Simbolo di Kronecker e simbolo di Levi-Civita

Convenzione di Einstein (o della somma su indici ripetuti): è la convenzione per la quale i termini tensoriali con indici ripetuti si intendono sommati. Ad esempio:

$$a_{4k}\, b_k \equiv \sum_{k=1}^{3} a_{4k} b_k = a_{41} b_1 + a_{42} b_2 + a_{43} b_3 .$$

Simbolo di Kronecker: E' indicato con δ_{ij} e definito come segue:

$$\text{per } i,j = 1,2,3, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ 1, & \text{se } i = j \end{cases}$$

e rappresenta le componenti della matrice identica

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \text{Si ha} \quad \delta_{ij} = \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j \; (= \delta_{ji})$$

In una somma, il delta di Kronecker satura il primo indice col secondo, cioè

$$V_i \delta_{ij} = V_j \,, \quad A_{ij}\, \delta_{i\ell}\, \delta_{js} = A_{\ell s} \,,$$

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = (a_i \hat{e}_i) \cdot (b_j \hat{e}_j) = a_i b_j (\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j) = a_i b_j \delta_{ij} = a_i b_i .$$

Simbolo di Levi-Civita: è indicato con ε_{ijl}, essendo un tensore del terzo ordine così definito:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = (\varepsilon_{ijl}) \quad \text{con} \quad \varepsilon_{ijl} = \begin{cases} 0, & \text{se due indici coincidono} \\ +1, & \text{se } ijl \text{ è una permutazione pari di } 123 \text{ (cioè } 231 \text{ o } 312) \\ -1, & \text{se } ijl \text{ è una perm. dispari di } 123 \text{ (cioè } 213, 132, 321) \end{cases}$$

per $i, j, l = 1, 2, 3$.

Si ha che $\varepsilon_{ijl} := (\hat{e}_i \wedge \hat{e}_j) \cdot \hat{e}_l$ per ogni terna levogira trirettangola, cioè è pari al volume con segno del cubo costruito dai tre versori.

E' un tensore antisimmetrico: $\varepsilon_{ijl} = -\varepsilon_{jil} = -\varepsilon_{ilj}$.

Verifichiamo che $\underline{a} \wedge \underline{b} = \underline{\underline{\varepsilon}} \, (\underline{a} \otimes \underline{b})$.

Infatti $(\underline{a} \wedge \underline{b})_i = (a_j \hat{e}_j \wedge b_l \hat{e}_l) \cdot \hat{e}_i =$

$= a_j b_l \, (\hat{e}_j \wedge \hat{e}_l) \cdot \hat{e}_i = a_j b_l \, \varepsilon_{jli} = \varepsilon_{ijl} \, a_j b_l =$

$= [\underline{\underline{\varepsilon}} \, (\underline{a} \otimes \underline{b})]_i$, per ogni $i = 1, 2, 3$.

Proprietà del simbolo di Levi-Civita

i) $\varepsilon_{irs}\,\varepsilon_{irq} = 2\,\delta_{sq}$, $\forall\, s,q = 1,2,3$;

ii) $\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$, $\forall\, j,k,l,m$;

iii) $\operatorname{skw} \underline{\underline{A}} = \frac{1}{2}\, \underline{\underline{\underline{\varepsilon}}} \left(\underline{\underline{\underline{\varepsilon}}}\, \underline{\underline{A}} \right)$.

Dimostrazioni

i) $\varepsilon_{irs}\,\varepsilon_{irq} = \varepsilon_{12s}\,\varepsilon_{12q} + \varepsilon_{13s}\,\varepsilon_{13q} + \varepsilon_{23s}\,\varepsilon_{23q} + \varepsilon_{21s}\,\varepsilon_{21q} +$
$+\varepsilon_{31s}\,\varepsilon_{31q} + \varepsilon_{32s}\,\varepsilon_{32q} = 2\left(\varepsilon_{12s}\,\varepsilon_{12q} + \varepsilon_{13s}\,\varepsilon_{13q} + \varepsilon_{23s}\,\varepsilon_{23q}\right) =$
$= 2\{0 \text{, se } s \neq q \text{ ; } 1 \text{, se } s = q\} = 2\,\delta_{sq}$;

2) $\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{ilm} = \left[(\hat{e}_i \wedge \hat{e}_j)\cdot \hat{e}_k\right]\left[(\hat{e}_i \wedge \hat{e}_l)\cdot \hat{e}_m\right] =$

$$\det\begin{pmatrix} \hat{e}_i \\ \hat{e}_j \\ \hat{e}_k \end{pmatrix} \cdot \det\begin{pmatrix} \hat{e}_i & \hat{e}_l & \hat{e}_m \end{pmatrix} = \det\left[\begin{pmatrix} \hat{e}_i \\ \hat{e}_j \\ \hat{e}_k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{e}_i & \hat{e}_l & \hat{e}_m \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \det\begin{pmatrix} \hat{e}_i\cdot\hat{e}_i & \hat{e}_i\cdot\hat{e}_l & \hat{e}_i\cdot\hat{e}_m \\ \hat{e}_j\cdot\hat{e}_i & \hat{e}_j\cdot\hat{e}_l & \hat{e}_j\cdot\hat{e}_m \\ \hat{e}_k\cdot\hat{e}_i & \hat{e}_k\cdot\hat{e}_l & \hat{e}_k\cdot\hat{e}_m \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \delta_{ii} & \delta_{il} & \delta_{im} \\ \delta_{ji} & \delta_{jl} & \delta_{jm} \\ \delta_{ki} & \delta_{kl} & \delta_{km} \end{pmatrix} =$$

$$= 3\left(\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}\right) + \delta_{il}\delta_{jm}\delta_{ki} - \delta_{il}\delta_{ji}\delta_{km} +$$
$$+\delta_{im}\delta_{ji}\delta_{kl} - \delta_{im}\delta_{jl}\delta_{ki} = 3\left(\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}\right) +$$
$$+ 2\,\delta_{jm}\delta_{kl} - 2\,\delta_{jl}\delta_{km} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl} \text{ ;}$$

iii) $\frac{1}{2}\varepsilon_{ijl}\left(\varepsilon_{lmn}A_{mn}\right) = \frac{1}{2}\varepsilon_{lij}\varepsilon_{lmn}A_{mn} =$

$\overset{ii)}{=} \frac{1}{2}\left(\delta_{im}\delta_{jn}A_{mn} - \delta_{in}\delta_{jm}A_{mn}\right) =$

$= \frac{1}{2}\left(A_{ij} - A_{ji}\right) = \left[\mathrm{Skw}\,\underline{\underline{A}}\right]_{ij}$

iv) Isomorfismo di Skw e $\mathcal{V}$.

$\forall\, \underline{d} \in \mathcal{V}$ si ha $W_{ij}\,d_j = \left(\underline{\underline{W}}\,\underline{d}\right)_i = \left(\underline{w}\wedge\underline{d}\right)_i =$

$= \left[\underline{\underline{\epsilon}}\left(\underline{w}\otimes\underline{d}\right)\right]_i = \varepsilon_{ilj}\,w_l\,d_j = \left(-\varepsilon_{ijl}\,w_l\right)d_j$

$\Longleftrightarrow \quad W_{ij} = -\varepsilon_{ijl}\,w_l$, cioè $\boxed{\underline{\underline{W}} = -\underline{\underline{\epsilon}}\,\underline{w}}$.

Inoltre si ha:

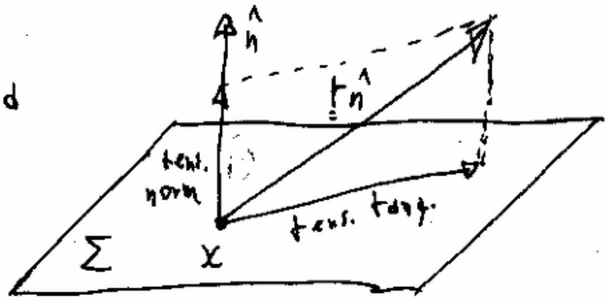
$\left(\underline{\underline{\epsilon}}\,\underline{\underline{W}}\right)_i = \varepsilon_{ijl}\,W_{jl} = -\varepsilon_{ijl}\left(\varepsilon_{jlk}\,w_k\right) =$

$= -\varepsilon_{jli}\,\varepsilon_{jlk}\,w_k \overset{i)}{=} -2\delta_{ik}\,w_k = -2w_i$

$\Longleftrightarrow \quad \boxed{\underline{w} = -\frac{1}{2}\underline{\underline{\epsilon}}\,\underline{\underline{W}}}$

Dunque, se $\underline{\underline{T}}(x,t)$ è il tensore degli sforzi di Cauchy (nella posizione x all'istante t, $\underline{\underline{T}}\hat{n}$ misura la forza di contatto per unità di superficie nella posizione assunta da $\mathcal{C}$ all'istante t. Fissato (x,t), le tensioni principali λ e le direzioni principali $\underline{m}$ sono le coppie (autovalore, autovettore) del tensore simmetrico $\underline{\underline{T}}(x,t)$: $\underline{\underline{T}}\,\underline{m} = \lambda\,\underline{m}$. (1)

Scelta una superficie piana arbitraria Σ di normale $\hat{n}$ per x, la tensione $\underline{\underline{T}}\hat{n}$ si decompone nella



tensione normale

$$\left(\hat{n}\cdot\underline{\underline{T}}\right)\hat{n} = \left(\hat{n}\otimes\hat{n}\right)\underline{\underline{T}}\,\hat{n} \qquad (2)$$

e nella tensione tangenziale $\left(\underline{\underline{I}} - \hat{n}\otimes\hat{n}\right)\underline{\underline{T}}\hat{n}$, (3)

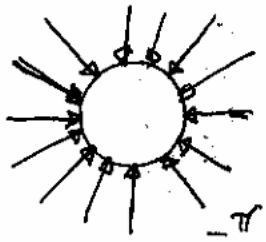
che rappresentano le proiezioni ortogonali di $\underline{\underline{T}}\hat{n}$ su $\hat{n}$ e Σ, rispettivamente.

Tre stati di tensione di particolare importanza e semplicità sono i seguenti.

i) Pressione uniforme: $\underline{\underline{T}} = -\pi \underline{\underline{I}}$, con $\pi(x,t) \in \mathbb{R}^+$. (4)

Allora $\underline{\underline{T}}\,\hat{n} = -\pi \hat{n}$, $\forall \hat{n}$ e dunque le tensioni principali sono tutte eguali a $-\pi$ (di molteplicità 3) con direzioni qualunque. La tensione normale è $-\pi \hat{n}$ e la tangenziale è ovviamente nulla: $(\underline{\underline{I}} - \hat{n}\otimes \hat{n})\,\underline{\underline{T}}\,\hat{n}$

$$= \left(\underline{\underline{I}} - \hat{n}\otimes\hat{n}\right)(-\pi\hat{n}) = -\pi\left(\hat{n} - (\hat{n}\cdot\hat{n})\hat{n}\right) = \underline{0}\,.$$



L'equazione di Cauchy per la statica, in assenza di forze di massa ($\underline{b} \equiv \underline{0}$) è:

$$\underline{0} = \underline{\mathrm{div}}\,\underline{\underline{T}} = -\,\underline{\mathrm{div}}\,(\pi \underline{\underline{I}}) = -\underline{\nabla}\pi \quad \text{in } \mathcal{C}, \qquad (5)$$

poiché $(\pi I)_{ij,j} = \pi_{,j}\,\delta_{ij} = \pi_{,i}$, $i = 1,2,3$. La soluzione costante è il caso dei <u>fluidi perfetti</u>.

ii) Tensione semplice, di entità σ in direzione $\hat{e}$:

$$\underline{\underline{T}} = \sigma\,\hat{e}\otimes\hat{e}, \quad \text{con } \sigma(e) \in \mathbb{R}^+. \qquad (6)$$

In una base $\mathcal{B} \equiv \{\hat{e}, \hat{f}, \hat{g}\}$, si ha $\underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

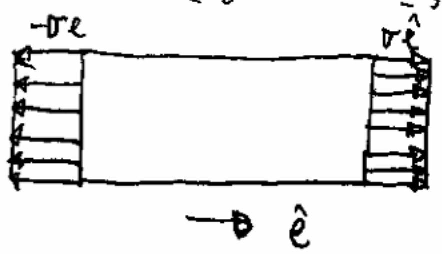
Le tensioni principali si ottengono dalla (1):

$$\underline{\underline{T}}\,m = \sigma(\hat{e}\otimes\hat{e})\,\underline{m} = \sigma(\hat{e}\cdot\underline{m})\,\hat{e} = \begin{cases} 0, & \text{se } \underline{m} = \hat{f} \text{ o } \underline{m} = \hat{g} \\ \sigma\hat{e}, & \text{se } \underline{m} = \hat{e} \end{cases} \qquad (7)$$

,

dunque: $\lambda_1 = \sigma$ con $\underline{m}_1 = \hat{e}$; $\lambda_i = 0$, $i = 1,2$, con $\underline{m}_2 = \hat{f}$ e $\underline{m}_3 = \hat{g}$. (8)

La tensione normale sulla superficie di applicazione della tensione semplice è $\sigma\hat{e}$, tutte le altre nulle, come le tangenziali.



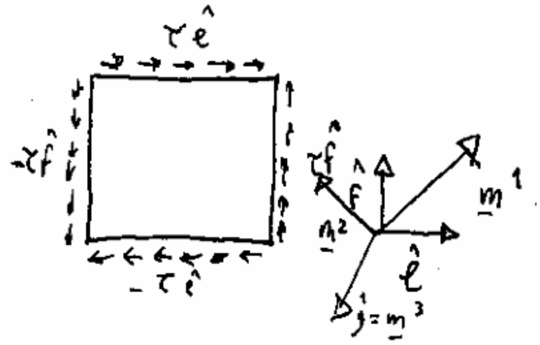
L'equazione della statica è $\frac{d\sigma}{de} = 0$ in $\mathcal{C}$, (9)

e dunque la tensione uniforme risolve il caso statico.

iii) Taglio semplice, di entità τ rispetto alle direzioni ortogonali $\hat{e}$ ed $\hat{f}$: Scegliendo la base $\mathcal{B} = \{\hat{e}, \hat{f}, \hat{g}\}$, si ha:

$$\underline{\underline{T}} = \tau\left(\hat{e}\otimes\hat{f} + \hat{f}\otimes\hat{e}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ con } \tau(e,f) \in \mathbb{R}^+.$$

Si ha $0 = |\underline{\underline{T}} - \lambda \underline{\underline{I}}| = \begin{vmatrix} -\lambda & \tau & 0 \\ \tau & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - \tau^2)$ e quindi le tensioni principali sono $\lambda_1 = \tau$, $\lambda_2 = -\tau$, $\lambda_3 = 0$; mentre



$$\underline{\underline{T}}\,\underline{m} = \begin{pmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau m_2 \\ \tau m_1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Allora dalla (1) si ha: a) $\underline{\underline{T}}\,\underline{m}^1 = \lambda_1 \underline{m}^1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \tau m_2^1 \\ \tau m_1^1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau m_1^1 \\ \tau m_2^1 \\ \tau m_3^1 \end{pmatrix}$ cioè

$m_1^1 = m_2^1$, $m_3^1 = 0$, dunque $\underline{m}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) $\underline{\underline{T}}\,\underline{m}^2 = \lambda_2 \underline{m}^2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \tau m_2^1 \\ \tau m_1^1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\tau m_1 \\ -\tau m_2 \\ -\tau m_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \underline{m}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $\underline{\underline{T}}\,\underline{m}^3 = \lambda_3 \underline{m}^3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \tau m_2^1 \\ \tau m_1^1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \underline{m}^3 = \hat{g}$.

La tensione nelle direzioni della base è: 1) $\underline{\underline{T}}\hat{e} = \tau\hat{f}$ con tensione normale nulla e tangenziale $\tau\hat{f}$; 2) $\underline{\underline{T}}\hat{f} = \tau\hat{e}$, dunque normale nulla e tgz. $\tau\hat{e}$; 3) $\underline{\underline{T}}\hat{g} = 0$, dunque tutta nulla.

L'equazione della statica $\underline{0} = \operatorname{div} \underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} 0 + \frac{\partial \tau}{\partial f} + 0 \\ \frac{\partial \tau}{\partial e} + 0 + 0 \\ 0 + 0 + 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial \tau}{\partial f}\hat{e} + \frac{\partial \tau}{\partial e}\hat{f}$ ha come soluzione il taglio semplice costante.

Applicazioni del Principio di indifferenza Materiale

Nel caso della velocità e del suo gradiente, letti da un altro osservatore, si ha; poiché $x = R x'$,

$$v' = \frac{dx'}{dt} = \dot{R}^T x + R^T \dot{x} = \dot{R}^T R x' + R^T v . \qquad (1)$$

Dunque v non si trasforma semplicemente in $R^T v$, ma è influenzato anche dalla scelta del tensore antisimmetrico $\dot{R}^T R$; quindi v non può intervenire direttamente in un'equazione costitutiva. Per il suo gradiente si ha:

$$\nabla_{x'} v' = \nabla_{x'} \left(\dot{R}^T R x' + R^T v \right) = \dot{R}^T R \nabla_{x'} x' + R^T \nabla_{x'} v =$$

$$= \dot{R}^T R I + R^T \nabla_x v \frac{\partial x}{\partial x'} = \dot{R}^T R + R^T \nabla_x v R = \qquad (2)$$

$$\dot{R}^T R + R^T W R + R^T D R ,$$

dove abbiamo usato la decomposizione del ∇v nella velocità di deformazione D e nella vorticità W. Dunque:

$$D' = R^T D R \quad \text{e} \quad W' = \dot{R}^T R + R^T W R , \qquad (3)$$

poiché $\dot{R}^T R = -(\dot{R}^T R)^T$ per la relazione $R^T R = I$.

Quindi solo D può comparire nelle equazioni costitutive.