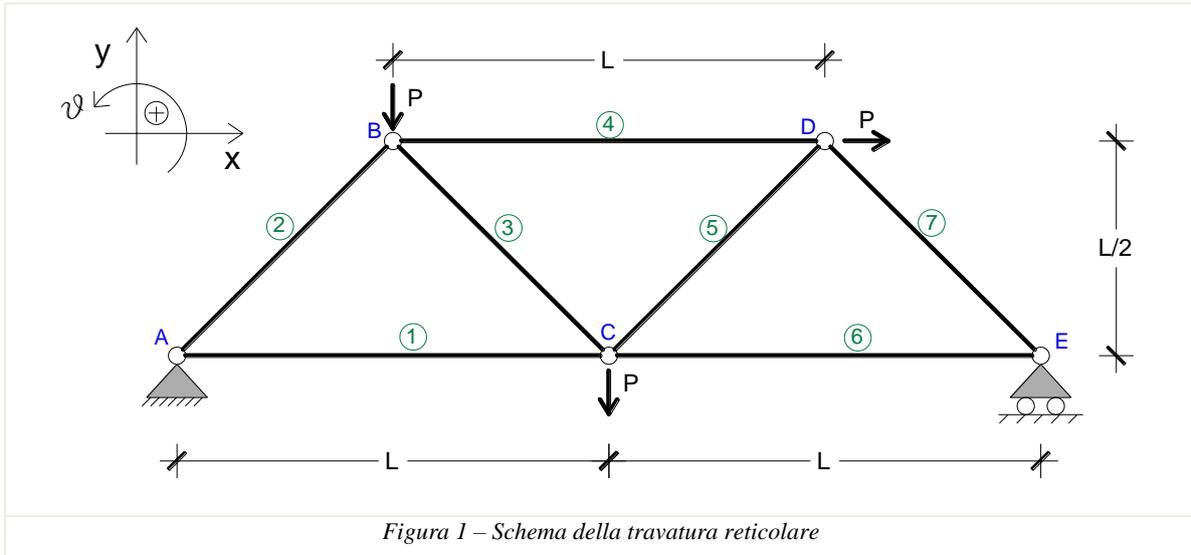


## ESERCIZIO n.1

Data la travatura reticolare piana triangolata semplice illustrata in Figura 1, determinare gli sforzi normali nelle aste utilizzando i seguenti metodi: metodo dell'equilibrio ai nodi; metodo delle sezioni di Ritter; metodo diretto (applicazione del principio dei lavori virtuali (P.L.V.) ad una catena cinematica reticolare definita a partire dalla travatura data).



### 1. Valutazione dell'isostaticità della travatura

#### Condizione necessaria per l'isostaticità ( $l=0$ )

Si valuta il grado di labilità apparente,  $l$ , della travatura interpretandola come un sistema in cui i nodi (soggetti ai carichi esterni concentrati o alle reazioni vincolari esterne) sono gli elementi dotati di gradi di libertà di corpo rigido (2 G.L. nel piano); mentre le aste (non soggette a carichi esterni direttamente applicati su di esse) vengono considerate come dei pendoli interni (di molteplicità unitaria) che collegano i nodi stessi. Pertanto si può scrivere:

$$l = 2n - a - \mu_e = 2 \times 5 - 7 - 3 = 0,$$

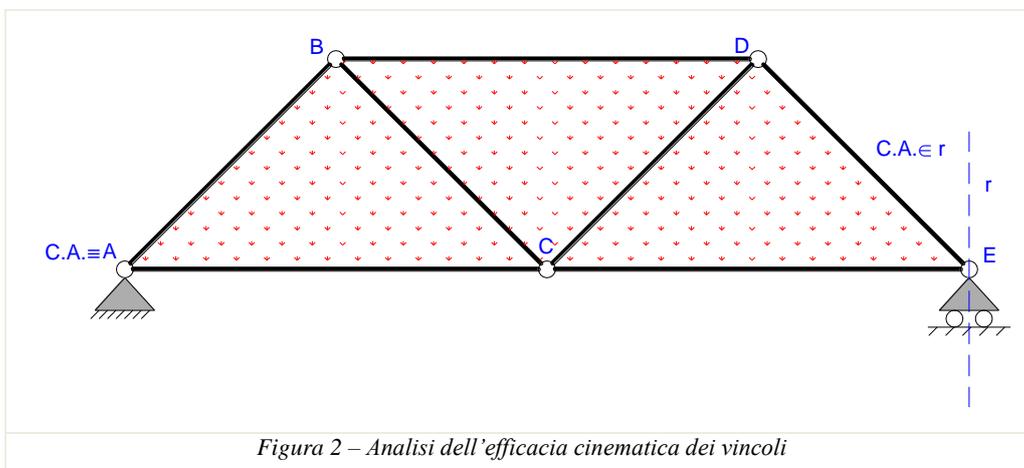
essendo:  $n$  = numero dei nodi;  $a$  = numero delle aste;  $\mu_e$  = molteplicità globale dei vincoli esterni.

La condizione necessaria per l'isostaticità della travatura reticolare è quindi soddisfatta.

#### Condizione sufficiente per l'isostaticità

La travatura in esame è a maglie triangolari semplici ed è quindi un sistema strettamente indeformabile. Essa può considerarsi come un unico corpo rigido piano vincolato all'esterno con vincoli di molteplicità globale  $\mu_e = 3$ ; è sufficiente pertanto verificare l'efficacia cinematica dei vincoli esterni.

Con riferimento alla Figura 2, nella quale la campitura delle maglie triangolari indeformabili aiuta ad interpretare la travatura come un unico corpo rigido piano, si può verificare l'efficacia cinematica dei vincoli.

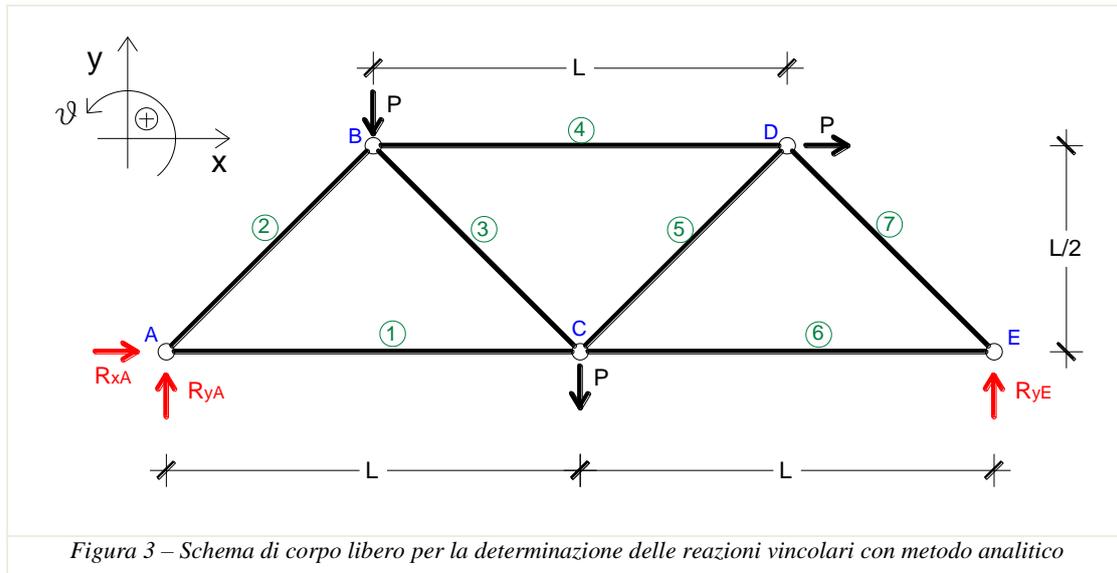


Il centro assoluto di rotazione del sistema per la presenza della cerniera A deve coincidere con l'occhio della cerniera stessa, per la presenza del carrello E deve appartenere alla retta  $r$  ortogonale al piano di scorrimento del carrello passante per E. Non potendo essere soddisfatte contemporaneamente le due condizioni se ne deduce che non esiste un centro assoluto di rotazione. Pertanto anche la condizione sufficiente per l'isostaticità della travatura risulta soddisfatta e il sistema, nel suo complesso, risulta isostatico.

## 2. Determinazione delle reazioni vincolari esterne

### Metodo analitico

Si risolve il sistema in termini di reazioni vincolari esterne; a tal fine si considera lo schema di corpo libero nel quale i vincoli esterni sono sostituiti dalle reazioni che essi sono potenzialmente in grado di esplicare. Tali reazioni si applicano con versi arbitrari, ad esempio concordi a quelli del sistema di riferimento adottato, così come illustrato in Figura 3:



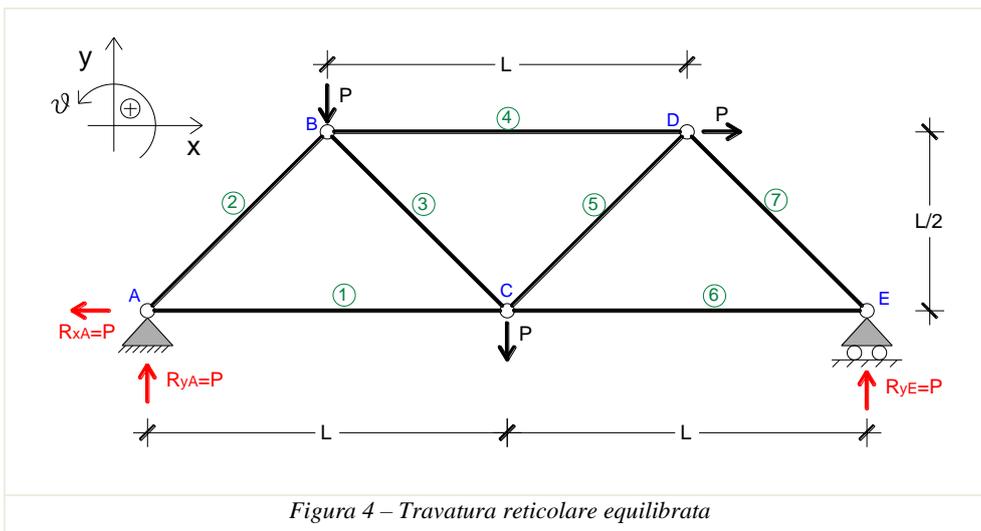
Si hanno in questo caso 3 componenti di reazioni incognite determinabili attraverso le 3 equazioni cardinali della statica, in dettaglio:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow P + R_{xA} = 0 \Rightarrow \boxed{R_{xA} = -P}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -2P + R_{yA} + R_{yE} = 0 \Rightarrow R_{yA} = -R_{yE} + 2P \Rightarrow \boxed{R_{yA} = P}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -P \cdot \frac{L}{2} - P \cdot \frac{L}{2} - P \cdot L + R_{yE} \cdot 2L = 0 \Rightarrow \boxed{R_{yE} = P}$$

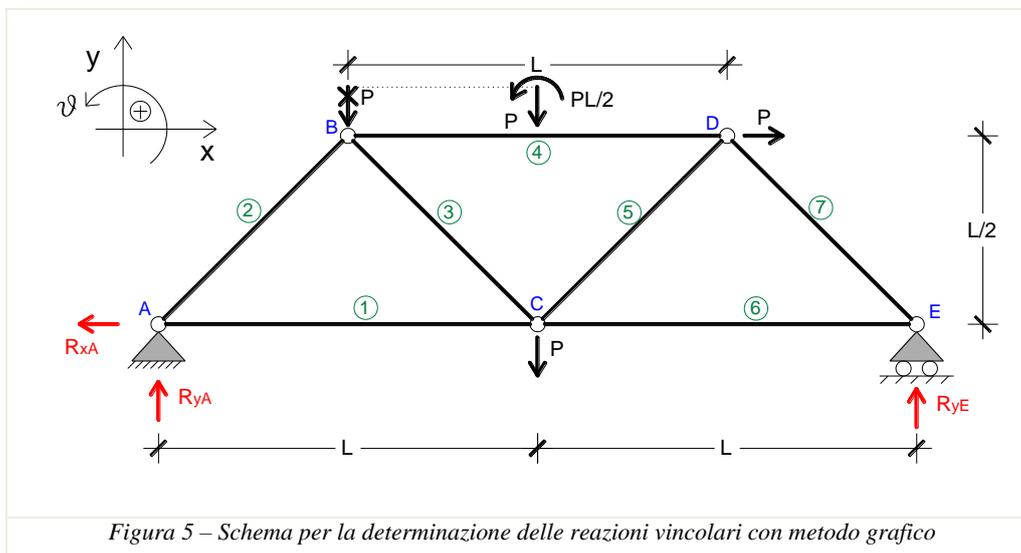
Il valore analitico della reazione  $R_{xA}$  risulta negativo, pertanto il verso effettivo del vettore  $R_{xA}$  risulta opposto a quello ipotizzato in Figura 3. In definitiva si ha:



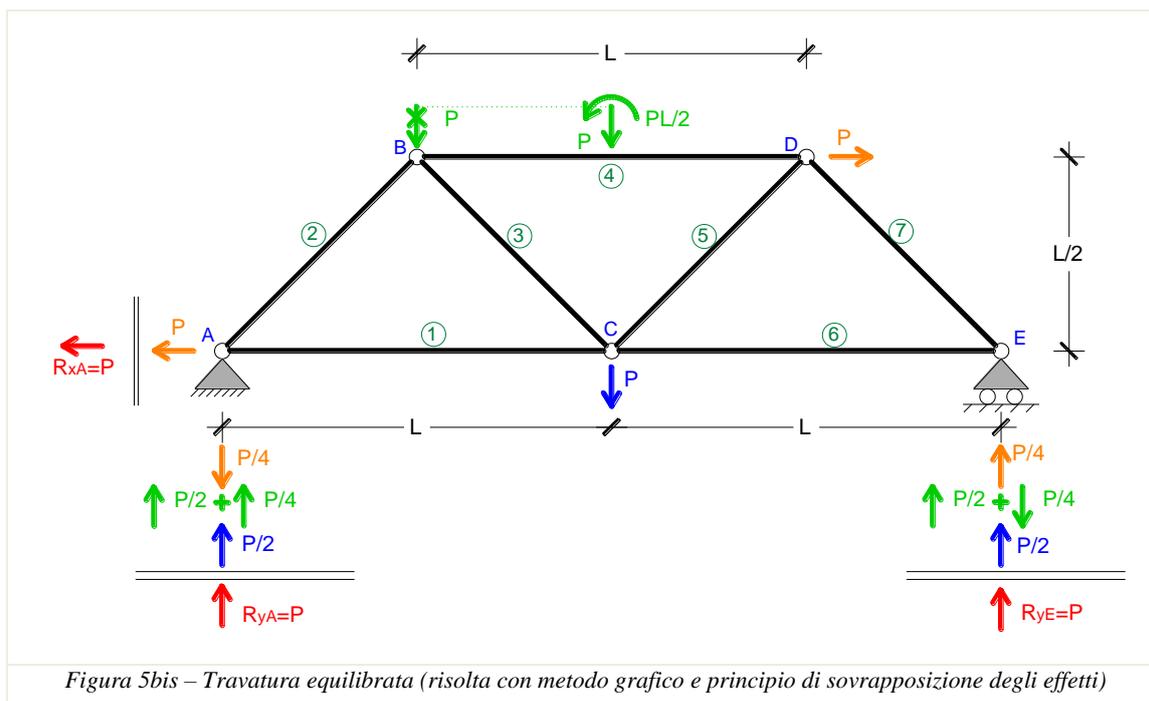
Metodo grafico

È possibile ricavare le reazioni vincolari con il metodo grafico, a tal fine è conveniente considerare ciascun carico singolarmente e applicare il principio di sovrapposizione degli effetti.

Risulta utile traslare il carico P applicato sul nodo B parallelamente alla sua retta d'azione in modo da centrarlo rispetto alle rette d'azione delle reazioni dei vincoli in A e B, applicando ovviamente il momento dovuto al trasporto come ulteriore condizione di carico da equilibrare.



Si studiano quindi le 4 condizioni di carico in maniera indipendente ricavando, per ognuna di esse, le corrispondenti reazioni vincolari che vengono evidenziate con colori diversi per una più chiara comprensione.



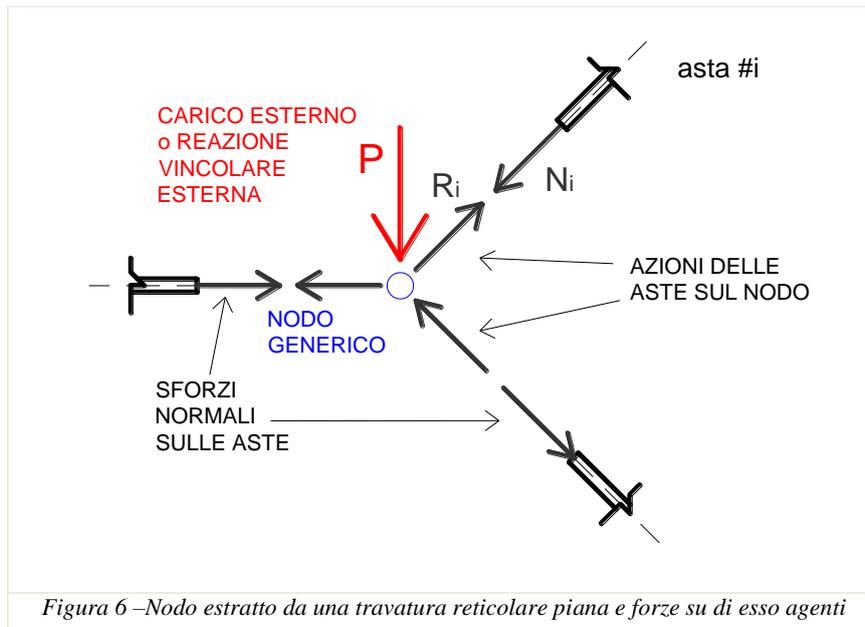
È facile verificare che i valori delle reazioni vincolari determinati per via grafica coincidono con quelli valutati per via analitica.

### 3. Calcolo degli sforzi normali

#### Metodo dell'equilibrio ai nodi

Tale metodo si basa sulla considerazione che una struttura reticolare isostatica, soggetta per ipotesi a forze applicate ai nodi (siano esse carichi esterni o componenti di reazioni vincolari esterne), è in equilibrio se è in equilibrio ogni suo nodo.

Con riferimento alla Figura 6 può osservarsi quanto segue. Ogni nodo, supposto estratto dalla struttura, è soggetto a forze esterne (carichi o reazioni vincolari esterne) e ad azioni provenienti dalle aste che in esso concorrono. Le *forze esterne* sono *note in intensità, direzione e verso*. Le *azioni* delle aste sono *note solo in direzione* (quella dell'asse dell'asta) essendo incogniti intensità e verso. L'intensità e il verso delle azioni delle aste sul nodo (e di conseguenza degli sforzi normali sulle aste) possono valutarsi applicando la condizione di equilibrio al nodo che, nel piano, si traduce nelle due condizioni di equilibrio alla traslazione orizzontale e verticale.

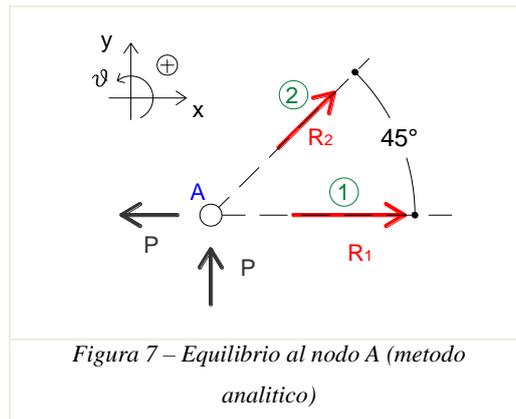


La *condizione di equilibrio* al nodo può essere imposta ovviamente sia con *procedimento grafico*, richiedendo la chiusura del poligono delle forze agenti sul nodo, che con *procedimento analitico* e ciò attraverso la scrittura di due equazioni di equilibrio alla traslazione. È evidente quindi che le azioni incognite valutabili non possono essere più di due. Un nodo nel quale tale circostanza è verificata è detto “nodo canonico”. Una struttura reticolare è “a nodi canonici” se, rimossi (o risolti) i nodi canonici e le aste che vi concorrono, i nodi rimanenti sono ancora canonici. Una travatura a nodi canonici può essere completamente risolta applicando il metodo in esame in modo sequenziale, considerando cioè di volta in volta l’equilibrio di un nodo canonico.

È opportuno osservare infine che, una volta individuata l’azione di un’asta su un nodo, resta individuata anche l’azione della stessa asta sull’altro nodo di estremità, azione che deve essere uguale in modulo (e direzione) e di verso opposto!

Con riferimento alla travatura in esame un nodo canonico da cui poter iniziare la procedura risolutiva è ad esempio il nodo A (o alternativamente il nodo E), in quanto su di esso le azioni incognite sono soltanto due, ovvero le azioni delle aste 1 e 2 che vi concorrono. Come già osservato, nell’imporre le condizioni di equilibrio al nodo occorre considerare non gli sforzi normali  $N_i$  sulle aste bensì le azioni  $R_i$  trasmesse dalle aste al nodo che, per il Principio di Azione e Reazione, avranno uguale modulo e direzione di  $N_i$  ma verso opposto (Figura 6).

Sul nodo A (cerniera esterna) agiscono le due componenti di reazione vincolare precedentemente valutate,  $R_{xA} = P$  e  $R_{yA} = P$ , e le forze (azioni) che le aste 1 e 2 trasmettono sul nodo, denotate con  $R_1$  ed  $R_2$ , entrambe incognite da determinare (Figura 7).



Per convenzione si ipotizza che le azioni  $R_1$  ed  $R_2$  abbiano verso uscente dal nodo, circostanza che equivale a considerare le aste in trazione (nel seguito tale convenzione verrà assunta per ogni nodo anche quando non esplicitamente detto).

I valori delle azioni  $R_1$  ed  $R_2$  si possono determinare scrivendo le (due) equazioni cardinali della statica relativamente ai due gradi di libertà (traslazioni nelle direzioni  $x$  ed  $y$ ) del nodo.

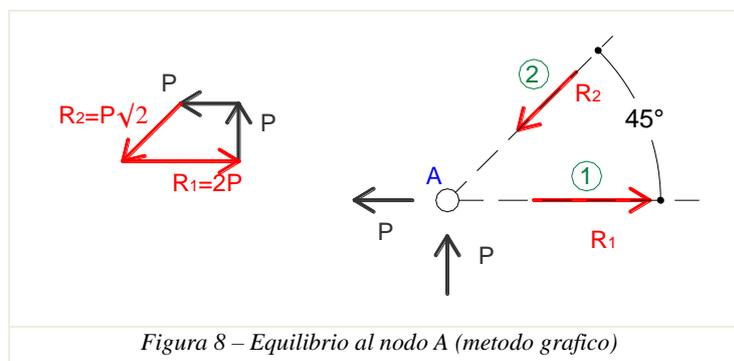
Con riferimento allo schema di Figura 7 può scriversi:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -P + R_1 + R_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow R_1 = P + P \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{2} = 2P$$

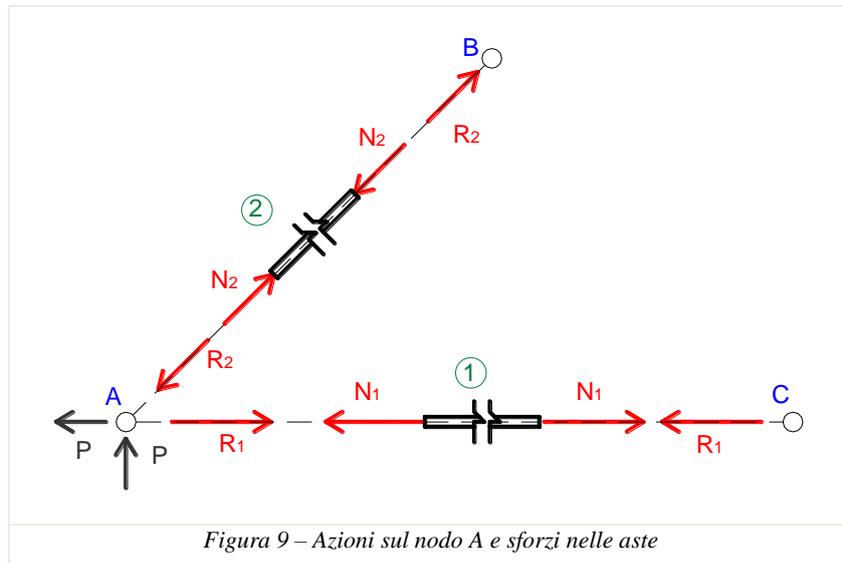
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow P + R_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow R_2 = -P \frac{2}{\sqrt{2}} = -P\sqrt{2}$$

L'asta 1 è in trazione (tirante), e ciò in quanto il valore analitico determinato per  $R_1$  è positivo e quindi il verso ipotizzato è corretto, mentre l'asta 2 è in compressione (puntone) dal momento che il valore analitico di  $R_2$  è negativo e quindi il verso corretto è opposto a quello ipotizzato in Figura 7.

Il metodo dell'equilibrio ai nodi può, ovviamente e spesso in modo più speditivo, applicarsi per via grafica. La condizione di equilibrio al nodo si traduce graficamente nella condizione di chiusura del poligono delle forze così come riportato nello schema seguente. La costruzione, a scala fissata, di tale poligono fornisce in direzione e verso i valori delle azioni incognite agenti sul nodo.

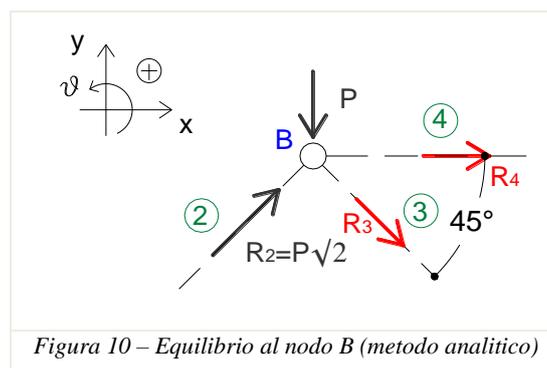


Un'efficace visualizzazione delle azioni ( $R_i$ ) trasmesse dalle aste al nodo A e delle azioni (sforzi  $N_i$ ) trasmesse dal nodo alle aste in esso concorrenti è riportata nella Figura seguente.



Dall'esame della Figura 9 si comprende come, una volta risolto il nodo A, si conoscono di conseguenza le azioni dell'asta 2 sul nodo B e dell'asta 1 sul nodo C. Quest'ultimo, tuttavia, non è ancora "diventato" un nodo canonico in quanto risultano incognite le azioni delle aste 3, 5 e 6 su esso concorrenti.

Il nodo B invece, noto il valore di  $R_2$ , è canonico, poiché risultano incognite solo le azioni  $R_3$  ed  $R_4$ , che possono essere univocamente determinate attraverso due equazioni di equilibrio, scritte qui di seguito con riferimento allo schema di Figura 10:

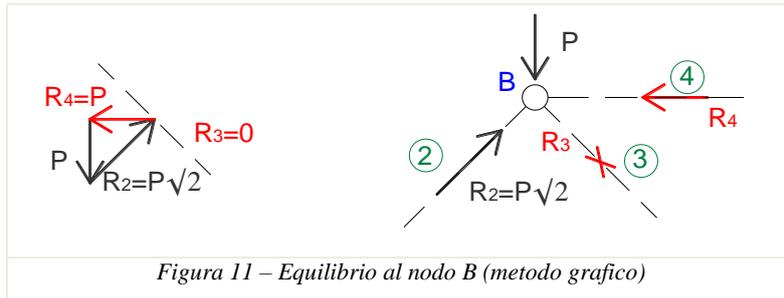


$$\sum F_x = 0 \Rightarrow P\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} + R_3 \frac{\sqrt{2}}{2} + R_4 = 0 \Rightarrow P\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} + R_4 = 0 \Rightarrow \boxed{R_4 = -P}$$

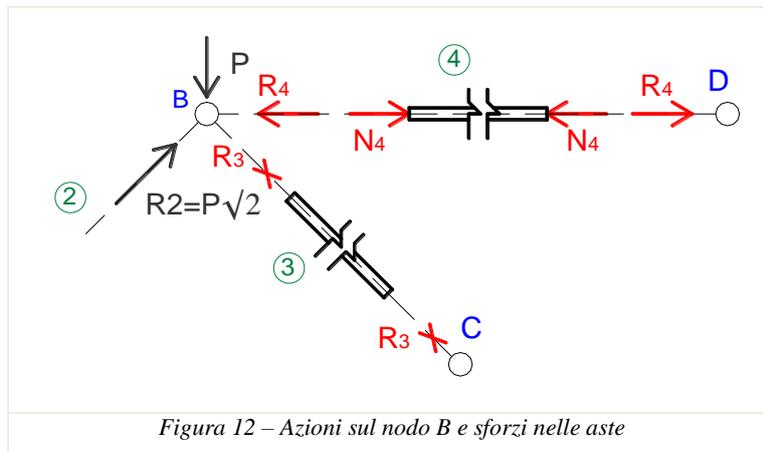
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow P\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} - P - R_3 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{R_3 = 0}$$

Essendo il valore analitico di  $R_4$  negativo, il verso corretto è opposto a quello ipotizzato e l'asta 4 è in compressione (puntone), l'asta 3 risulta scarica.

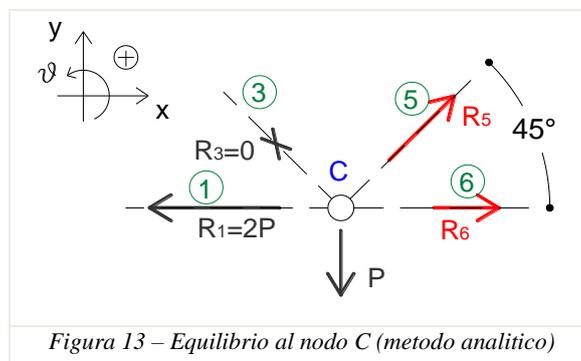
Con metodo grafico risulta:



e, analogamente a quanto fatto in precedenza, si ha:



Risolto il nodo B, si conoscono le azioni dell’asta 4 sul nodo D e dell’asta 3 sul nodo C (nulla nel caso esaminato). Entrambi i nodi C e D sono “diventati” canonici, in quanto per ogni nodo risultano incognite solo due azioni, rispettivamente,  $R_5$  ed  $R_6$  per il nodo C,  $R_5$  ed  $R_7$  per il nodo D. La scelta di uno tra i due è indifferente, nel seguito si considera dapprima il nodo C:

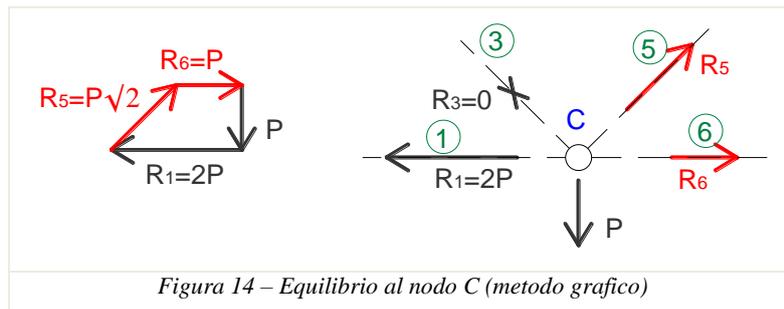


$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_6 + R_5 \frac{\sqrt{2}}{2} - 2P = 0 \Rightarrow R_6 = 2P - P \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{2} = P$$

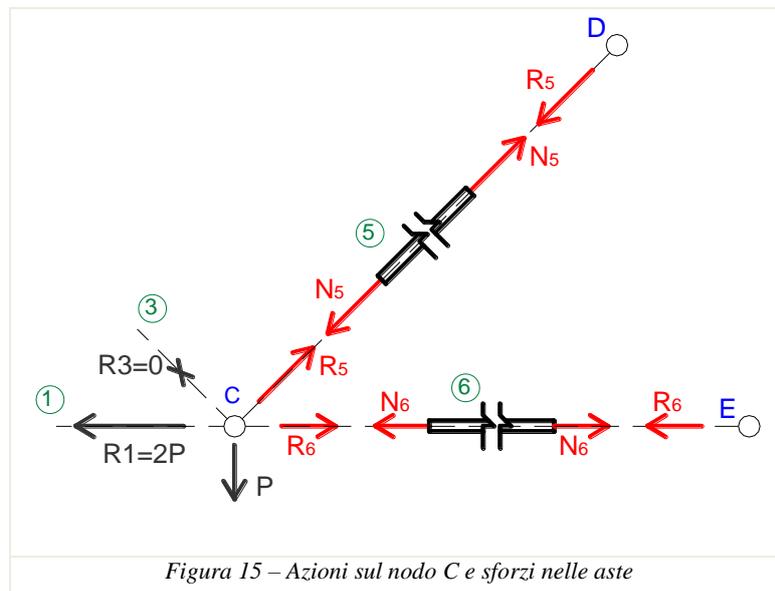
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_5 \frac{\sqrt{2}}{2} - P = 0 \Rightarrow R_5 = P \frac{2}{\sqrt{2}} = P\sqrt{2}$$

I versi di  $R_5$  ed  $R_6$  ipotizzati in Figura 13 sono corretti ed entrambe le aste 5 e 6 sono quindi in trazione (tiranti).

Con il metodo grafico risulta:

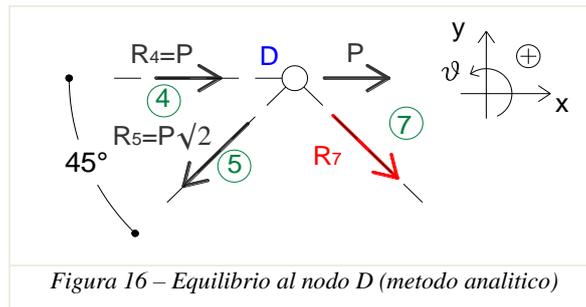


E, in definitiva:



Risolto il nodo C, si conoscono le azioni dell'asta 5 sul nodo D e dell'asta 6 sul nodo E; per entrambi i nodi D ed E l'unica incognita da determinare risulta ora l'azione trasmessa dall'asta 7 ( $R_7$ ). Ricavata  $R_7$ , imponendo l'equilibrio in uno qualsiasi di questi due nodi, nel nodo rimanente tutte le azioni (siano esse azioni trasmesse dalle aste siano, come nel caso del nodo E, reazioni vincolari esterne precedentemente determinate) sono note; le due equazioni di equilibrio dovranno essere allora identicamente soddisfatte, questa circostanza può essere riguardata come una procedura di verifica dei risultati trovati.

Si ricava il valore dell'incognita  $R_7$  imponendo l'equilibrio del nodo D:



In presenza di una sola incognita è sufficiente scrivere una sola condizione di equilibrio, ad esempio quella in direzione x, si ha:

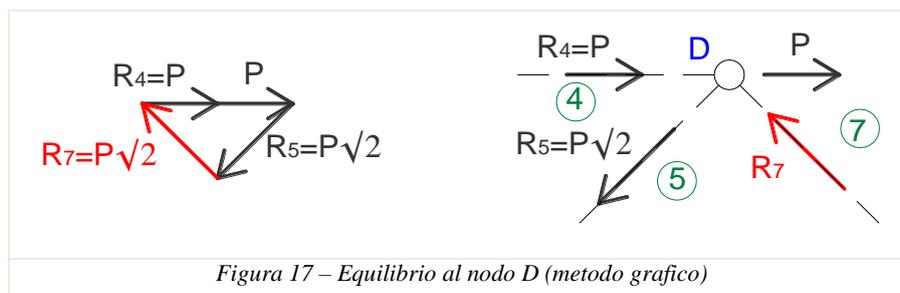
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow P + P - P\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} + R_7 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{R_7 = -(2P - P) \frac{2}{\sqrt{2}} = -P\sqrt{2}}$$

Considerando il valore  $R_7 = -P\sqrt{2}$  la condizione di equilibrio in direzione y è identicamente soddisfatta, si ha infatti:

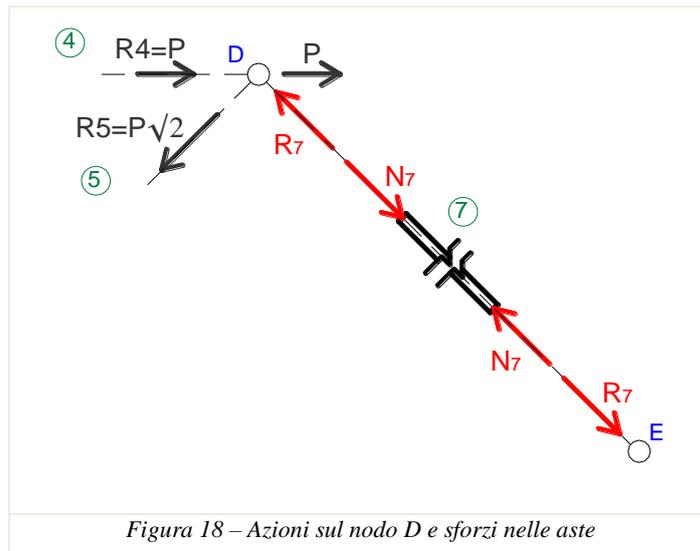
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -P\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} - R_7 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow -P\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = -P\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Il valore analitico determinato per  $R_7$  è negativo e quindi il verso corretto è opposto a quello ipotizzato in Figura e l'asta 7 è in compressione (puntone).

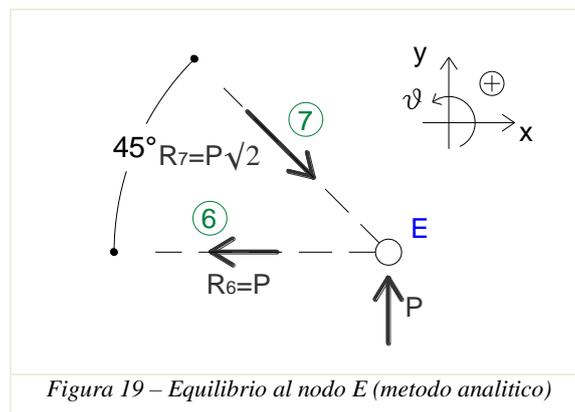
Con il metodo grafico si ha:



E, in definitiva si ha:



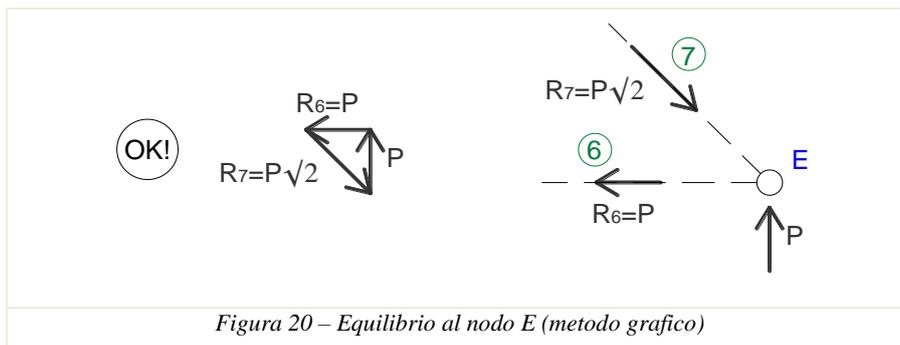
La condizione di equilibrio del nodo E, nel quale tutte le azioni sono note, è identicamente soddisfatta come risulta dalle equazioni seguenti scritte con riferimento alla Figura 19.



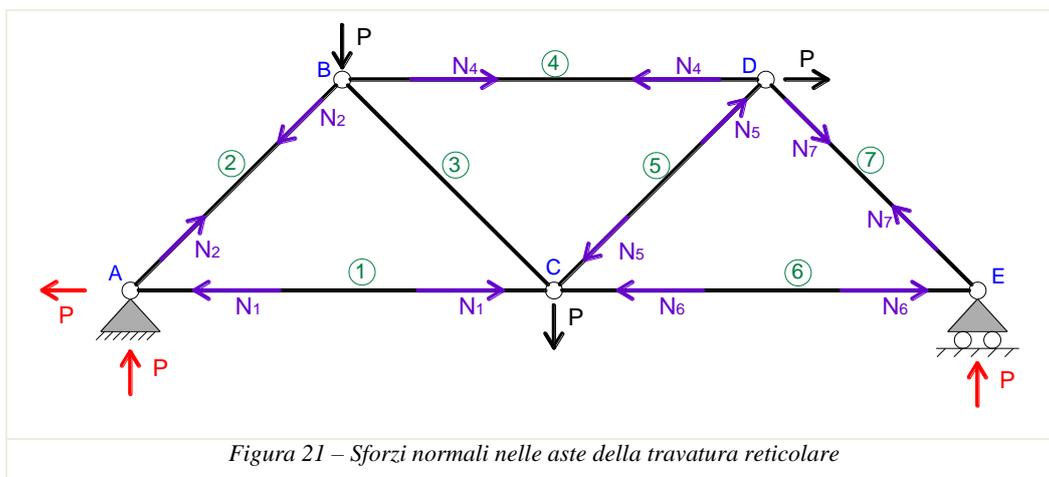
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_7 \frac{\sqrt{2}}{2} - R_6 = 0 \Rightarrow -P\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = -P \Rightarrow \boxed{P=P}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -R_7 \frac{\sqrt{2}}{2} + P = 0 \Rightarrow -P\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = -P \Rightarrow \boxed{-P=-P}$$

A conferma del risultato trovato, con il metodo grafico si ottiene che il poligono delle forze (costituito da azioni tutte note) è chiuso:



In definitiva gli sforzi normali nelle aste della travatura esaminata risultano:



I valori numerici degli sforzi sulle aste sono invece riportati nella Tabella che segue:

Asta	Sforzo normale	Comportamento
1	$N_1 = 2P$	TIRANTE
2	$N_2 = -P\sqrt{2}$	PUNTONE
3	$N_3 = 0$	/
4	$N_4 = -P$	PUNTONE
5	$N_5 = P\sqrt{2}$	TIRANTE
6	$N_6 = P$	TIRANTE
7	$N_7 = -P\sqrt{2}$	PUNTONE

Da quanto sin qui sviluppato è evidente che il metodo dell'equilibrio ai nodi risulta facilmente applicabile a strutture con un limitato numero di nodi (come quella in esame ad esempio). Nella maggioranza

dei casi pratici però la determinazione degli sforzi nelle aste può diventare eccessivamente onerosa richiedendo la soluzione di molti nodi.

Nell'analisi di questi sistemi strutturali inoltre è spesso sufficiente conoscere lo sforzo solo in alcune aste. Per travature a sostegno di grandi coperture ad esempio può essere importante conoscere, anche in una prima fase di dimensionamento di massima, solo l'entità degli sforzi nelle aste più sollecitate, tipicamente situate in prossimità della mezzera della travatura (e quindi "lontane" dai nodi canonici dai quali ha inizio la procedura sequenziale di soluzione prima vista).

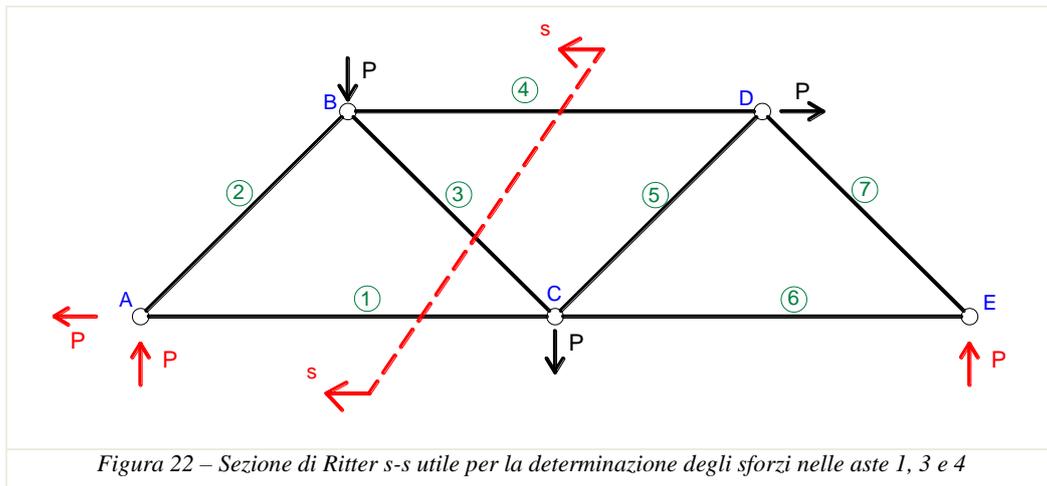
Di seguito si illustrano due metodi classici per la determinazione degli sforzi in alcune aste senza dovere necessariamente risolvere l'intero sistema (o gran parte di esso); essi sono: il "metodo delle sezioni di Ritter" e il "metodo diretto", quest'ultimo basato sull'applicazione del principio dei lavori virtuali ad una opportuna catena cinematica reticolare definita a partire dal sistema in esame eliminando l'asta nella quale si vuole determinare lo sforzo.

### **Metodo delle sezioni di Ritter**

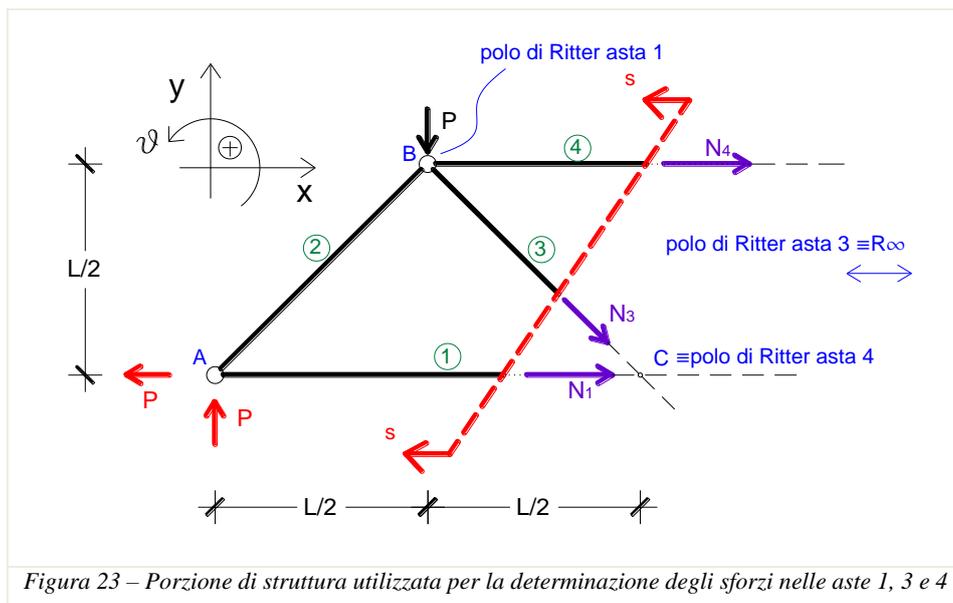
Questo metodo prevede di suddividere la travatura reticolare piana in *due parti distinte* mediante un'opportuna sezione, detta appunto *sezione di Ritter*. La sezione di Ritter dovrà interessare oltre *l'asta di cui si vuole determinare lo sforzo altre due aste*. Le tre aste sezionate dovranno inoltre essere *a due a due concorrenti* nello stesso punto (tipicamente un nodo se le rette d'azione si incontrano al finito, un punto all'infinito nella direzione degli assi delle aste per coppie di aste parallele tra loro).

Operata la sezione di Ritter, sui monconi delle tre aste tagliate si introducono gli sforzi normali incogniti, e ciò nell'ipotesi che le aste siano tiranti e quindi con versi uscenti dalle sezioni di taglio. Imponendo la condizione di equilibrio alla rotazione di una delle due parti in cui è stata divisa la travatura rispetto al punto d'intersezione degli assi di due delle tre aste interessate dalla sezione di Ritter si ottiene lo sforzo normale nella terza asta.

Con riferimento alla sezione di Ritter s-s indicata nella Figura 22 e atta alla determinazione dello sforzo nell'asta 1 ad esempio; l'equilibrio alla rotazione di una delle due parti di travatura (già risolta per vincoli esterni) andrà imposto attorno al punto (nodo) B, intersezione delle aste 3 e 4. Tale punto B è detto *polo di Ritter dell'asta 1*.



Per quanto sin qui osservato la sezione di Ritter s-s indicata in Figura 22 è utile anche per determinare gli sforzi nelle aste 3 e 4. Si consideri la parte sinistra della struttura già risolta per vincoli esterni (si può ovviamente considerare anche quella di destra) e si applichino sulle aste tagliate gli sforzi (positivi, di trazione)  $N_1$ ,  $N_3$  ed  $N_4$ , ottenendo così lo schema di Figura 23.



Con riferimento alla Figura 23 è facile constatare che: l’asta 1 ha come polo di Ritter il nodo B in cui si incontrano le linee d’asse delle aste 3 e 4; l’asta 4 avrà come polo di Ritter il nodo C intersezione degli assi delle aste 1 e 3; l’asta 3, infine, avrà come polo di Ritter il punto all’infinito della direzione orizzontale, intersezione delle rette d’asse delle aste 1 e 4.

La condizione di equilibrio alla rotazione attorno a B fornisce lo sforzo  $N_1$  sull’asta 1; si ha:

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow -P \frac{L}{2} - P \frac{L}{2} + N_1 \frac{L}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{N_1 = 2P}$$

Il valore analitico determinato è positivo, quindi il verso ipotizzato è quello effettivo e l'asta risulta sottoposta a trazione (tirante).

È opportuno a questo punto osservare che, come appare dall'equazione di equilibrio prima scritta e contenente il solo sforzo incognito  $N_1$ , l'imposizione della condizione di equilibrio alla rotazione della porzione di struttura scelta intorno a B, polo di Ritter dell'asta 1, fa sì che i contributi degli altri due sforzi incogniti,  $N_3$  ed  $N_4$  anch'essi agenti sulla porzione di struttura considerata, siano nulli. Sono nulli infatti i bracci di tali forze rispetto a B, punto d'incontro delle loro rette d'azione (linee d'asse delle aste 3 e 4 appunto). È questa la strategia risolutiva che rende molto efficace ed immediato il metodo esposto.

La condizione di equilibrio alla rotazione attorno al polo di Ritter dell'asta 3 si traduce, ovviamente, in una condizione di equilibrio alla traslazione in direzione verticale che permette la determinazione dello sforzo  $N_3$ ; si ha:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow P - P - N_3 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{N_3 = 0}$$

L'asta 3 risulta scarica.

La condizione di equilibrio alla rotazione attorno a C fornisce infine lo sforzo  $N_4$ ; si ha:

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow -PL + P \frac{L}{2} - N_4 \frac{L}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{N_4 = -P}$$

Il valore analitico determinato è in questo caso negativo e quindi il verso ipotizzato è opposto a quello effettivo; quindi l'asta 4 è un puntone (compressore).

Nella Figura 24 si considera la sezione di Ritter t-t atta alla determinazione degli sforzi nelle aste 4, 5 e 6.

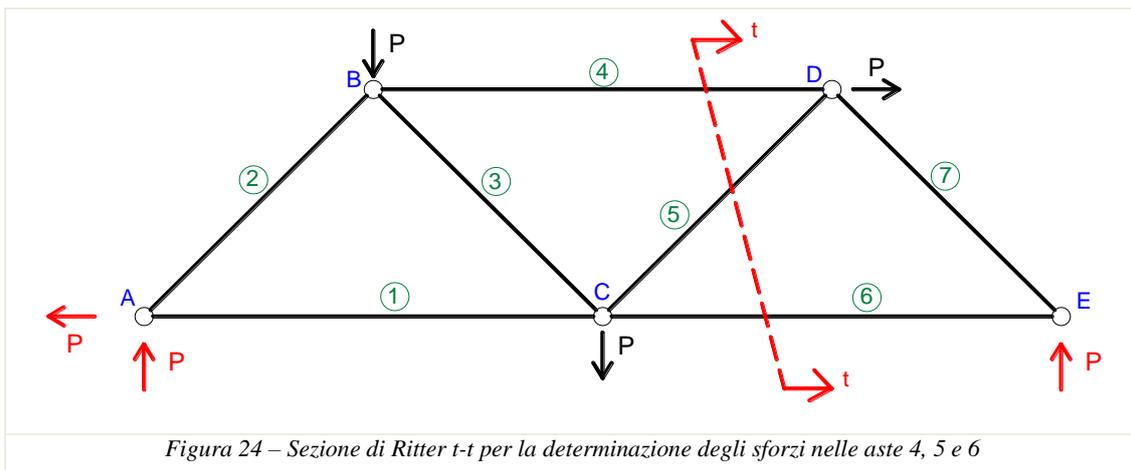
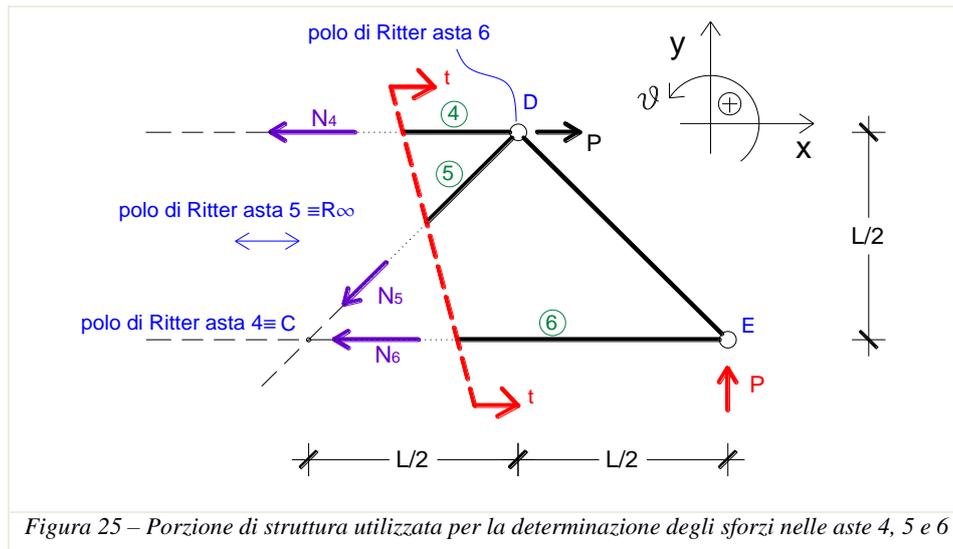


Figura 24 – Sezione di Ritter t-t per la determinazione degli sforzi nelle aste 4, 5 e 6

Considerando ad esempio la parte destra della struttura e procedendo in modo analogo a quanto fatto in precedenza si potrà allora fare riferimento allo schema seguente.



L'asta 6 avrà come polo di Ritter il nodo D, punto di intersezione delle linee d'asse delle aste 4 e 5; l'asta 4 avrà come polo di Ritter il nodo C, intersezione degli assi delle aste 5 e 6; l'asta 5, infine, avrà come polo di Ritter il punto all'infinito della direzione orizzontale, intersezione delle rette d'asse delle aste 4 e 6.

La condizione di equilibrio alla rotazione attorno a D fornisce lo sforzo  $N_6$  sull'asta 6; si ha:

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow P \frac{L}{2} - N_6 \frac{L}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{N_6 = P}$$

L'asta 6 è dunque un tirante.

La condizione di equilibrio alla rotazione attorno al polo di Ritter dell'asta 5 si traduce in una condizione di equilibrio alla traslazione in direzione verticale che fornisce lo sforzo  $N_5$  sull'asta 5; si ha:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow P - N_5 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{N_5 = P \frac{2}{\sqrt{2}} = P\sqrt{2}}$$

L'asta 5 è quindi sottoposta a trazione (tirante).

La condizione di equilibrio alla rotazione attorno a C fornisce infine lo sforzo  $N_4$ ; tale condizione non viene scritta in quanto lo sforzo  $N_4$  è già stato precedentemente valutato per mezzo della sezione di Ritter s-s.

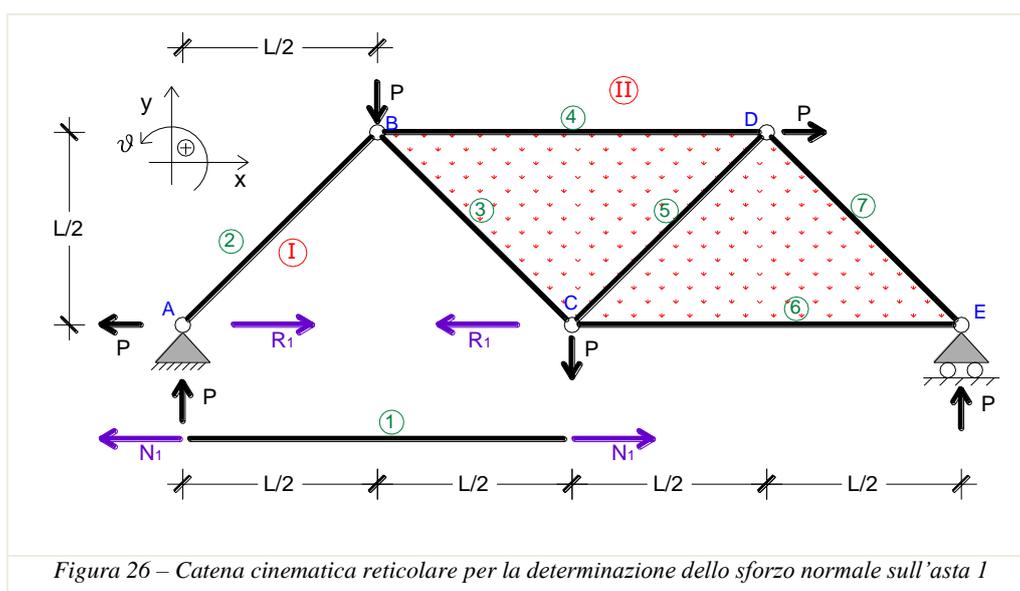
### Metodo diretto

Lo sforzo normale in un'asta della travatura reticolare piana può essere valutato considerando la condizione di equilibrio del *cinematismo* ottenuto sopprimendo l'asta in esame (asta *i-esima* ad esempio) ed introducendo le azioni incognite ( $R_i$ ) che tale asta trasmette ai nodi che le competono. I versi di tali azioni possono essere scelti arbitrariamente; nel seguito si adotterà la convenzione di ipotizzare lo sforzo normale nell'asta soppressa positivo (di trazione) e pertanto le azioni  $R_i$  saranno assunte con verso uscente dai nodi cui l'asta era collegata.

Applicando tale metodo ad una travatura reticolare piana isostatica, già risolta per vincoli esterni, la soppressione di un'asta darà luogo ad un *cinematismo con un solo grado di libertà* e cioè, in questo contesto, ad una *catena cinematica reticolare*. La condizione di equilibrio di tale catena cinematica reticolare si tradurrà in un'unica equazione avente per incognita l'azione dell'asta soppressa la cui soluzione fornirà, in intensità e verso, tale azione e di conseguenza lo sforzo normale cercato. È opportuno osservare inoltre che la soppressione di un'asta di contorno genera tipicamente un sistema costituito da due porzioni (indeformabili) di struttura mutuamente collegate da una cerniera. L'imposizione della *condizione di equilibrio parziale* di una delle due porzioni rispetto all'altra (equilibrio alla rotazione relativa) fornisce in modo immediato (senza cioè ricorrere allo studio della catena cinematica reticolare) lo sforzo normale cercato.

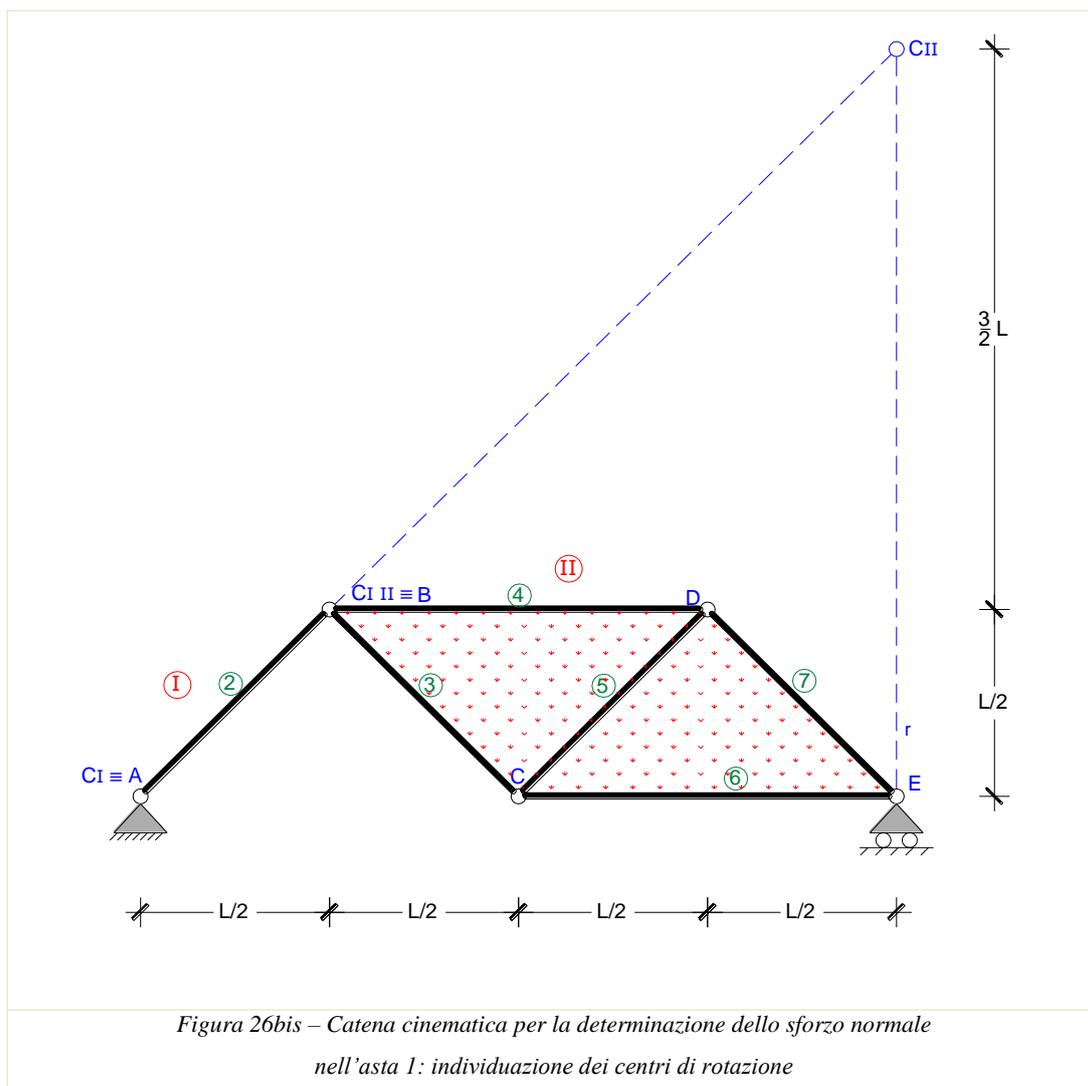
### SFORZO NORMALE NELL'ASTA 1

Con riferimento alla travatura in esame si consideri la catena cinematica reticolare riportata in Figura 26 ed atta, per quanto detto, all'individuazione dello sforzo normale nell'asta 1. Tale catena cinematica infatti è stata ottenuta eliminando l'asta 1 dalla travatura e introducendo sui nodi A e C che ad essa competono le azioni  $R_1$  (per ipotesi positive e quindi con versi uscenti dai nodi) che l'asta esercita su di essi.

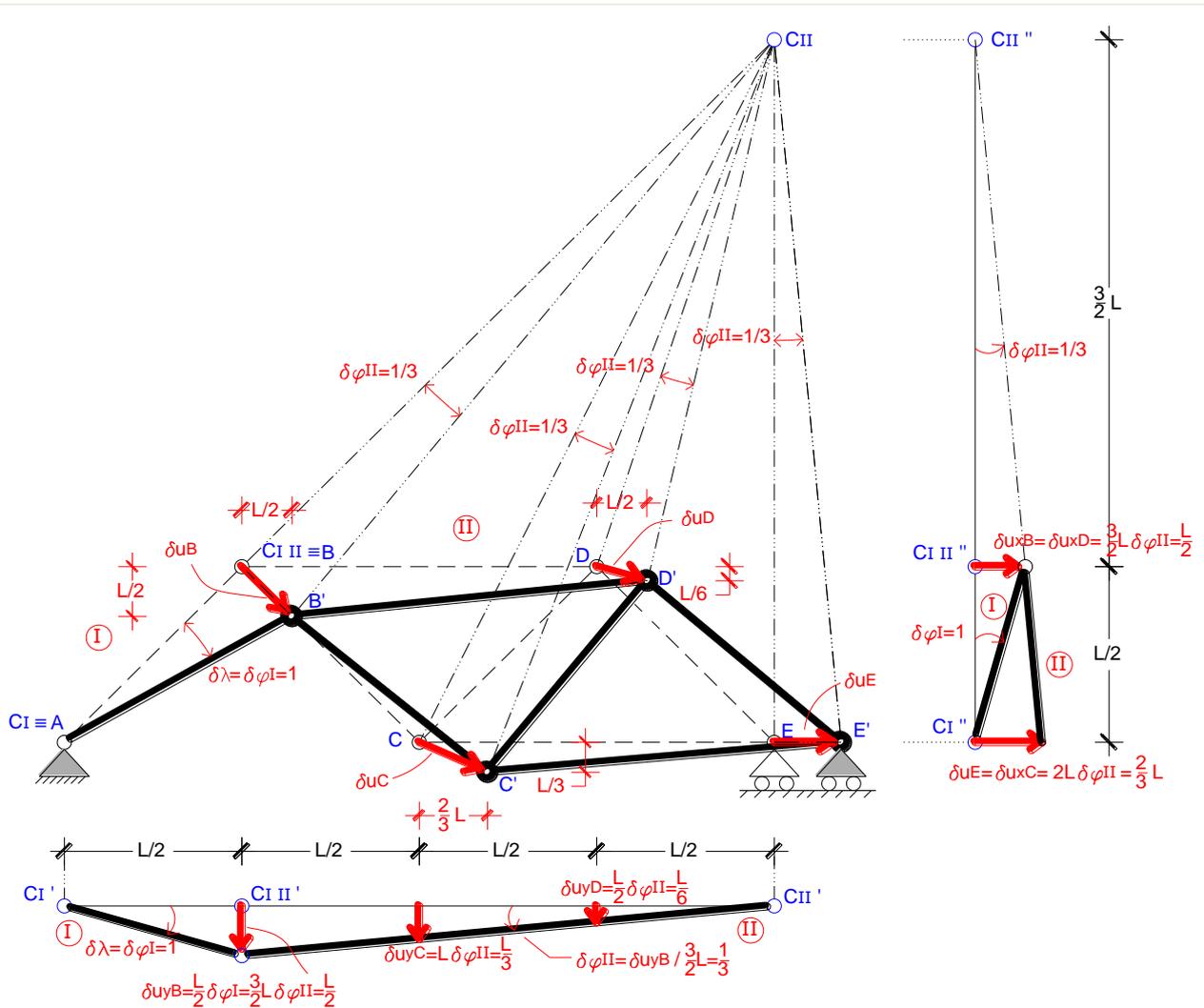


La condizione di equilibrio della catena cinematica reticolare ottenuta può esprimersi attraverso il principio dei lavori virtuali (P.L.V.) considerando a tal fine la classe delle configurazioni spostate individuate da *un unico parametro lagrangiano*  $\delta\lambda$ , uno è infatti il grado di libertà del sistema. Come appare dallo schema di Figura 26, il sistema (labile) in esame risulta *costituito da due corpi rigidi* collegati mutuamente nel nodo B indicati in Figura con I (coincidente con l'asta 2) e II (costituito dalle due maglie triangolari campite). La configurazione variata (o spostata) della catena cinematica può allora essere individuata in questo caso considerando che i centri assoluti di rotazione dei corpi I e II, siano essi  $C_I$  e  $C_{II}$ , devono essere allineati

con il centro relativo  $C_{I\ II}$ . In particolare: il centro assoluto  $C_I$  coincide con l'occhio della cerniera A; il centro relativo  $C_{I\ II}$  coincide con la cerniera B; il centro  $C_{II}$  deve appartenere alla retta  $r$  passante per E ed ortogonale al piano di scorrimento del carrello in E (Figura 26bis). La posizione di  $C_{II}$  può quindi individuarsi per via grafica essendo  $C_{II}$  punto di intersezione della congiungente A-B con la retta  $r$  così come mostrato in Figura 26bis.



Una possibile spostata della catena cinematica in esame è individuabile assegnando una rotazione oraria del corpo I attorno a  $C_I$  (ciò equivale a scegliere come parametro lagrangiano  $\delta\lambda$  la rotazione  $\delta\varphi_I$ ). In Figura 26ter si riporta la spostata ottenuta per  $\delta\lambda = \delta\varphi_I = 1$  (il valore unitario è scelto per comodità di conto). La spostata è individuata sia sulla struttura, dove sono evidenziati gli spostamenti assoluti, sia in termini di proiezioni così da rendere più agevole la valutazione delle componenti di spostamento dei punti (nodi) ove sono applicati i carichi.



$$\delta\varphi_I = 1 \Rightarrow \delta u_B = \overline{AB} \operatorname{tg}(\delta\varphi_I) = \overline{AB} \cdot 1 = \frac{L}{2}\sqrt{2} \Rightarrow \delta u_{yB} = \delta u_B \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{L}{2}$$

$$\delta\varphi_{II} = \operatorname{tg}(\delta\varphi_{II}) = \frac{\overline{\delta u_B}}{\overline{BC_{II}}} = \frac{L}{2}\sqrt{2} / \left(\frac{3}{2}L\sqrt{2}\right) = \frac{1}{3}$$

$$\delta u_C = \overline{CC_{II}} \delta\varphi_{II} = \sqrt{L^2 + (2L)^2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{L\sqrt{5}}{3}$$

$$\delta u_D = \overline{DC_{II}} \delta\varphi_{II} = \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}L\right)^2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{L}{3}\sqrt{2.5}$$

$$\delta u_E = \delta u_{E_x} = \overline{EC_{II}} \delta\varphi_{II} = 2L \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}L$$

Figura 26ter – Spostata della catena cinematica reticolare di Fig. 26

L'equazione dei lavori virtuali ( $\delta L = 0 \quad \forall \delta\lambda$ ) nell'unica incognita  $R_1$  si scrive sommando il lavoro compiuto dalle forze i cui punti di applicazione subiscono uno spostamento nella direzione delle forze stesse. Ciascun contributo, ovviamente, è assunto positivo quando forza e spostamento sono concordi, negativo in

caso contrario. Con riferimento alla Fig. 26, ove sono indicati i carichi agenti, e alla Fig. 26ter, ove sono riportate le corrispondenti componenti di spostamento, può scriversi:

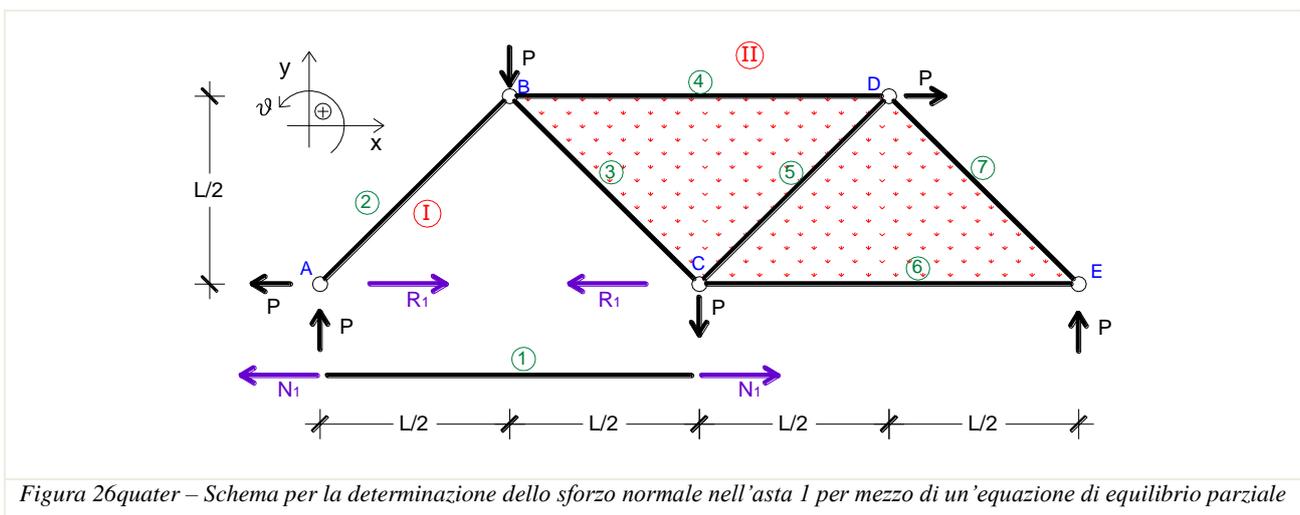
$$\delta L|_{\delta \lambda=1} = P \cdot \delta u_{yB} + P \cdot \delta u_{xD} + P \cdot \delta u_{yC} - R_1 \cdot \delta u_{xC} = P \frac{L}{2} + P \frac{L}{2} + P \frac{L}{3} - R_1 \frac{2}{3} L$$

Si noti che essendo  $\delta u_E$  ed  $R_{yE} = P$  mutuamente ortogonali il contributo al lavoro è identicamente nullo; ponendo, per il P.L.V.,  $\delta L = 0$  si ha:

$$P \frac{L}{2} + P \frac{L}{2} + P \frac{L}{3} - R_1 \frac{2}{3} L = 0 \Rightarrow \boxed{R_1 = 2P}$$

Il valore analitico determinato per  $R_1$  è positivo, il verso ipotizzato è corretto, e quindi l'asta 1 è in trazione (tirante).

In modo alternativo, essendo l'asta in esame un'asta di contorno, la determinazione dello sforzo normale su di essa agente può effettuarsi imponendo una condizione di equilibrio parziale di una delle porzioni (indeformabili) di struttura rispetto all'altra.

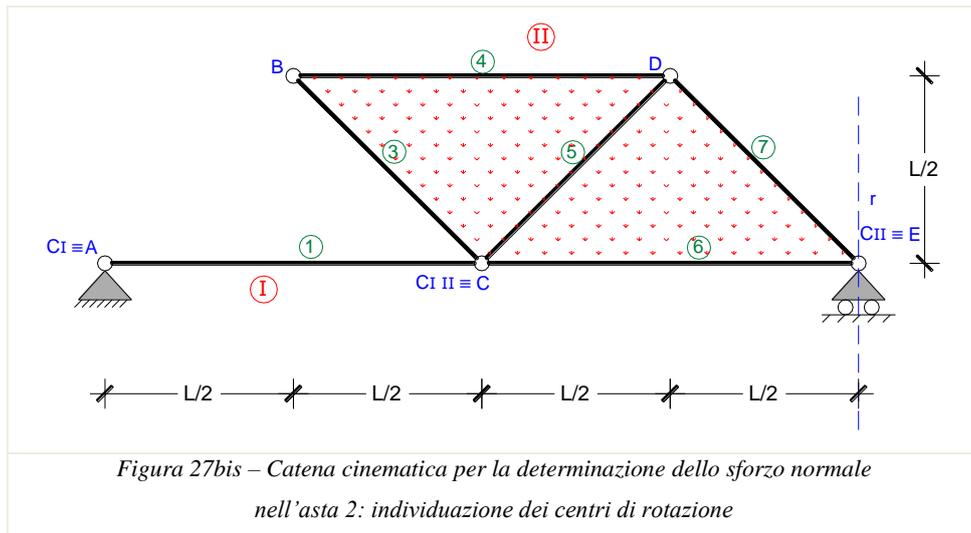


Con riferimento alla Fig. 26quater la condizione di equilibrio parziale è una condizione di equilibrio alla rotazione relativa intorno alla cerniera B. Imponendo ad esempio l'equilibrio alla rotazione della porzione I rispetto al nodo B si ottiene in modo immediato (senza cioè ricorrere allo studio della catena cinematica reticolare) l'azione dell'asta soppressa  $R_1$  e quindi lo sforzo normale incognito  $N_1$  (uguale in modulo e direzione ma di verso opposto), si ha infatti:

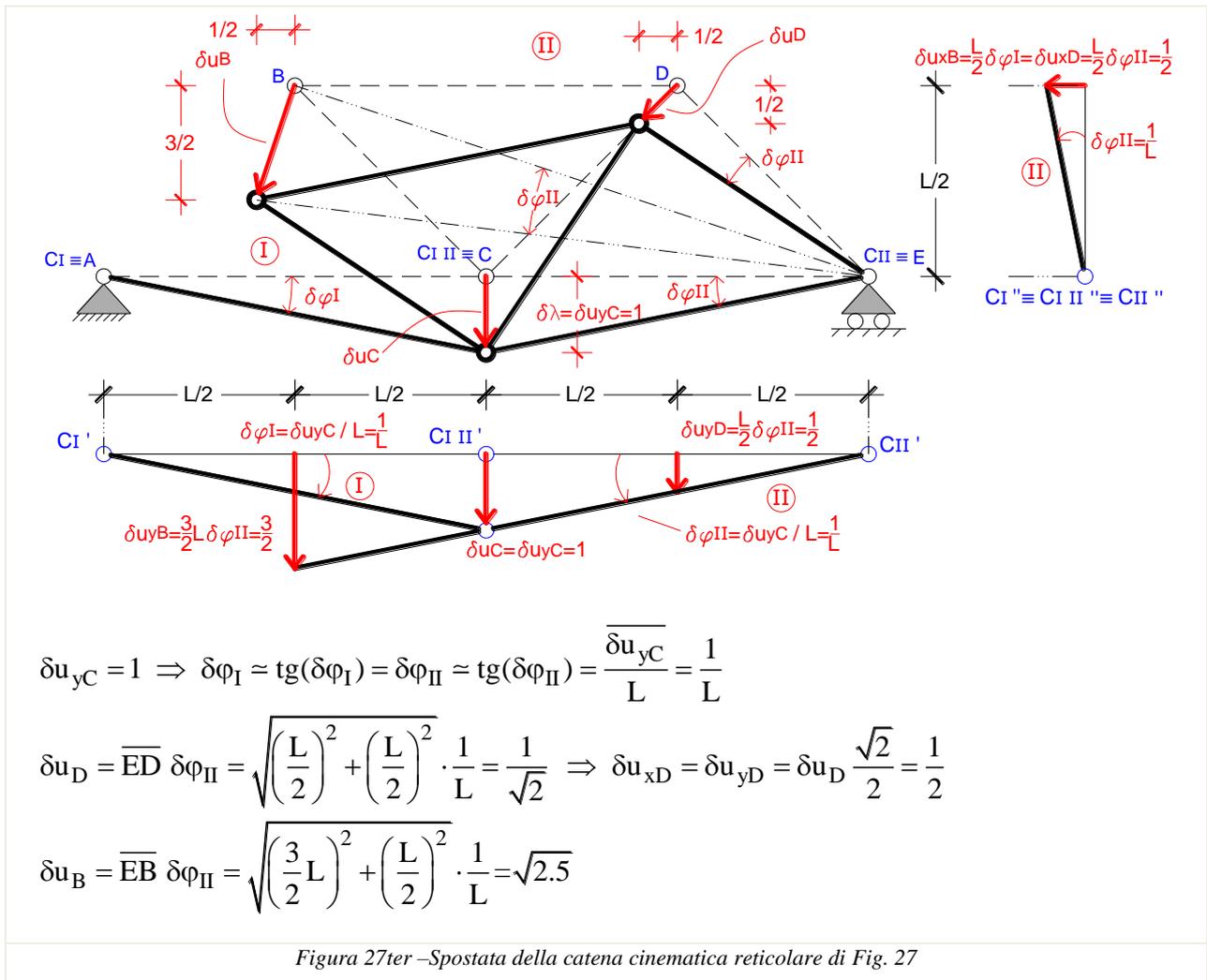
$$\sum M_B^I = 0 \Rightarrow R_1 \frac{L}{2} - P \frac{L}{2} - P \frac{L}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{R_1 = 2P}$$

Il valore analitico determinato per  $R_1$  è positivo, il verso ipotizzato è corretto, e quindi l'asta 1 è in trazione (tirante).





Una possibile spostata della catena cinematica in esame è individuabile assegnando un abbassamento verticale del punto C (ciò equivale a scegliere come parametro lagrangiano  $\delta\lambda$  lo spostamento  $\delta u_{yC}$ ). In Figura 27ter si riporta la spostata ottenuta per  $\delta\lambda = \delta u_{yC} = 1$  (il valore unitario è scelto per comodità di conto). La spostata è individuata sia sulla struttura, dove sono evidenziati gli spostamenti assoluti, sia in termini di proiezioni così da rendere più agevole la valutazione delle componenti di spostamento dei punti (nodi) ove sono applicati i carichi.



L'equazione dei lavori virtuali ( $\delta L = 0 \quad \forall \delta \lambda$ ) nell'unica incognita  $R_2$  si scrive sommando il lavoro compiuto dalle forze i cui punti di applicazione subiscono uno spostamento nella direzione delle forze stesse. Ciascun contributo, ovviamente, è assunto positivo quando forza e spostamento sono concordi, negativo in caso contrario. Con riferimento alla Fig. 27, ove sono indicati i carichi agenti, e alla Fig. 27ter, ove sono riportate le corrispondenti componenti di spostamento, può scriversi:

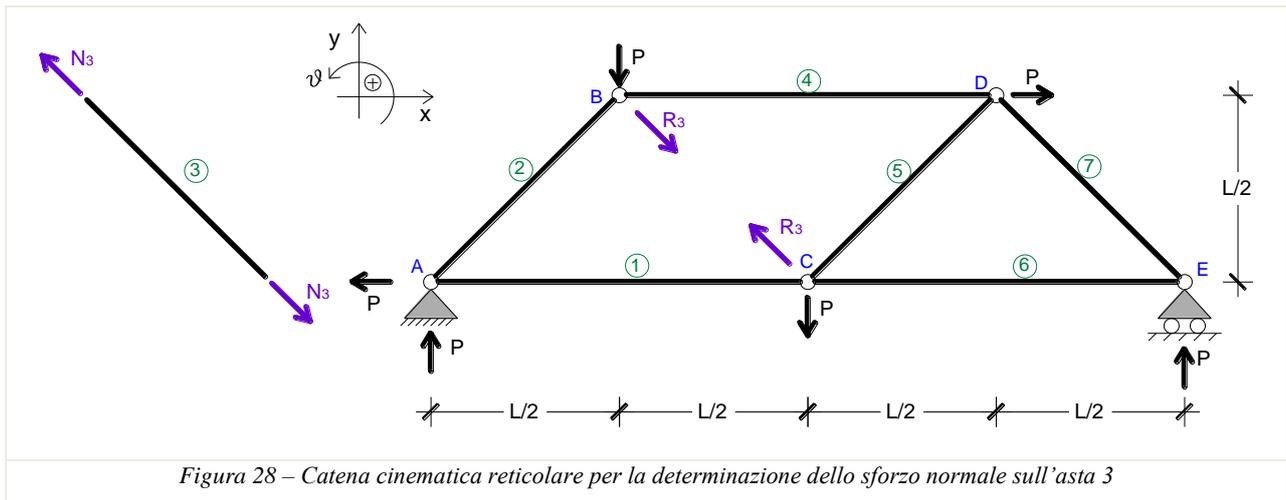
$$\delta L|_{\delta \lambda=1} = P \cdot \delta u_{yB} - P \cdot \delta u_{xD} + P \cdot \delta u_{yC} + R_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \delta u_{xB} + R_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \delta u_{yB}$$

Si noti che il lavoro compiuto dalla forza  $R_2$  applicata in B (cfr. Fig. 27) per effetto dello spostamento  $\delta u_B$  (cfr. Fig. 27ter) è stato computato, per semplicità, come somma dei lavori compiuti dalle componenti di  $R_2$  secondo x e y per i corrispondenti spostamenti; si ha in definitiva:

$$\delta L|_{\delta \lambda=1} = P \frac{3}{2} - P \frac{1}{2} + P \cdot 1 + R_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{2} + R_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{3}{2}$$

ponendo, per il P.L.V.,  $\delta L = 0$  si ottiene:

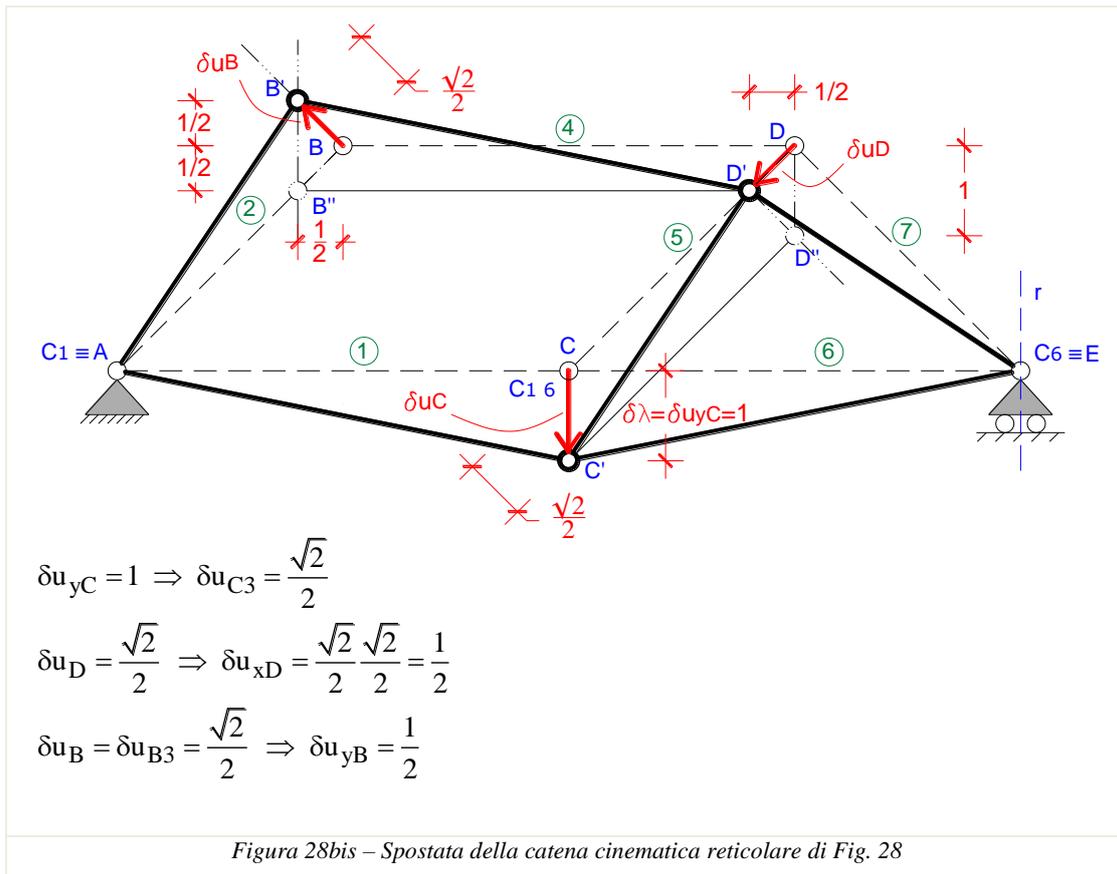




La condizione di equilibrio della catena cinematica reticolare ottenuta può esprimersi attraverso il principio dei lavori virtuali (P.L.V.) considerando a tal fine la classe delle configurazioni spostate individuate da *un unico parametro lagrangiano*  $\delta\lambda$ , uno è infatti il grado di labilità del sistema. Come appare dallo schema di Figura 28, e a differenza dei casi in cui l’asta rimossa è un’asta di contorno, la catena cinematica da analizzare non è costituita da due porzioni rigide mutuamente collegate da una cerniera interna; essa presenta invece un quadrilatero articolato, nel caso in esame la maglia ABDC.

L’individuazione dei centri di rotazione (assoluti e relativi) delle aste costituenti il sistema in esame, seppur possibile, risulterebbe alquanto onerosa oltre che non necessaria. La spostata di una catena cinematica reticolare può essere individuata infatti senza una completa individuazione dei centri di rotazione. A tal fine è sufficiente tenere presente che i *nod*i della travatura sono tutti *centri relativi di rotazione* per le aste che essi collegano e le *aste*, durante un qualunque cambiamento di configurazione, mantengono *invariata* la loro *lunghezza*. (Si è ovviamente nell’ambito dell’ipotesi di spostamenti infinitesimi.) È sempre possibile inoltre, data l’isostaticità del sistema originario, individuare il centro assoluto di almeno un’asta.

Con riferimento alla Fig. 28bis si ha che la cerniera A è centro assoluto di rotazione dell’asta 1, sia esso  $C_1$ ; considerando quindi le aste 1 e 6, in virtù dei teoremi delle catene cinematiche ed essendo il nodo C centro relativo di rotazione per tali aste, sia esso  $C_{1\ 6}$ , è facile individuare il centro assoluto dell’asta 6,  $C_6$ . Quest’ultimo deve trovarsi infatti sulla congiungente  $C_1-C_{1\ 6}$  e sulla retta  $r$  passante per E e perpendicolare al piano di scorrimento del carrello E; esso pertanto coincide con il nodo E.



Una possibile spostata della catena cinematica in esame è allora individuabile scegliendo come parametro lagrangiano l’abbassamento del nodo C, cioè assumendo  $\delta\lambda = \delta u_{yC} = 1$  (il valore unitario è scelto per comodità). Come illustrato in Figura 28bis, tale scelta individua le spostate delle aste 1 e 6 che ruotano ciascuna attorno al proprio centro assoluto di rotazione. A questo punto, supponendo di sconnettere le aste 5 e 7 dal nodo D, si può pensare che l’asta 5 “segua” il nodo C nella sua traslazione verticale e che, quindi, essa assuma la posizione C’D’’ indicata con linea continua sottile in Figura 28bis. In realtà, poiché l’asta 5 può ruotare attorno a C’ il suo estremo D può trovarsi in un qualunque punto della perpendicolare per D’’ alla direzione dell’asta. L’asta 7 d’altra parte ruota attorno ad E e quindi il suo estremo D può trovarsi in un qualunque punto della perpendicolare per D al suo asse. Le due aste, 5 e 7, possono allora riconnettersi, mantenendo invariata la loro lunghezza, nel punto D’, intersezione delle due anzidette perpendicolari e posizione effettiva del nodo D nella spostata generata da  $\delta\lambda = \delta u_{yC} = 1$ . Con ragionamento del tutto analogo, supponendo di sconnettere le aste 2 e 4 dal nodo B, si può determinare la posizione B’ di quest’ultimo individuando così la spostata della catena cinematica reticolare in esame. La procedura è graficizzata in Fig. 28bis dove si evidenziano gli spostamenti assoluti dei nodi della travatura e le loro componenti nelle direzioni delle forze su di essi agenti.

L’equazione dei lavori virtuali ( $\delta L = 0 \quad \forall \delta\lambda$ ) nell’unica incognita  $R_3$  si scrive sommando il lavoro compiuto dalle forze i cui punti di applicazione subiscono uno spostamento nella direzione delle forze stesse.

Ciascun contributo, ovviamente, è assunto positivo quando forza e spostamento sono concordi, negativo in caso contrario. Con riferimento alla Fig. 28, ove sono indicati i carichi agenti, e alla Fig. 28bis, ove sono riportate le corrispondenti componenti di spostamento, può scriversi:

$$\delta L|_{\delta\lambda=1} = P \cdot \delta u_{yC} - R_3 \cdot \delta u_{C3} - P \cdot \delta u_{xD} - R_3 \cdot \delta u_{B3} - P \cdot \delta u_{yB} = P \cdot 1 - R_3 \frac{\sqrt{2}}{2} - P \frac{1}{2} - R_3 \frac{\sqrt{2}}{2} - P \frac{1}{2}$$

dove  $\delta u_{C3}$  e  $\delta u_{B3}$  indicano le componenti di spostamento dei nodi C e B valutate nella direzione dell'asta 3, e quindi di  $R_3$ .

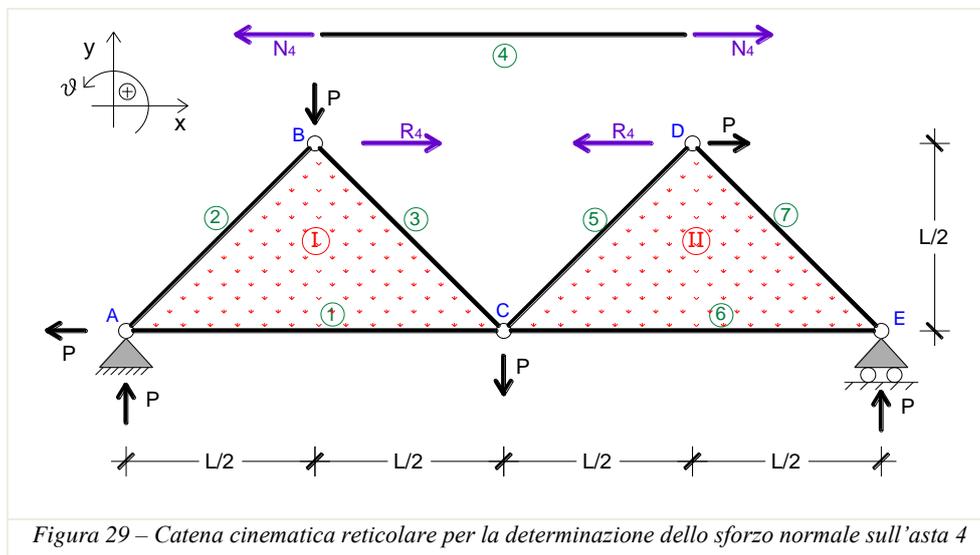
Ponendo, per il P.L.V.,  $\delta L = 0$  si ha:

$$P \cdot 1 - R_3 \frac{\sqrt{2}}{2} - P \frac{1}{2} - R_3 \frac{\sqrt{2}}{2} - P \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow P - R_3 \sqrt{2} - P = 0 \Rightarrow \boxed{R_3 = 0}$$

L'asta 3 risulta scarica. Si noti che in questo caso, non trattandosi di un'asta di contorno, la condizione di equilibrio parziale (metodo speditivo) non si può imporre!! Non vi sono, come già osservato, due porzioni (rigide) mutuamente incernierate.

#### SFORZO NORMALE NELL'ASTA 4

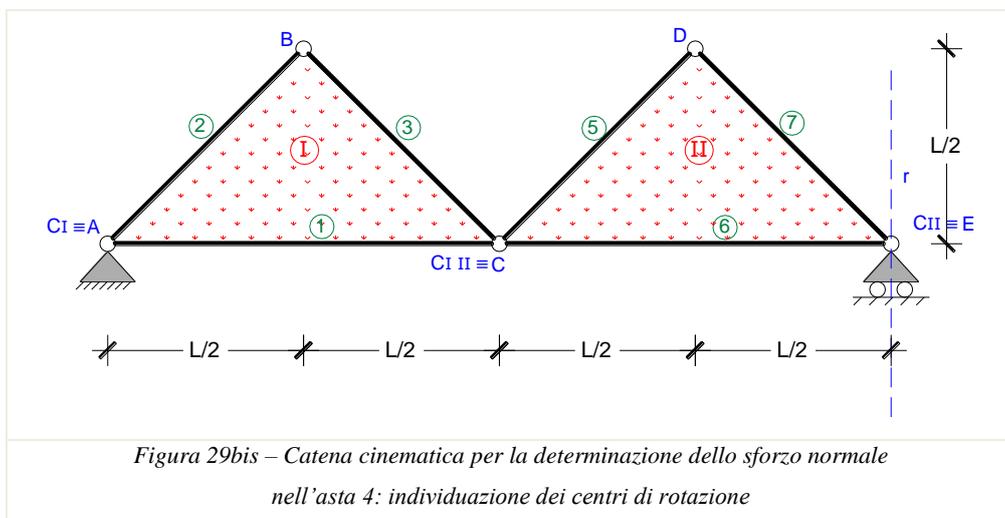
Con riferimento alla travatura in esame si consideri la catena cinematica reticolare riportata in Figura 29 ed atta, per quanto detto, all'individuazione dello sforzo normale nell'asta 4. Tale catena cinematica infatti è stata ottenuta eliminando l'asta 4 dalla travatura e introducendo sui nodi B e D che ad essa competono le azioni  $R_4$  (per ipotesi positive e quindi con versi uscenti dai nodi) che l'asta esercita su di essi.



La condizione di equilibrio della catena cinematica reticolare ottenuta può esprimersi attraverso il principio dei lavori virtuali (P.L.V.) considerando a tal fine la classe delle configurazioni spostate individuate da *un unico parametro lagrangiano*  $\delta\lambda$ , uno è infatti il grado di labilità del sistema. Come appare dallo schema di Figura 29, il sistema (labile) in esame risulta *costituito da due corpi rigidi* collegati mutuamente nel nodo C

indicati in Figura con I e II. In particolare I è costituito dalla maglia triangolare ABC, II è invece costituito dalla maglia triangolare CDE.

La configurazione variata (o spostata) della catena cinematica può allora essere individuata agevolmente considerando che i centri assoluti di rotazione dei corpi I e II, siano  $C_I$  e  $C_{II}$ , devono essere allineati con il centro relativo  $C_{I II}$ . In particolare: il centro assoluto  $C_I$  coincide con l'occhio della cerniera A; il centro relativo  $C_{I II}$  coincide con la cerniera C; il centro  $C_{II}$  deve appartenere sia alla retta  $r$  passante per E ed ortogonale al piano di scorrimento del carrello in E sia alla congiungente  $C_I - C_{I II}$ . La posizione di  $C_{II}$  può quindi individuarsi per via grafica risultando  $C_{II}$  coincidente con E, come mostrato in Figura 29bis.



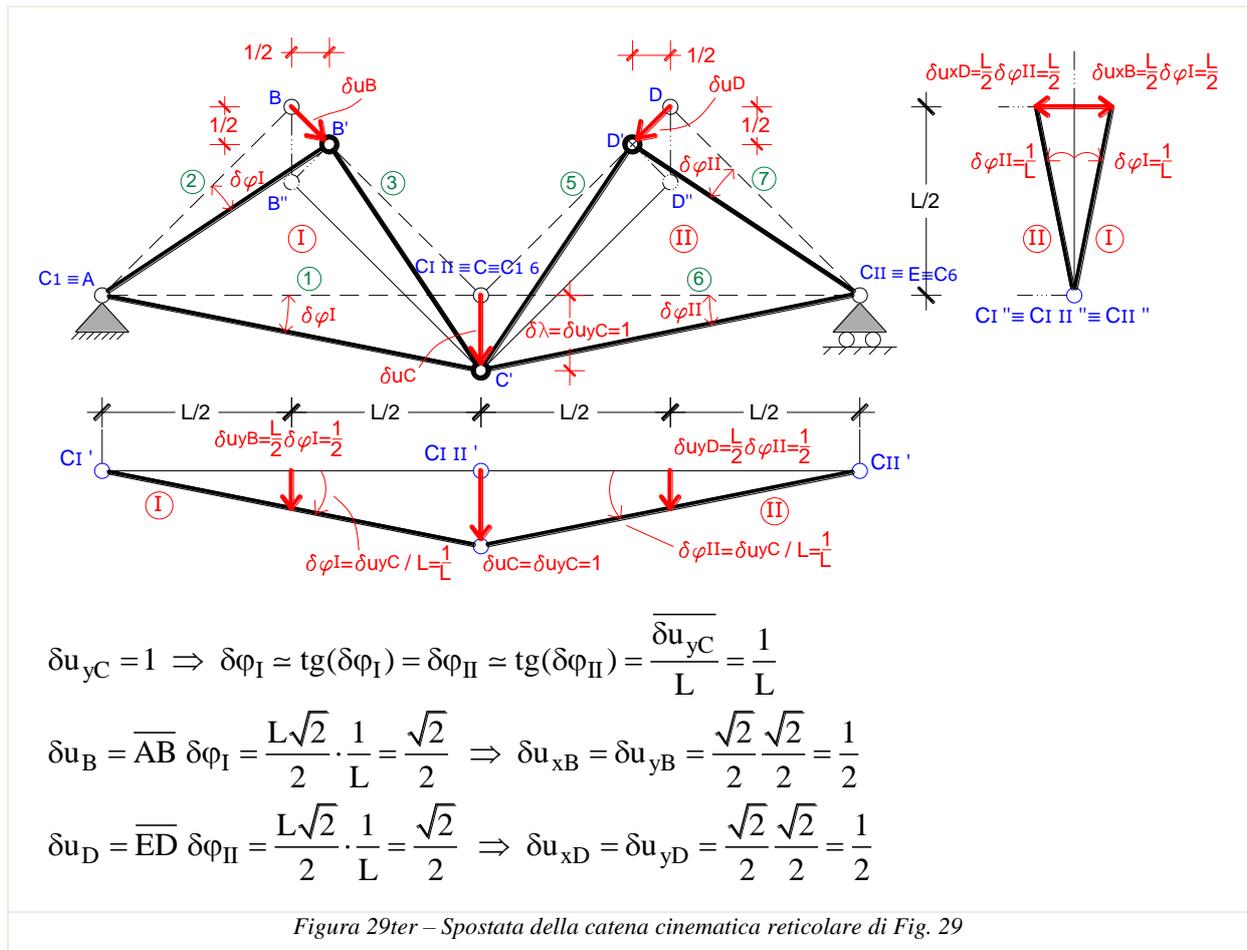
Una possibile spostata della catena cinematica in esame è individuabile assegnando un abbassamento verticale del punto C (ciò equivale a scegliere come parametro lagrangiano  $\delta\lambda$  lo spostamento  $\delta u_{yC}$ ). In Figura 29ter si riporta la spostata ottenuta per  $\delta\lambda = \delta u_{yC} = 1$  (il valore unitario è scelto per comodità di conto). La spostata è individuata sia sulla struttura, dove sono evidenziati gli spostamenti assoluti, sia in termini di proiezioni così da rendere più agevole la valutazione delle componenti di spostamento dei punti (nodi) ove sono applicati i carichi.

Come appare dalla Figura 29ter, la spostata della catena cinematica è facilmente ottenibile considerando la rotazione delle due porzioni rigide I e II attorno ai rispettivi centri assoluti  $C_I$  e  $C_{II}$ ; tuttavia tale spostata è individuabile *anche* attraverso la costruzione già descritta a proposito della valutazione dello sforzo nell'asta 3 e fondata sulla considerazione che la spostata di una catena cinematica reticolare può essere individuata senza una completa individuazione dei centri di rotazione. A tal fine è sufficiente tenere presente che i *nodi* della travatura sono tutti *centri relativi di rotazione* per le aste che essi collegano e le *aste*, durante un qualunque cambiamento di configurazione, mantengono *invariata* la loro *lunghezza* (Si è ovviamente

nell'ambito dell'ipotesi di spostamenti infinitesimi.) È sempre possibile inoltre, data l'isostaticità del sistema originario, individuare il centro assoluto di almeno un'asta.

Con riferimento alla Fig. 29ter si ha che la cerniera A è centro assoluto di rotazione dell'asta 1, sia esso  $C_1$ ; considerando quindi le aste 1 e 6, in virtù dei teoremi delle catene cinematiche ed essendo il nodo C centro relativo di rotazione per tali aste, sia esso  $C_{16}$ , è facile individuare il centro assoluto dell'asta 6,  $C_6$ . Quest'ultimo deve trovarsi infatti sulla congiungente  $C_1-C_{16}$  e sulla retta r passante per E e perpendicolare al piano di scorrimento del carrello E; esso pertanto coincide con il nodo E.

Attivato il parametro lagrangiano  $\delta\lambda = \delta u_{yC} = 1$  e quindi individuata la spostata delle aste 1 e 6 che ruotano ciascuna attorno al proprio centro assoluto di rotazione, si può supporre di sconnettere le aste 2 e 3 al nodo B. Si può pensare quindi che l'asta 3 "segua" il nodo C nella sua traslazione verticale e che, quindi, essa assuma la posizione C'B'' indicata con linea continua sottile in Figura 29ter. In realtà, poiché l'asta 3 può ruotare attorno a C' il suo estremo B può trovarsi in un qualunque punto della perpendicolare per B'' alla direzione dell'asta. L'asta 2 d'altra parte ruota attorno ad A e quindi il suo estremo B può trovarsi in un qualunque punto della perpendicolare per B al suo asse. Le due aste, 2 e 3, possono allora riconnettersi, mantenendo invariata la loro lunghezza, nel punto B', intersezione delle due anzidette perpendicolari e posizione effettiva del nodo B nella spostata generata da  $\delta\lambda = \delta u_{yC} = 1$ . Con ragionamento del tutto analogo, supponendo di sconnettere le aste 5 e 7 dal nodo D, si può determinare la posizione D' di quest'ultimo individuando così la spostata della catena cinematica reticolare in esame. La procedura è graficizzata in Fig. 29ter dove si evidenziano gli spostamenti assoluti dei nodi della travatura e le loro componenti nelle direzioni delle forze su di essi agenti.



L'equazione dei lavori virtuali ( $\delta L = 0 \quad \forall \delta \lambda$ ) nell'unica incognita  $R_4$  si scrive sommando il lavoro compiuto dalle forze i cui punti di applicazione subiscono uno spostamento nella direzione delle forze stesse. Ciascun contributo, ovviamente, è assunto positivo quando forza e spostamento sono concordi, negativo in caso contrario. Con riferimento alla Fig. 29, ove sono indicati i carichi agenti, e alla Fig. 29ter, ove sono riportate le corrispondenti componenti di spostamento, può scriversi:

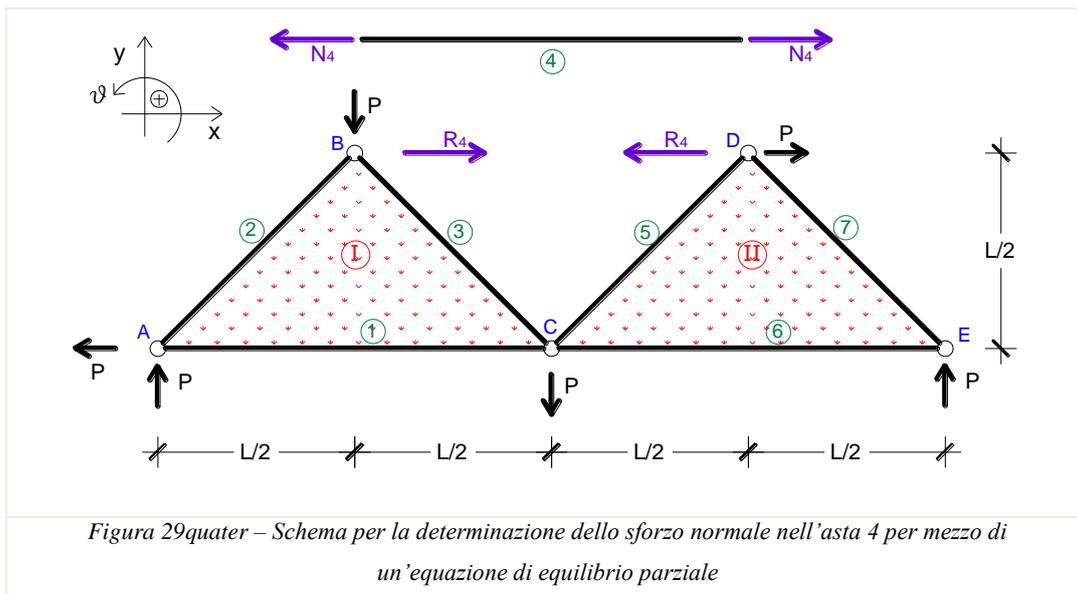
$$\delta L|_{\delta \lambda=1} = P \cdot \delta u_{yC} + P \cdot \delta u_{yB} - P \cdot \delta u_{xD} + R_4 \cdot \delta u_{xB} + R_4 \cdot \delta u_{xD} = P \cdot 1 + P \frac{1}{2} - P \frac{1}{2} + R_4 \frac{1}{2} + R_4 \frac{1}{2}$$

ponendo, per il P.L.V.,  $\delta L = 0$  si ha:

$$P \cdot 1 + P \frac{1}{2} - P \frac{1}{2} + R_4 \frac{1}{2} + R_4 \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{R_4 = -P}$$

Il valore analitico determinato per  $R_4$  è negativo, il verso ipotizzato è opposto a quello effettivo, e quindi l'asta 4 è in compressione (puntone).

In modo alternativo, essendo l'asta in esame un'asta di contorno, la determinazione dello sforzo normale su di essa agente può effettuarsi imponendo una condizione di equilibrio parziale di una delle porzioni (indeformabili) di struttura rispetto all'altra.



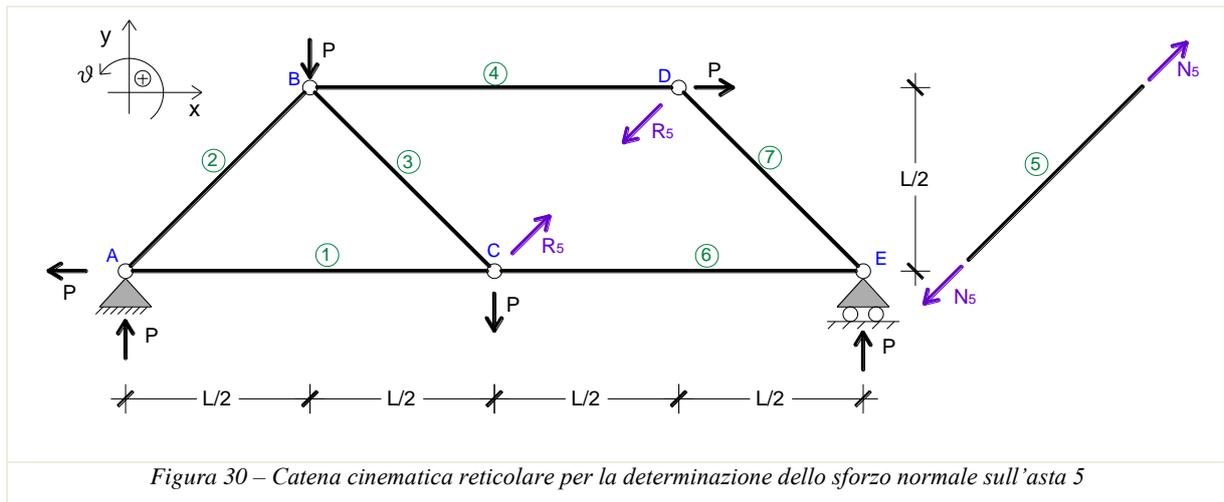
Con riferimento alla Fig. 29quater la condizione di equilibrio parziale è una condizione di equilibrio alla rotazione relativa intorno alla cerniera C. Imponendo ad esempio l’equilibrio alla rotazione della porzione I rispetto al nodo C si ottiene in modo immediato (senza cioè ricorrere allo studio della catena cinematica reticolare) l’azione dell’asta soppressa  $R_4$  e quindi lo sforzo normale incognito  $N_4$  (uguale in modulo e direzione ma di verso opposto), si ha infatti:

$$\sum M_C^I = 0 \Rightarrow -R_4 \frac{L}{2} - PL + P \frac{L}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{R_4 = -P}$$

Il valore analitico determinato per  $R_4$  è negativo, il verso ipotizzato è opposto a quello effettivo, e quindi l’asta 4 è in compressione (puntone).

**SFORZO NORMALE NELL’ASTA 5**

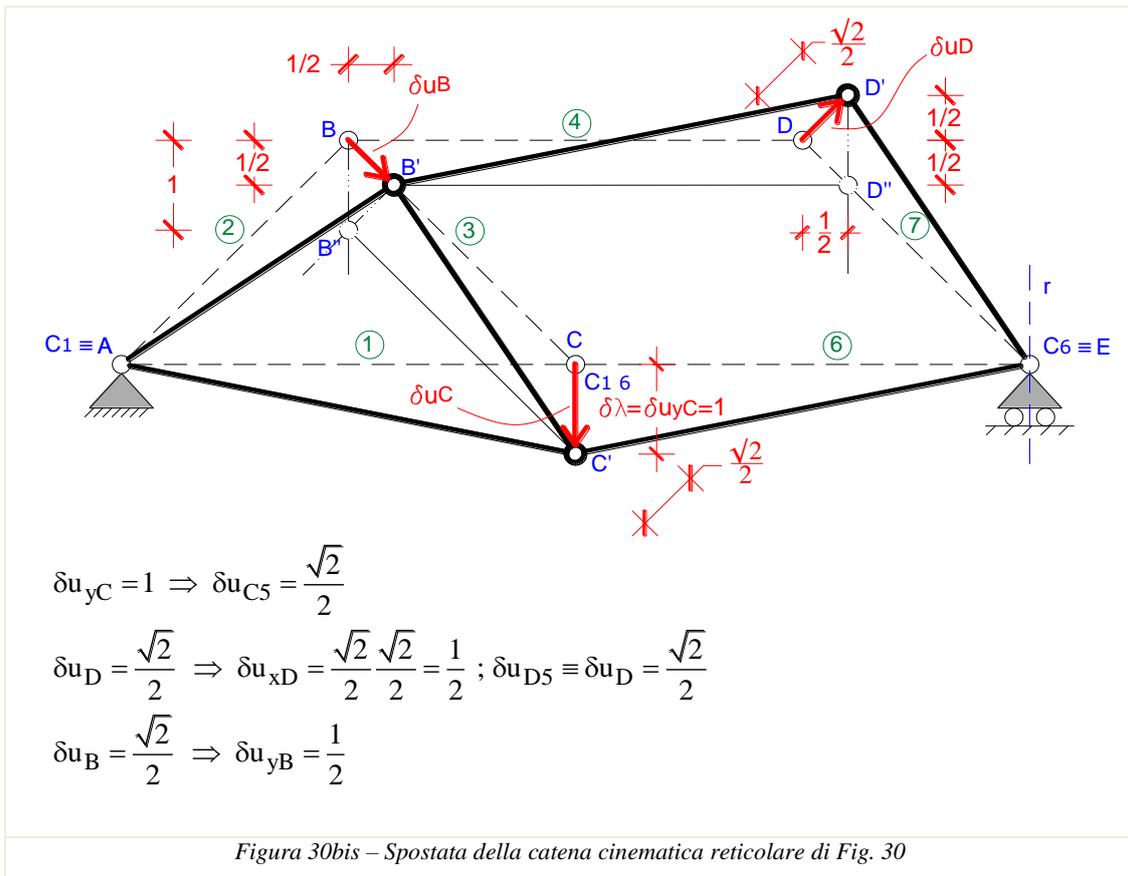
Si consideri la catena cinematica reticolare riportata in Figura 30 atta all’individuazione dello sforzo normale nell’asta 5. Tale catena cinematica è stata ottenuta eliminando l’asta 5 dalla travatura e introducendo sui nodi C e D, che ad essa competono, le azioni  $R_5$  (positive per ipotesi) che l’asta esercita su di essi.



La condizione di equilibrio della catena cinematica reticolare ottenuta può esprimersi attraverso il principio dei lavori virtuali (P.L.V.) considerando a tal fine la classe delle configurazioni spostate individuate da *un unico parametro lagrangiano*  $\delta\lambda$ , uno è infatti il grado di labilità del sistema. Come appare dallo schema di Figura 30, e a differenza dei casi in cui l'asta rimossa è un'asta di contorno, la catena cinematica da analizzare non è costituita da due porzioni rigide mutuamente collegate da una cerniera interna; essa presenta invece un quadrilatero articolato, nel caso in esame la maglia BCED.

L'individuazione dei centri di rotazione (assoluti e relativi) delle aste costituenti il sistema in esame, seppur possibile, risulterebbe alquanto onerosa oltre che non necessaria. La spostata di una catena cinematica reticolare può essere individuata infatti senza una completa individuazione dei centri di rotazione. A tal fine è sufficiente tenere presente che i *nodi* della travatura sono tutti *centri relativi di rotazione* per le aste che essi collegano e le *aste*, durante un qualunque cambiamento di configurazione, mantengono *invariata* la loro *lunghezza* (Si è ovviamente nell'ambito dell'ipotesi di spostamenti infinitesimi.) È sempre possibile inoltre, data l'isostaticità del sistema originario, individuare il centro assoluto di almeno un'asta.

Con riferimento alla Fig. 30bis si ha che la cerniera A è centro assoluto di rotazione dell'asta 1, sia esso  $C_1$ ; considerando quindi le aste 1 e 6, in virtù dei teoremi delle catene cinematiche ed essendo il nodo C centro relativo di rotazione per tali aste, sia esso  $C_{1\ 6}$ , è facile individuare il centro assoluto dell'asta 6,  $C_6$ . Quest'ultimo deve trovarsi infatti sulla congiungente  $C_1 - C_{1\ 6}$  e sulla retta  $r$  passante per E e perpendicolare al piano di scorrimento del carrello E; esso pertanto coincide con il nodo E.



Una possibile spostata della catena cinematica in esame è allora individuabile scegliendo come parametro lagrangiano l’abbassamento del nodo C, cioè assumendo  $\delta\lambda = \delta u_{yC} = 1$  (il valore unitario è scelto per comodità). Come illustrato in Figura 30bis tale scelta individua le spostate delle aste 1 e 6 che ruotano ciascuna attorno al proprio centro assoluto di rotazione. A questo punto, supponendo di sconnettere le aste 2 e 3 dal nodo B, si può pensare che l’asta 3 “segua” il nodo C nella sua traslazione verticale e che, quindi, essa assuma la posizione C’B’’ indicata a tratto continuo sottile in Figura 30bis. In realtà, poiché l’asta 3 può ruotare attorno a C’ il suo estremo B può trovarsi in un qualunque punto della perpendicolare per B’’ alla direzione dell’asta. L’asta 2 d’altra parte ruota attorno ad A e quindi il suo estremo B può trovarsi in un qualunque punto della perpendicolare per B al suo asse. Le due aste, 2 e 3, possono allora riconnettersi, mantenendo invariata la loro lunghezza, nel punto B’, intersezione delle due anzidette perpendicolari e posizione effettiva del nodo B nella spostata generata da  $\delta\lambda = \delta u_{yC} = 1$ . Con ragionamento del tutto analogo, supponendo di sconnettere le aste 4 e 7 dal nodo D, si può determinare la posizione D’ di quest’ultimo individuando così la spostata della catena cinematica reticolare in esame. La procedura è graficizzata in Fig. 30bis dove si evidenziano gli spostamenti assoluti dei nodi della travatura e le loro componenti nelle direzioni delle forze su di essi agenti.

L’equazione dei lavori virtuali ( $\delta L = 0 \quad \forall \delta\lambda$ ) nell’unica incognita  $R_5$  si scrive sommando il lavoro compiuto dalle forze i cui punti di applicazione subiscono uno spostamento nella direzione delle forze stesse.

Ciascun contributo, ovviamente, è assunto positivo quando forza e spostamento sono concordi, negativo in caso contrario. Con riferimento alla Fig. 30, ove sono indicati i carichi agenti, e alla Fig. 30bis, ove sono riportate le corrispondenti componenti di spostamento, può scriversi:

$$\delta L|_{\delta\lambda=1} = P \cdot \delta u_{yC} - R_5 \cdot \delta u_{C5} + P \cdot \delta u_{xD} - R_5 \cdot \delta u_{D5} + P \cdot \delta u_{yB} = P \cdot 1 - R_5 \frac{\sqrt{2}}{2} + P \frac{1}{2} - R_5 \frac{\sqrt{2}}{2} + P \frac{1}{2}$$

dove  $\delta u_{C5}$  e  $\delta u_{D5}$  indicano le componenti di spostamento dei nodi C e D valutate nella direzione dell'asta 5, e quindi di  $R_5$ .

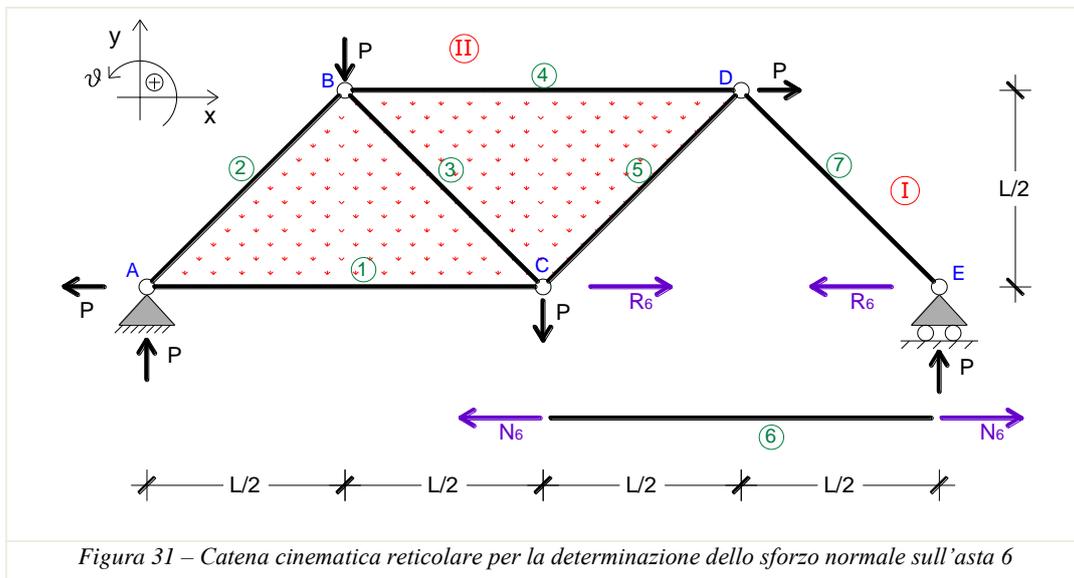
Ponendo, per il P.L.V.,  $\delta L = 0$  si ha:

$$P \cdot 1 - R_5 \frac{\sqrt{2}}{2} + P \frac{1}{2} - R_5 \frac{\sqrt{2}}{2} + P \frac{1}{2} \Rightarrow R_5 = P \frac{2}{\sqrt{2}} = P\sqrt{2}$$

Il valore analitico determinato per  $R_5$  è positivo, il verso ipotizzato è corretto, e quindi l'asta 5 è in trazione (tirante). Si noti che in questo caso, non trattandosi di un'asta di contorno, la condizione di equilibrio parziale (metodo speditivo) non si può imporre!! Non vi sono, come già osservato, due porzioni (rigide) mutuamente incernierate.

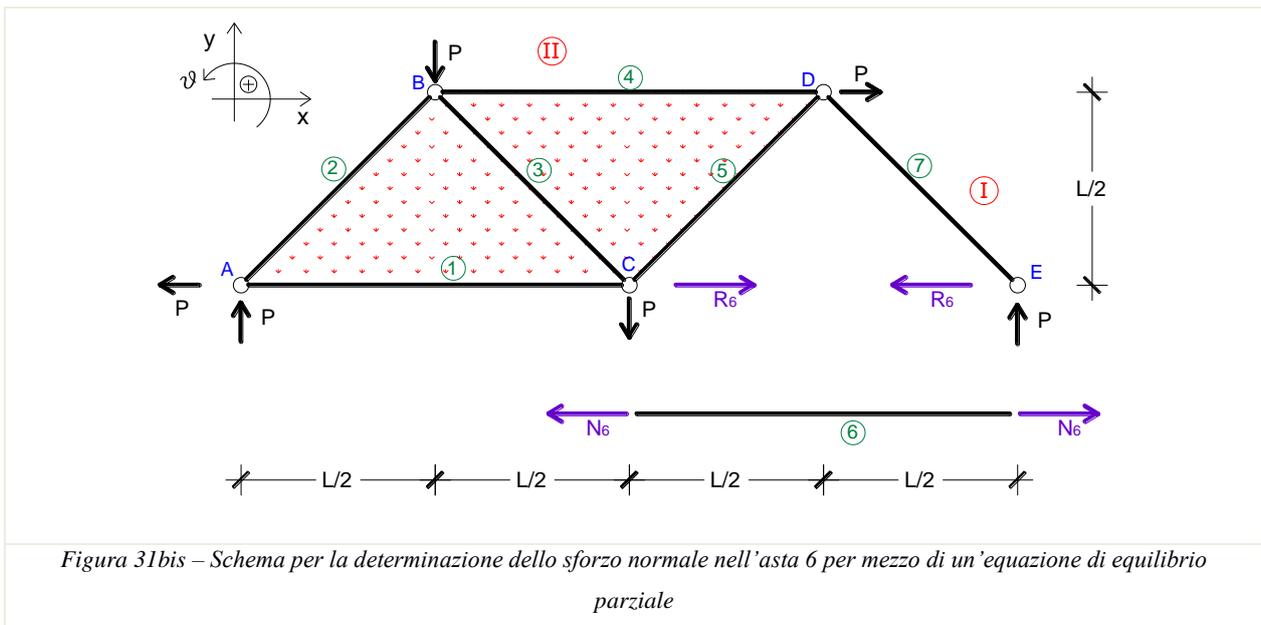
### SFORZO NORMALE NELL'ASTA 6

Si consideri la catena cinematica reticolare riportata in Figura 31 atta all'individuazione dello sforzo normale nell'asta 6 e ottenuta appunto eliminando l'asta 6 dalla travatura e introducendo sui nodi C ed E le azioni  $R_6$  (positive e quindi con versi uscenti dai nodi) che l'asta esercita su di essi.



La condizione di equilibrio della catena cinematica reticolare ottenuta può esprimersi attraverso il principio dei lavori virtuali (P.L.V.) considerando a tal fine la classe delle configurazioni spostate individuate da un unico parametro lagrangiano  $\delta\lambda$ , uno è infatti il grado di libertà del sistema. Come appare dallo schema di

Figura 31, il sistema (labile) in esame risulta costituito da due corpi rigidi collegati mutuamente nel nodo D indicati in Figura con I (coincidente con l'asta 7) e II (costituito dalle due maglie triangolari campite). La procedura è del tutto analoga a quanto visto precedentemente per le aste di contorno 1, 2 e 4 e non viene qui ripetuta; considerando invece che anche l'asta in esame è un'asta di contorno, la determinazione dello sforzo normale su di essa agente si effettua con metodo speditivo imponendo una condizione di equilibrio parziale di una delle porzioni (indeformabili) di struttura rispetto all'altra.



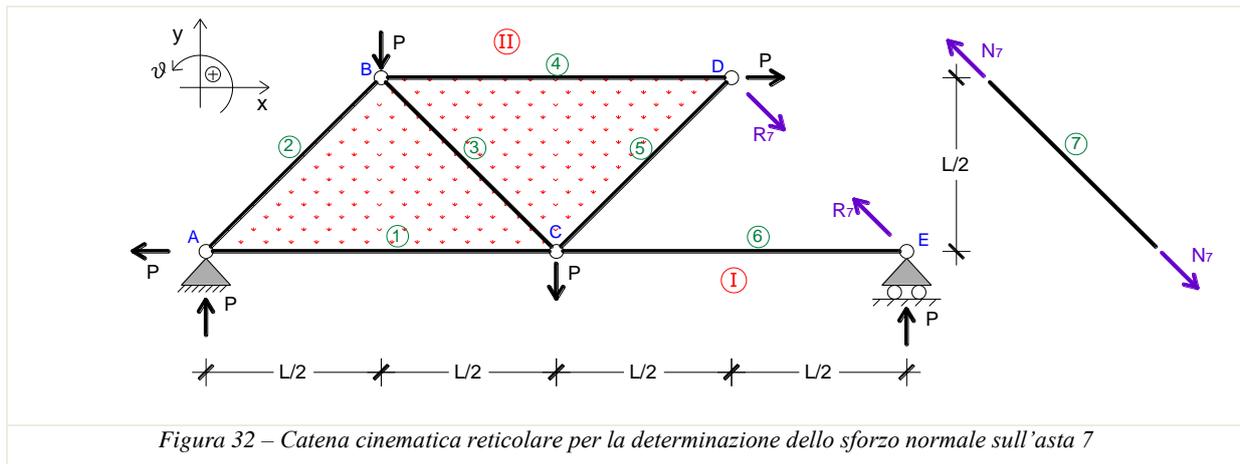
Con riferimento alla Fig. 31bis la condizione di equilibrio parziale è una condizione di equilibrio alla rotazione relativa intorno alla cerniera D. Imponendo ad esempio l'equilibrio alla rotazione della porzione I rispetto al nodo D si ottiene in modo immediato l'azione dell'asta soppressa  $R_6$  e quindi lo sforzo normale incognito  $N_6$  (uguale in modulo e direzione ma di verso opposto), si ha infatti:

$$\sum M_D^I = -R_6 \frac{L}{2} + P \frac{L}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{R_6 = P}$$

Il valore analitico determinato per  $R_6$  è positivo, il verso ipotizzato è corretto, e quindi l'asta 6 è in trazione (tirante).

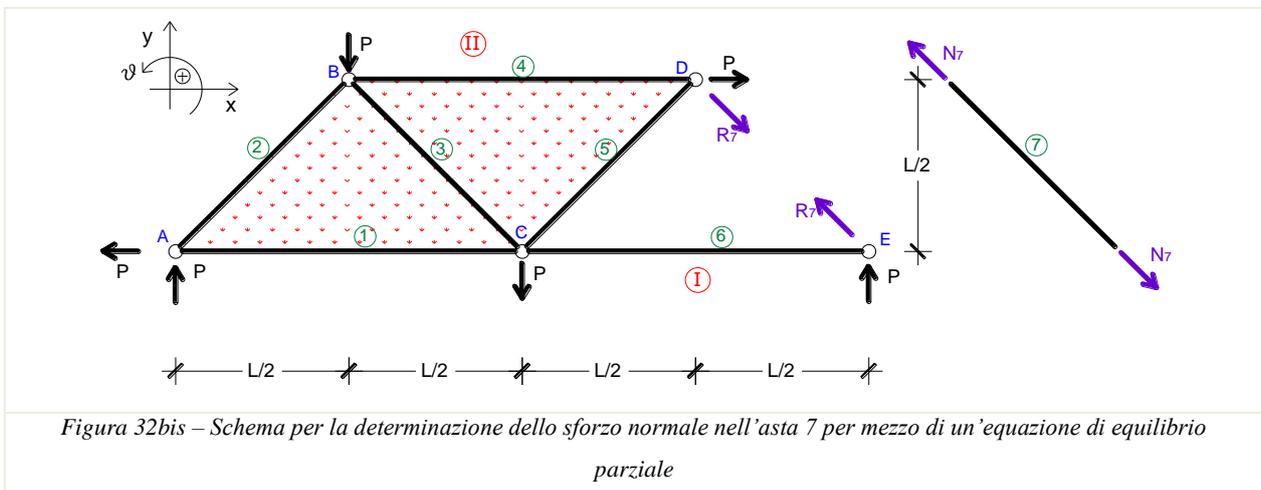
**SFORZO NORMALE NELL'ASTA 7**

Si consideri la catena cinematica reticolare riportata in Figura 32 atta all'individuazione dello sforzo normale nell'asta 7. Tale catena cinematica è stata ottenuta eliminando l'asta 7 dalla travatura e introducendo sui nodi D ed E, che ad essa competono, le azioni  $R_7$  (positive per ipotesi) che l'asta esercita su di essi.



La condizione di equilibrio della catena cinematica reticolare ottenuta può esprimersi attraverso il principio dei lavori virtuali (P.L.V.) considerando a tal fine la classe delle configurazioni spostate individuate da *un unico parametro lagrangiano*  $\delta\lambda$ , uno è infatti il grado di labilità del sistema. Come appare dallo schema di Figura 32, il sistema (labile) in esame risulta *costituito da due corpi rigidi* collegati mutuamente nel nodo C indicati in Figura con I (coincidente con l'asta 6) e II (costituito dalle due maglie triangolari campite).

Anche in questo caso, essendo l'asta in esame un'asta di contorno, la determinazione dello sforzo normale su di essa agente si effettua con metodo speditivo imponendo una condizione di equilibrio parziale di una delle porzioni (indeformabili) di struttura rispetto all'altra.



Con riferimento alla Fig. 32bis la condizione di equilibrio parziale è una condizione di equilibrio alla rotazione relativa intorno alla cerniera C. Imponendo ad esempio l'equilibrio alla rotazione della porzione I rispetto al nodo C si ottiene in modo immediato l'azione dell'asta soppressa  $R_7$  e quindi lo sforzo normale incognito  $N_7$  (uguale in modulo e direzione ma di verso opposto), si ha infatti:

$$\sum M_C^I = R_7 \frac{\sqrt{2}}{2} L + PL = 0 \Rightarrow R_7 = -P \frac{2}{\sqrt{2}} = -P\sqrt{2}$$

Il valore analitico determinato per  $R_7$  è negativo, il verso ipotizzato è opposto a quello effettivo, e quindi l'asta 7 è in compressione (puntone).