4*

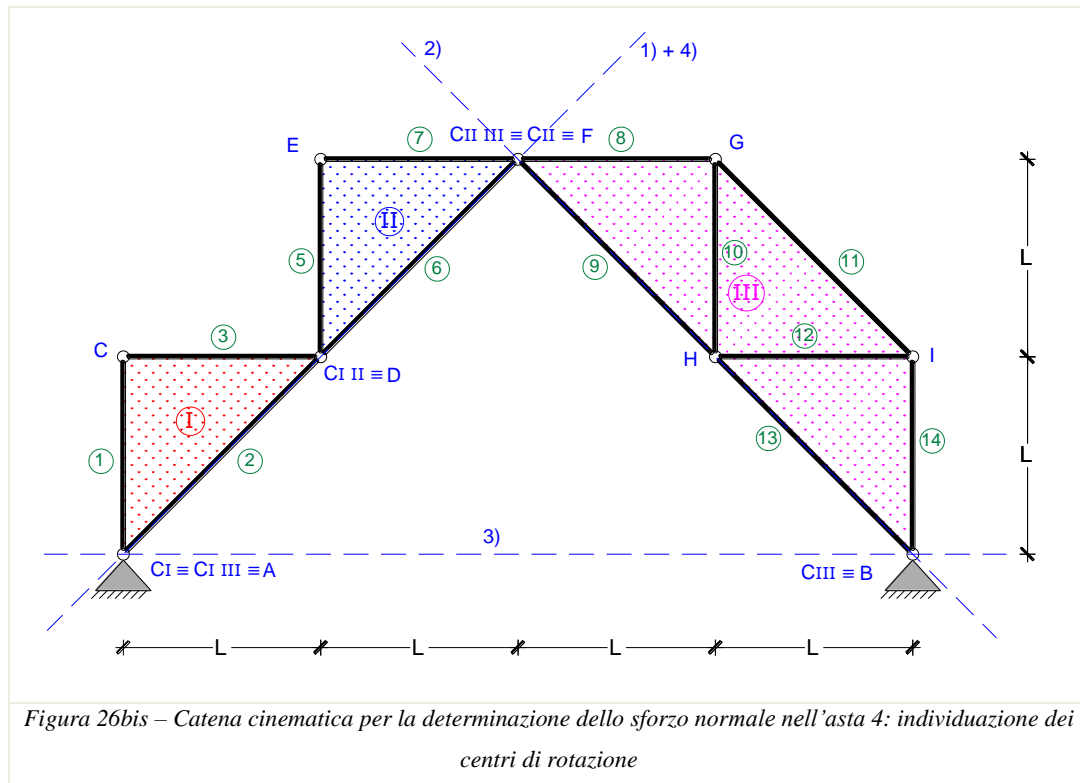
Con riferimento alla travatura in esame si consideri la catena cinematica reticolare riportata in Figura 26 ed atta, per quanto detto, all'individuazione dello sforzo normale nell'asta 4. Tale catena cinematica infatti è stata ottenuta eliminando l'asta 4 dalla travatura e introducendo sui nodi C ed E che ad essa competono le azioni  $R_4$  (per ipotesi positive e quindi con versi uscenti dai nodi) che l'asta esercita su di essi.



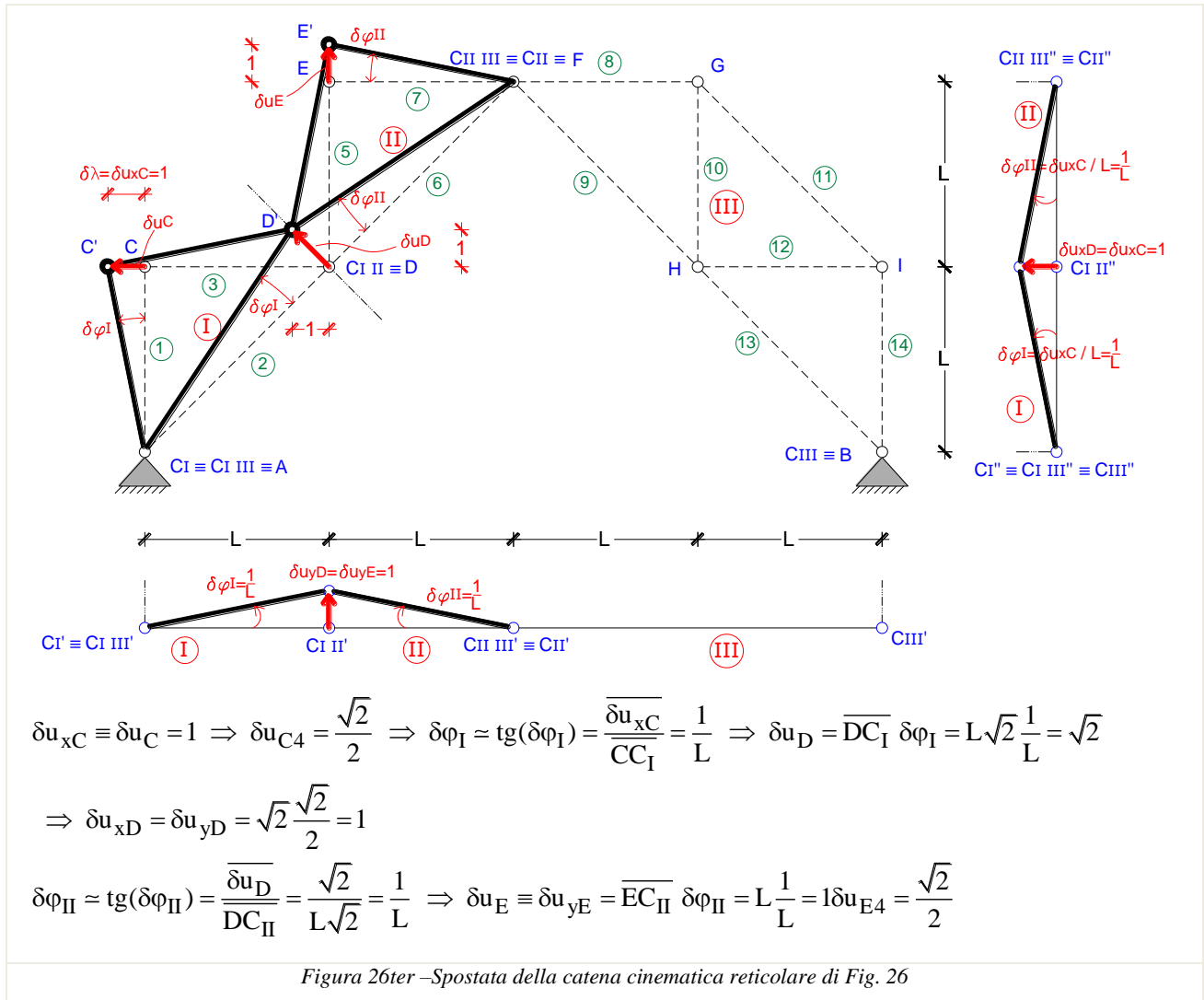
La condizione di equilibrio della catena cinematica reticolare ottenuta può esprimersi attraverso il principio dei lavori virtuali (P.L.V.) considerando a tal fine la classe delle configurazioni spostate individuate da *un unico parametro lagrangiano*  $\delta\lambda$ , uno è infatti il grado di labilità del sistema. Come appare dallo schema di Figura 26, il *sistema* (labile) in esame risulta *costituito da tre corpi rigidi* indicati in Figura con I (maglia ACD), II (maglia DEF) e III (maglia FBIG); i corpi rigidi I e II sono collegati mutuamente nel nodo D, mentre i corpi rigidi II e III nel nodo F.

La configurazione variata (o spostata) della catena cinematica può allora essere individuata in questo caso considerando le condizioni dettate dai teoremi delle catene cinematiche: 1) i centri assoluti di rotazione dei corpi I e II, siano essi  $C_I$  e  $C_{II}$ , devono essere allineati con il centro relativo  $C_{I II}$ ; 2) i centri assoluti di rotazione dei corpi II e III, siano essi  $C_{II}$  e  $C_{III}$ , devono essere allineati con il centro relativo  $C_{II III}$ ; 3) i centri assoluti di rotazione dei corpi I e III, siano essi  $C_I$  e  $C_{III}$ , devono essere allineati con il centro relativo  $C_{I III}$ ; 4) i centri relativi dei tre corpi, siano essi  $C_{I II}$ ,  $C_{II III}$  e  $C_{I III}$ , devono essere allineati.

In particolare: il centro assoluto  $C_I$  coincide con l'occhio della cerniera A; il centro relativo  $C_{I II}$  coincide con la cerniera D; il centro  $C_{III}$  coincide con l'occhio della cerniera B; il centro relativo  $C_{II III}$  coincide con la cerniera F (Figura 26bis). Dall'applicazione simultanea delle condizioni 1) e 2) può individuarsi la posizione di  $C_{II}$ , che coincide con la cerniera F; dall'applicazione simultanea delle condizioni 3) e 4) può individuarsi la posizione di  $C_{I III}$  che coincide con l'occhio della cerniera A.



Una possibile spostata della catena cinematica in esame è individuabile assegnando uno spostamento orizzontale del punto C (ciò equivale a scegliere come parametro lagrangiano  $\delta\lambda$  lo spostamento  $\delta u_{xC}$ ). In Figura 26ter si riporta la spostata ottenuta per  $\delta\lambda = \delta u_{xC} = 1$  (il valore unitario è scelto per comodità di conto). La spostata è individuata sia sulla struttura, dove sono evidenziati gli spostamenti assoluti, sia in termini di proiezioni così da rendere più agevole la valutazione delle componenti di spostamento dei punti (nodi) ove sono applicati i carichi.



L'equazione dei lavori virtuali ( $\delta L = 0 \quad \forall \delta \lambda$ ) nell'unica incognita  $R_4$  si scrive sommando il lavoro compiuto dalle forze i cui punti di applicazione subiscono uno spostamento nella direzione delle forze stesse. Ciascun contributo, ovviamente, è assunto positivo quando forza e spostamento sono concordi, negativo in caso contrario. Con riferimento alla Fig. 26, ove sono indicati i carichi agenti, e alla Fig. 26ter, ove sono riportate le corrispondenti componenti di spostamento, può scriversi:

$$\delta L|_{\delta \lambda=1} = -P \cdot \delta u_{xC} - R_4 \cdot \delta u_{C4} - R_4 \cdot \delta u_{E4} - P \cdot \delta u_{yE} = -P \cdot 1 - R_4 \frac{\sqrt{2}}{2} - R_4 \frac{\sqrt{2}}{2} - P \cdot 1$$

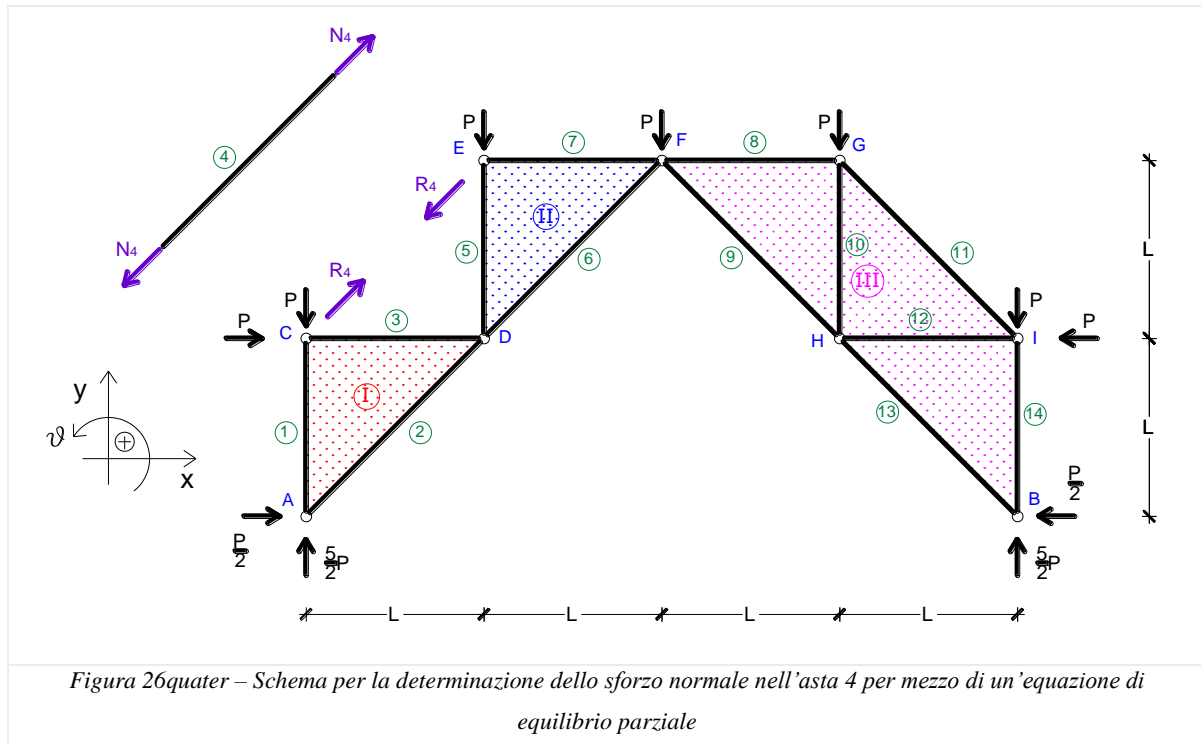
Si noti che essendo  $\delta u_C$  ed il carico  $P$  (applicato in  $C$ ) mutuamente ortogonali il contributo al lavoro è identicamente nullo; ponendo, per il P.L.V.,  $\delta L = 0$  si ha:

$$-P \cdot 1 - R_4 \frac{\sqrt{2}}{2} - R_4 \frac{\sqrt{2}}{2} - P \cdot 1 = 0 \Rightarrow \boxed{R_4 = -P\sqrt{2}}$$

Il valore analitico determinato per  $R_4$  è negativo, il verso ipotizzato è opposto a quello effettivo, e quindi l'asta 4 è in compressione (puntone).



In modo alternativo, essendo l'asta in esame un'asta *di contorno*, la determinazione dello sforzo normale su di essa agente può effettuarsi imponendo una condizione di equilibrio parziale di una delle porzioni (indeformabili) di struttura rispetto all'altra.



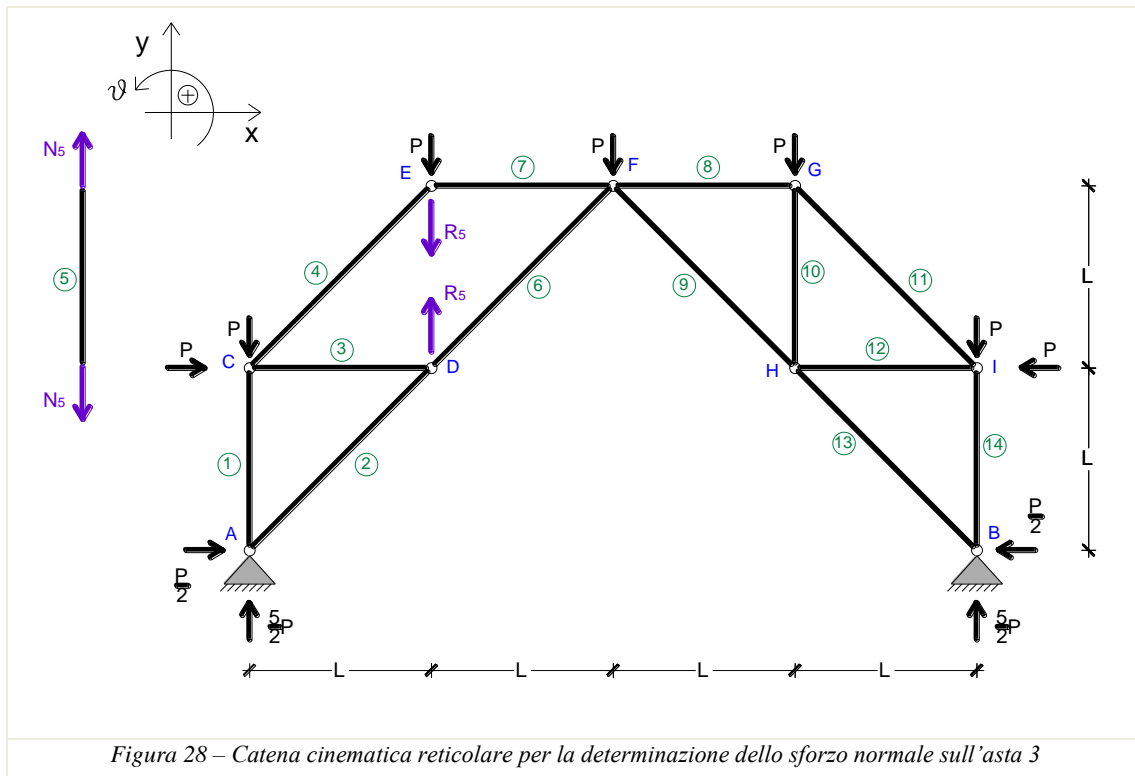
Con riferimento alla Fig. 26quater la condizione di equilibrio parziale è una condizione di equilibrio alla rotazione relativa intorno alla cerniera D. Imponendo ad esempio l'equilibrio alla rotazione della porzione I rispetto al nodo D si ottiene in modo immediato (senza cioè ricorrere allo studio della catena cinematica reticolare) l'azione dell'asta soppressa  $R_4$  e quindi lo sforzo normale incognito  $N_4$  (uguale in modulo e direzione ma di verso opposto), si ha infatti:

$$\sum M_D^I = 0 \Rightarrow \frac{P}{2}L - \frac{5}{2}PL + PL - R_4 \frac{L}{2}\sqrt{2} = 0 \Rightarrow \boxed{R_4 = -P\sqrt{2}}$$

Il valore analitico determinato per  $R_4$  è negativo, il verso ipotizzato è opposto a quello effettivo, e quindi l'asta 4 è in compressione (puntone).

*SFORZO NORMALE NELL'ASTA 5*

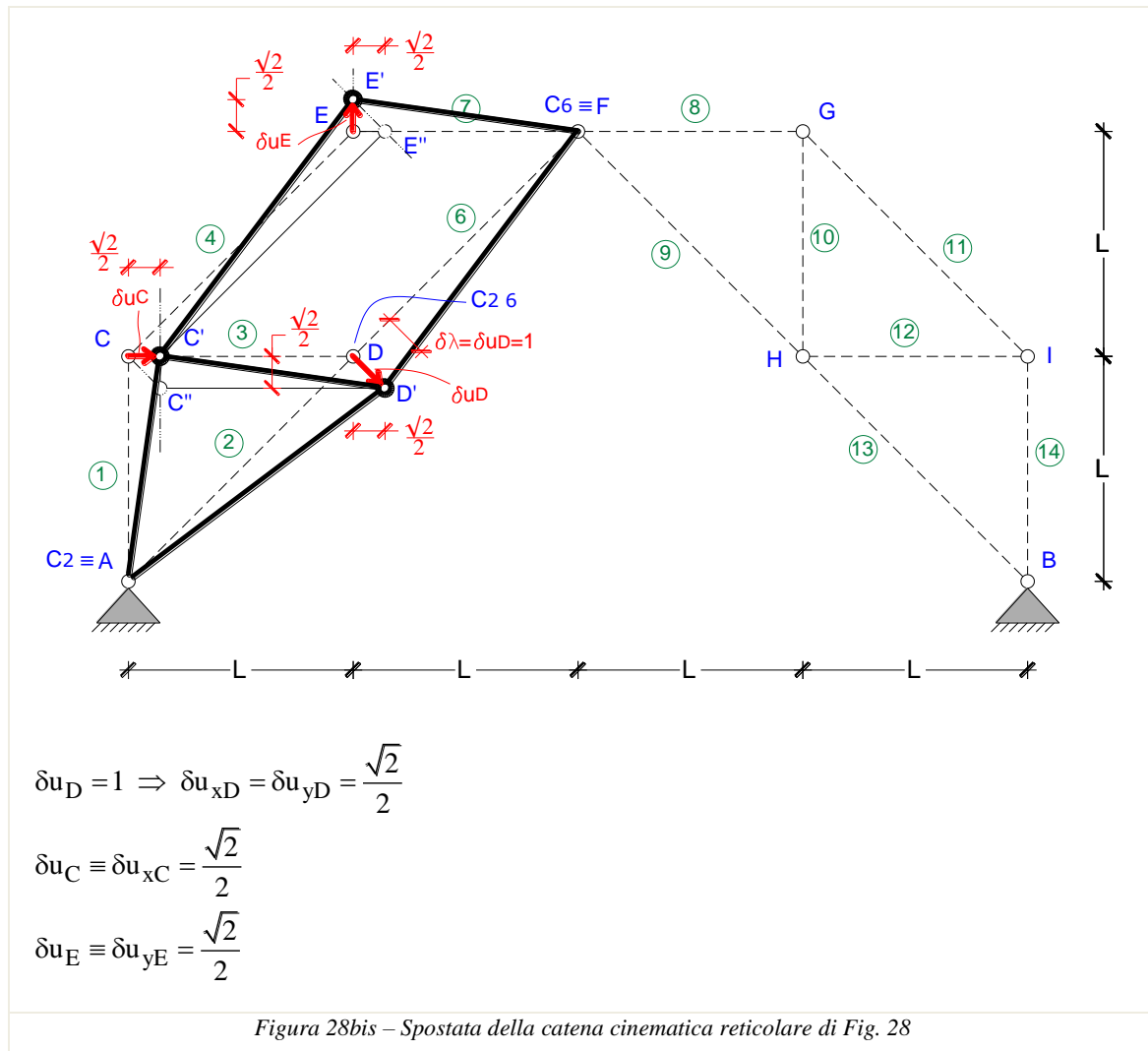
Si consideri la catena cinematica reticolare riportata in Figura 28 atta all'individuazione dello sforzo normale nell'asta 5. Tale catena cinematica è stata ottenuta eliminando l'asta 5 dalla travatura e introducendo sui nodi D ed E, che ad essa competono, le azioni  $R_5$  (positive per ipotesi) che l'asta esercita su di essi.



La condizione di equilibrio della catena cinematica reticolare ottenuta può esprimersi attraverso il principio dei lavori virtuali (P.L.V.) considerando a tal fine la classe delle configurazioni spostate individuate da *un unico parametro lagrangiano*  $\delta\lambda$ , uno è infatti il grado di labilità del sistema. Come appare dallo schema di Figura 28, e a differenza dei casi in cui l'asta rimossa è un'asta di contorno, la catena cinematica da analizzare non è costituita da due porzioni rigide mutuamente collegate da una cerniera interna; essa presenta invece un quadrilatero articolato, nel caso in esame la maglia CDFE.

L'individuazione dei centri di rotazione (assoluti e relativi) delle aste costituenti il sistema in esame, seppur possibile, risulterebbe alquanto onerosa oltre che non necessaria. La spostata di una catena cinematica reticolare può essere individuata infatti senza una completa individuazione dei centri di rotazione. A tal fine è sufficiente tenere presente che i *nodi* della travatura sono tutti *centri relativi di rotazione* per le aste che essi collegano e le *aste*, durante un qualunque cambiamento di configurazione, mantengono *invariata* la loro *lunghezza* (Si è ovviamente nell'ambito dell'ipotesi di spostamenti infinitesimi.) È sempre possibile inoltre, data l'isostaticità del sistema originario, individuare il centro assoluto di almeno un'asta.

Con riferimento alla Fig. 28bis si ha che la cerniera A è centro assoluto di rotazione dell'asta 2, sia esso  $C_2$ ; considerando quindi le aste 2 e 6, in virtù dei teoremi delle catene cinematiche ed essendo il nodo D centro relativo di rotazione per tali aste, sia esso  $C_{2\ 6}$ , è facile individuare il centro assoluto dell'asta 6,  $C_6$ . Quest'ultimo deve trovarsi infatti sulla congiungente  $C_2$ - $C_{2\ 6}$ ; esso pertanto coincide con il nodo F.



Una possibile spostata della catena cinematica in esame è allora individuabile scegliendo come parametro lagrangiano lo spostamento del nodo D, cioè assumendo  $\delta\lambda = \delta u_D = 1$  (il valore unitario è scelto per comodità). Come illustrato in Figura 28bis, tale scelta individua le spostate delle aste 2 e 6 che ruotano ciascuna attorno al proprio centro assoluto di rotazione. A questo punto, supponendo di sconnettere le aste 1 e 3 dal nodo D, si può pensare che l'asta 3 "segua" il nodo D nel suo spostamento e che, quindi, essa assuma la posizione D'C'' indicata con linea continua sottile in Figura 28bis. In realtà, poiché l'asta 3 può ruotare attorno a D' il suo estremo C può trovarsi in un qualunque punto della perpendicolare per C'' alla direzione dell'asta. L'asta 1 d'altra parte ruota attorno ad A e quindi il suo estremo C può trovarsi in un qualunque punto della perpendicolare per C al suo asse. Le due aste, 1 e 3, possono allora riconnettersi, mantenendo invariata la loro lunghezza, nel punto C', intersezione delle due anzidette perpendicolari e posizione effettiva del nodo C nella spostata generata da  $\delta\lambda = \delta u_D = 1$ . Con ragionamento del tutto analogo, supponendo di sconnettere le aste 4 e 7 dal nodo E, si può determinare la posizione E' di quest'ultimo individuando così la spostata della catena cinematica reticolare in esame. La procedura è graficizzata in Fig. 28bis dove si

evidenziano gli spostamenti assoluti dei nodi della travatura e le loro componenti nelle direzioni delle forze su di essi agenti.

L'equazione dei lavori virtuali ( $\delta L = 0 \quad \forall \delta \lambda$ ) nell'unica incognita  $R_5$  si scrive sommando il lavoro compiuto dalle forze i cui punti di applicazione subiscono uno spostamento nella direzione delle forze stesse. Ciascun contributo, ovviamente, è assunto positivo quando forza e spostamento sono concordi, negativo in caso contrario. Con riferimento alla Fig. 28, ove sono indicati i carichi agenti, e alla Fig. 28bis, ove sono riportate le corrispondenti componenti di spostamento, può scriversi:

$$\delta L|_{\delta\lambda=1} = P \cdot \delta u_{xC} - R_5 \cdot \delta u_{yD} - P \cdot \delta u_{xD} - R_5 \cdot \delta u_{yE} - P \cdot \delta u_{yE} = P \frac{\sqrt{2}}{2} - R_5 \frac{\sqrt{2}}{2} - R_5 \frac{\sqrt{2}}{2} - P \frac{\sqrt{2}}{2}$$

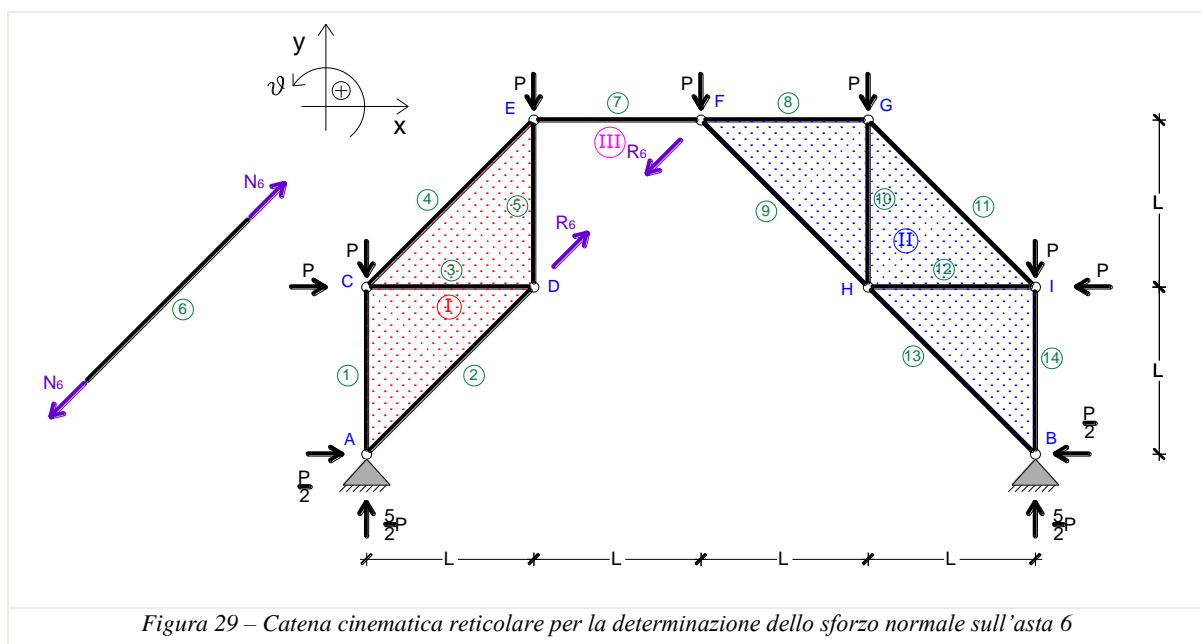
ponendo, per il P.L.V.,  $\delta L = 0$  si ha:

$$P \frac{\sqrt{2}}{2} - R_5 \frac{\sqrt{2}}{2} - R_5 \frac{\sqrt{2}}{2} - P \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{R_5 = 0}$$

L'asta 3 risulta scarica. Si noti che in questo caso, non trattandosi di un'asta di contorno, la condizione di equilibrio parziale (metodo speditivo) non si può imporre!! Non vi sono, come già osservato, due porzioni (rigide) mutuamente incernierate.

*SFORZO NORMALE NELL'ASTA 6*

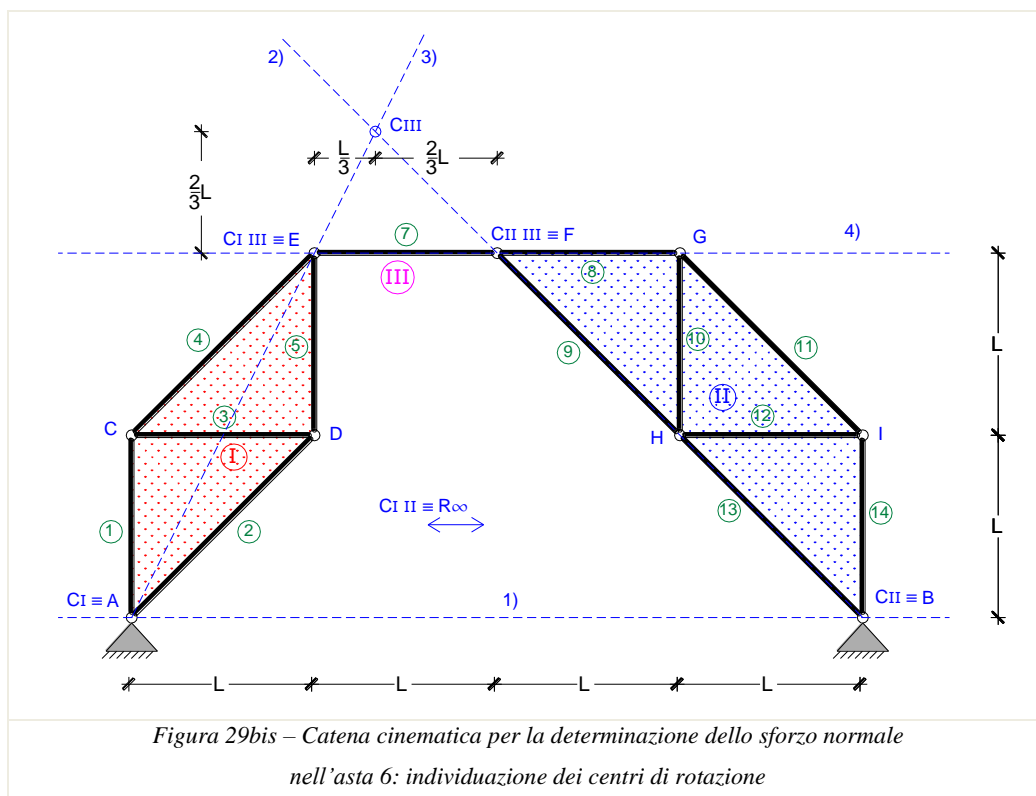
Con riferimento alla travatura in esame si consideri la catena cinematica reticolare riportata in Figura 29 ed atta, per quanto detto, all'individuazione dello sforzo normale nell'asta 6. Tale catena cinematica infatti è stata ottenuta eliminando l'asta 6 dalla travatura e introducendo sui nodi D ed F che ad essa competono le azioni  $R_6$  (per ipotesi positive e quindi con versi uscenti dai nodi) che l'asta esercita su di essi.



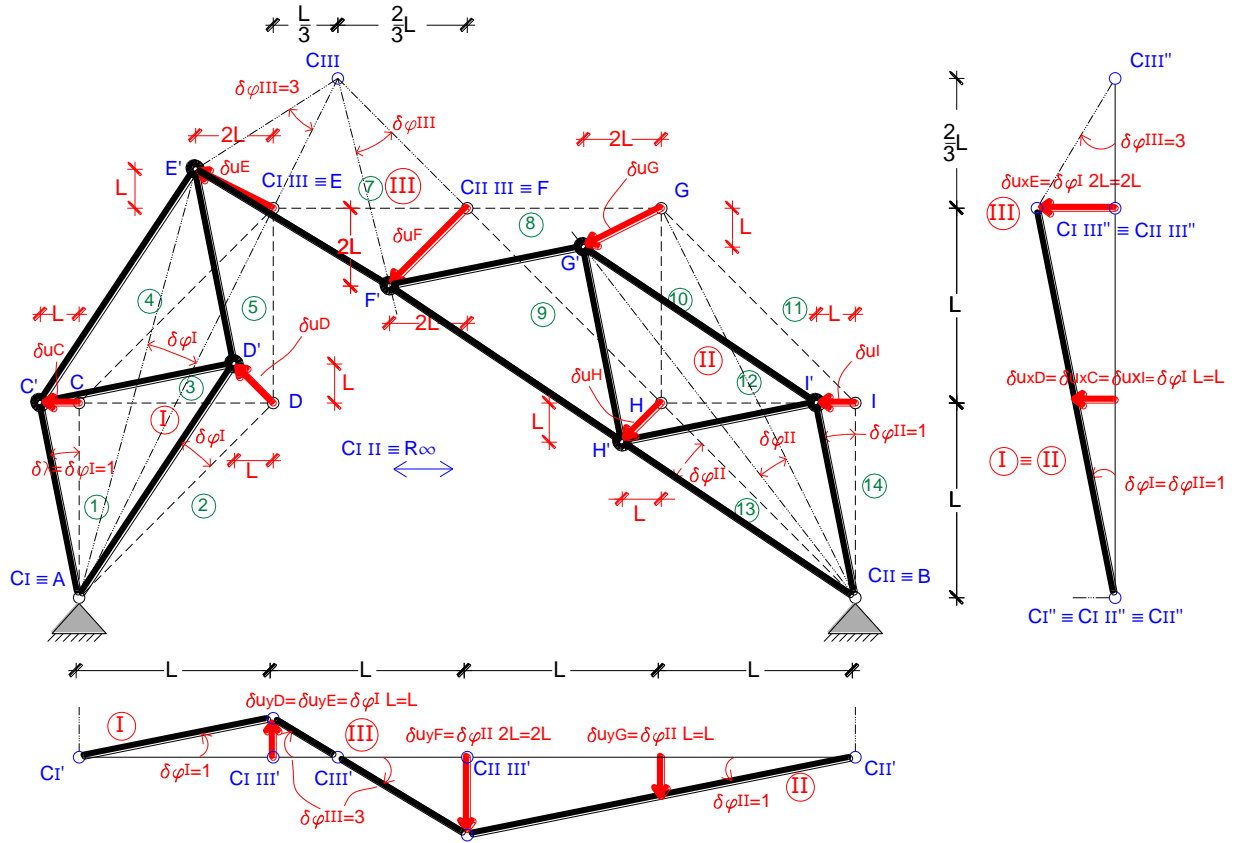
La condizione di equilibrio della catena cinematica reticolare ottenuta può esprimersi attraverso il principio dei lavori virtuali (P.L.V.) considerando a tal fine la classe delle configurazioni spostate individuate da *un unico parametro lagrangiano*  $\delta\lambda$ , uno è infatti il grado di labilità del sistema. Come appare dallo schema di Figura 29, il *sistema* (labile) in esame risulta *costituito da tre corpi rigidi* indicati in Figura con I (maglia ACED), II (maglia BFGI) e III (coincidente con l'asta 7); i corpi rigidi I e II sono collegati mutuamente nel nodo E, mentre i corpi rigidi II e III nel nodo F.

La configurazione variata (o spostata) della catena cinematica può allora essere individuata in questo caso considerando le condizioni dettate dai teoremi delle catene cinematiche: 1) i centri assoluti di rotazione dei corpi I e II, siano essi  $C_I$  e  $C_{II}$ , devono essere allineati con il centro relativo  $C_{I II}$ ; 2) i centri assoluti di rotazione dei corpi II e III, siano essi  $C_{II}$  e  $C_{III}$ , devono essere allineati con il centro relativo  $C_{II III}$ ; 3) i centri assoluti di rotazione dei corpi I e III, siano essi  $C_I$  e  $C_{III}$ , devono essere allineati con il centro relativo  $C_{I III}$ ; 4) i centri relativi dei tre corpi, siano essi  $C_{I II}$ ,  $C_{II III}$  e  $C_{I III}$ , devono essere allineati.

In particolare: il centro assoluto  $C_I$  coincide con l'occhio della cerniera A; il centro relativo  $C_{I III}$  coincide con la cerniera E; il centro  $C_{II}$  coincide con l'occhio della cerniera B; il centro relativo  $C_{II III}$  coincide con la cerniera F (Figura 29bis). Dall'applicazione simultanea delle condizioni 2) e 3) può individuarsi la posizione di  $C_{III}$ , che coincide con il punto di intersezione delle rette che si ottengono prolungando le congiungenti  $C_I - C_{I III}$  e  $C_{II} - C_{II III}$ ; dall'applicazione simultanea delle condizioni 1) e 4) può individuarsi la posizione di  $C_{I II}$  che coincide con il punto all'infinito nella direzione orizzontale.



Una possibile spostata della catena cinematica in esame è individuabile assegnando una rotazione oraria del corpo I attorno a  $C_I$  (ciò equivale a scegliere come parametro lagrangiano  $\delta\lambda$  la rotazione  $\delta\varphi_I$ ). In Figura 29ter si riporta la spostata ottenuta per  $\delta\lambda = \delta\varphi_I = 1$  (il valore unitario è scelto per comodità di conto). La spostata è individuata sia sulla struttura, dove sono evidenziati gli spostamenti assoluti, sia in termini di proiezioni così da rendere più agevole la valutazione delle componenti di spostamento dei punti (nodi) ove sono applicati i carichi.



$$\delta\varphi_I = 1 \Rightarrow \delta u_C \equiv \delta u_{xC} = \overline{AC} \operatorname{tg}(\delta\varphi_I) \simeq \overline{AC} \cdot 1 = L$$

$$\delta u_D = \overline{DA} \delta\varphi_I = \sqrt{(L)^2 + (L)^2} \cdot 1 = L\sqrt{2} \Rightarrow \delta u_{xD} = \delta u_{yD} = L\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = L \Rightarrow \delta u_{D6} = 0$$

$$\delta u_E = \overline{EA} \delta\varphi_I = \sqrt{(L)^2 + (2L)^2} \cdot 1 = L\sqrt{5} \Rightarrow \delta u_{xE} = 2L ; \delta u_{yE} = L$$

$$\delta\varphi_{III} \simeq \operatorname{tg}(\delta\varphi_{III}) = \frac{\overline{\delta u_E}}{\overline{EC_{III}}} = \frac{L\sqrt{5}}{\sqrt{\left(\frac{L}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}L\right)^2}} = \frac{L\sqrt{5}}{L\frac{\sqrt{5}}{3}} = 3$$

$$\delta u_F \equiv \delta u_{F6} = \overline{EA} \delta\varphi_{III} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}L\right)^2 + \left(\frac{2}{3}L\right)^2} \cdot 3 = L\frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot 3 = 2L\sqrt{2} \Rightarrow \delta u_{xF} = \delta u_{yF} = 2L$$

$$\delta\varphi_{II} \simeq \operatorname{tg}(\delta\varphi_{II}) = \frac{\overline{\delta u_F}}{\overline{FC_{II}}} = \frac{2L\sqrt{2}}{2L\sqrt{2}} = 1$$

$$\delta u_I \equiv \delta u_{xI} = \overline{IC_{II}} \delta\varphi_{II} = L \cdot 1 = L$$

$$\delta u_G = \overline{GC_{II}} \delta\varphi_{II} = \sqrt{(L)^2 + (2L)^2} \cdot 1 = L\sqrt{5} \Rightarrow \delta u_{xG} = 2L ; \delta u_{yG} = L$$

$$\delta u_H = \overline{HC_{II}} \delta\varphi_{II} = \sqrt{(L)^2 + (L)^2} \cdot 1 = L\sqrt{2}$$

Figura 29ter – Spostata della catena cinematica reticolare di Fig. 29

L'equazione dei lavori virtuali ( $\delta L = 0 \quad \forall \delta \lambda$ ) nell'unica incognita  $R_6$  si scrive sommando il lavoro compiuto dalle forze i cui punti di applicazione subiscono uno spostamento nella direzione delle forze stesse. Ciascun contributo, ovviamente, è assunto positivo quando forza e spostamento sono concordi, negativo in caso contrario. Con riferimento alla Fig. 29, ove sono indicati i carichi agenti, e alla Fig. 29ter, ove sono riportate le corrispondenti componenti di spostamento, può scriversi:

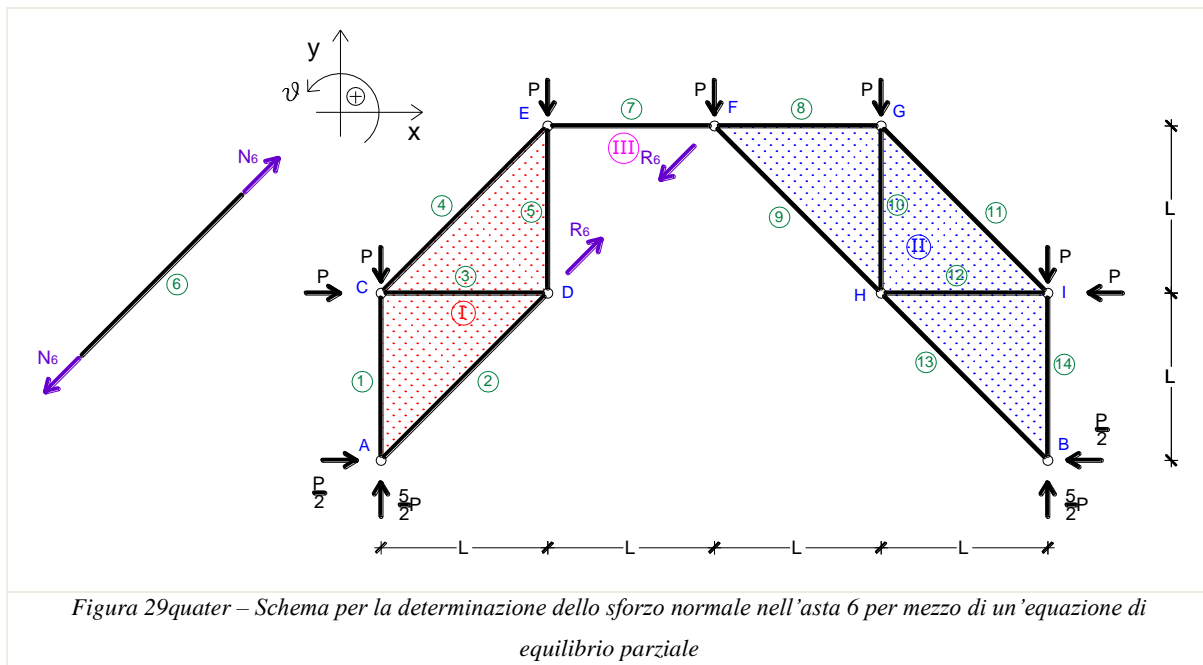
$$\begin{aligned} \delta L|_{\delta \lambda=1} &= -P \cdot \delta u_{xC} + R_6 \cdot \delta u_{F6} - P \cdot \delta u_{yE} + P \cdot \delta u_{yF} + P \cdot \delta u_{yG} + P \cdot \delta u_{xI} = \\ &= -PL + R_6 2L\sqrt{2} - PL + P2L + PL + PL \end{aligned}$$

Si noti che essendo  $\delta u_C$  ed il carico  $P$  (applicato in C) nonché  $\delta u_I$  ed il carico  $P$  (applicato in I) e anche  $\delta u_D$  e la reazione  $R_6$  che l'asta 6 trasmette al corpo I mutuamente ortogonali ( $\delta u_{D6} = 0$  cfr. Fig. 29ter) il contributo al lavoro è identicamente nullo; ponendo, per il P.L.V.,  $\delta L = 0$  si ha:

$$-PL + R_6 2L\sqrt{2} - PL + P2L + PL + PL = 0 \Rightarrow R_6 = -\frac{P}{\sqrt{2}} = -P \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Il valore analitico determinato per  $R_6$  è negativo, il verso ipotizzato è opposto a quello effettivo, e quindi l'asta 6 è in compressione (puntone).

In modo alternativo, essendo l'asta in esame un'asta di contorno, la determinazione dello sforzo normale su di essa agente può effettuarsi imponendo una condizione di equilibrio parziale di una delle porzioni (indeformabili) di struttura rispetto all'altra.



Con riferimento alla Fig. 29quater la condizione di equilibrio parziale è una condizione di equilibrio alla rotazione relativa intorno alla cerniera E. Imponendo ad esempio l'equilibrio alla rotazione della porzione I



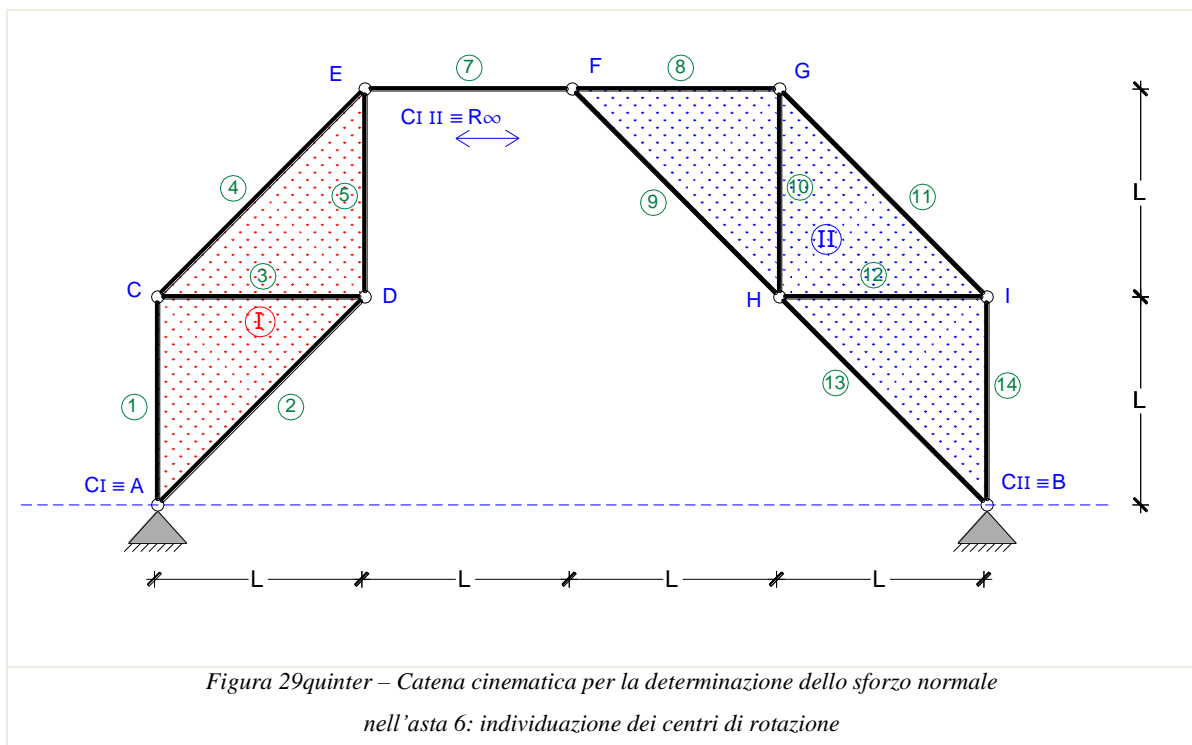
rispetto al nodo E si ottiene in modo immediato (senza cioè ricorrere allo studio della catena cinematica reticolare) l'azione dell'asta soppressa  $R_6$  e quindi lo sforzo normale incognito  $N_6$  (uguale in modulo e direzione ma di verso opposto), si ha infatti:

$$\sum M_E^I = 0 \Rightarrow \frac{P}{2}2L - \frac{5}{2}PL + PL + PL + R_6 \frac{L}{2}\sqrt{2} = 0 \Rightarrow R_6 = -\frac{P}{\sqrt{2}} = -P \frac{\sqrt{2}}{2}$$

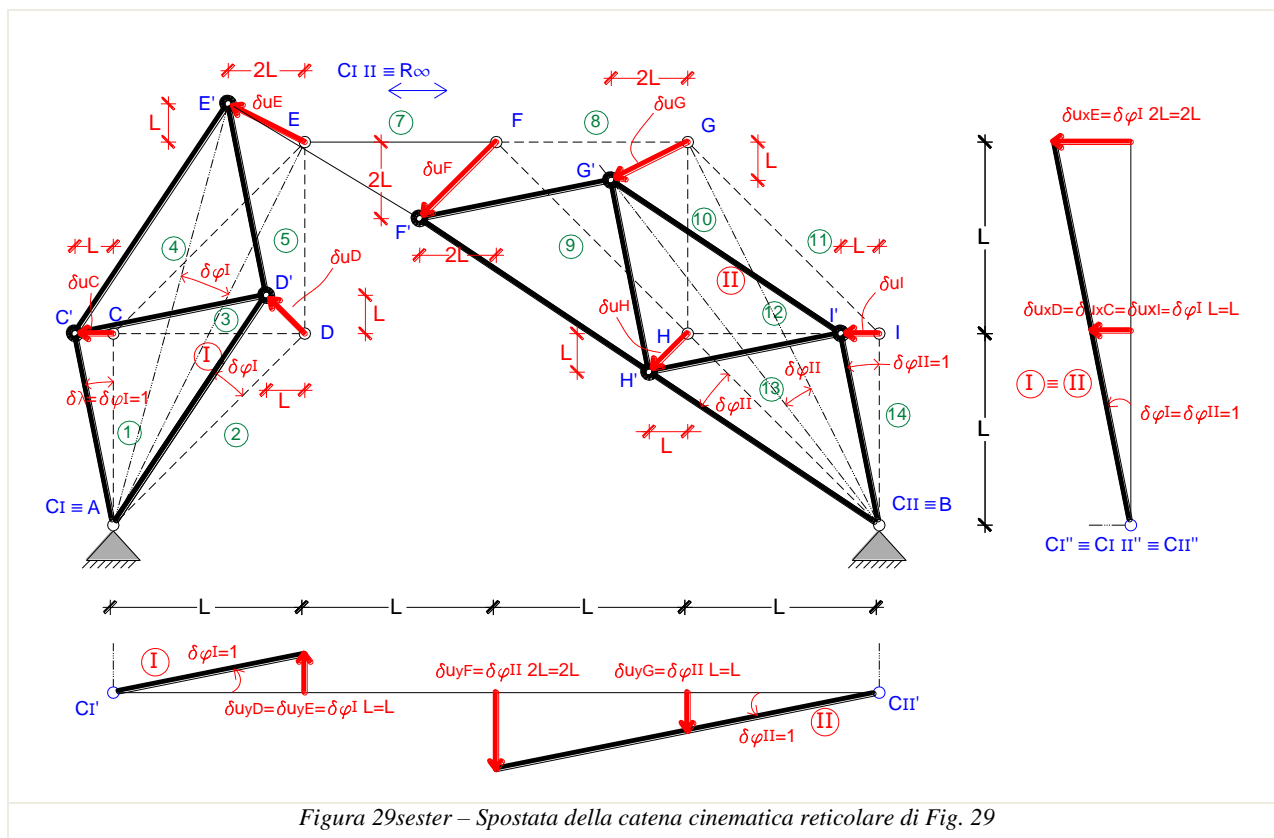
Il valore analitico determinato per  $R_6$  è negativo, il verso ipotizzato è opposto a quello effettivo, e quindi l'asta 6 è in compressione (puntone).

### Osservazione

Con riferimento alla Figura 29 è possibile, per rendere più speditiva la determinazione della configurazione spostata di Fig. 29ter, “interpretare” l'asta 7 non come un singolo corpo rigido (III), cosa che richiede il calcolo dei centri assoluti e relativi anche per questo corpo, bensì come un pendolo interno che vincola mutuamente i corpi I e II. Il sistema (labile) in esame risulta ora *costituito da due corpi rigidi*. La configurazione variata (o spostata) della catena cinematica può allora essere individuata in questo caso considerando che i centri assoluti di rotazione dei corpi I e II, siano essi  $C_I$  e  $C_{II}$ , devono essere allineati con il centro relativo  $C_{I II}$ . In particolare: il centro assoluto  $C_I$  coincide con l'occhio della cerniera A; il centro assoluto  $C_{II}$  coincide con l'occhio della cerniera B; il centro relativo  $C_{I II}$  deve pertanto appartenere alla retta all'infinito nella direzione orizzontale come mostrato in Figura 29quinter.



Una possibile spostata della catena cinematica in esame è individuabile assegnando una rotazione oraria del corpo I attorno a  $C_I$  (ciò equivale a scegliere come parametro lagrangiano  $\delta\lambda$  la rotazione  $\delta\varphi_I$ ). In Figura 29sester si riporta la spostata ottenuta per  $\delta\lambda = \delta\varphi_I = 1$  (il valore unitario è scelto per comodità di conto). La spostata è individuata sia sulla struttura, dove sono evidenziati gli spostamenti assoluti, sia in termini di proiezioni così da rendere più agevole la valutazione delle componenti di spostamento dei punti (nodi) ove sono applicati i carichi.



Si noti che il pendolo interno, in accordo alla sua funzione cinematica, ha consentito delle traslazioni relative tra i due corpi I e II nella direzione verticale, ortogonale al suo asse; potrebbero, nel caso generale, esserci anche delle rotazioni relative tra i corpi suddetti, ma la circostanza che  $C_{I\ II}$  sia un punto all'infinito *implica* che i due corpi I e II non possono subire rotazioni relative!!

Si lascia come compito al lettore la scrittura dell'equazione dei lavori virtuali per la determinazione dell'incognita  $R_6$ .