

**Quesito sulla Meccanica Lagrangiana**

Consideriamo una terna trirettangola levogira  $Oxyz$ , di versori  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  e  $\mathbf{k}$ , che ruota uniformemente attorno all’asse verticale  $Oy$  con velocità angolare costante  $\omega$ . Un sistema materiale è costituito da tre punti materiali:  $A$  di massa  $m$  vincolato a muoversi sull’asse  $Oz$ ,  $B$  di massa  $m$  vincolato a muoversi sull’asse  $Ox$ ,  $C$  di massa  $2m$  vincolato a muoversi con attrito sull’asse  $Oy$ .

Sul sistema agiscono inoltre tre molle elastiche: la prima di costante positiva  $k > 0$  collegante i punti materiali  $B$  e  $C$ , la seconda di costante positiva  $h > 0$  collegante i punti materiali  $A$  e  $B$ , la terza di costante positiva  $2k > 0$  applicata in  $A$  e centro il punto fisso  $Q(L, 0, L)$ , con  $L > 0$ .

Determinare:

i) le equazioni differenziali pure del moto del sistema materiale. **(8 punti)**

Inoltre, nell’ipotesi che anche il vincolo in  $C$  sia liscio, stabilire:

ii) gli eventuali integrali primi del moto, quando all’istante iniziale i tre punti materiali sono situati:  $A$  nell’origine  $O$  con velocità  $\mathbf{v}_A(0) = u_0 \mathbf{k}$  ( $u_0 > 0$ ),  $B$  sul semiasse negativo di  $Ox$  a distanza  $L$  da  $O$  con velocità  $\mathbf{v}_B(0) = w_0 \mathbf{i}$  ( $w_0 < 0$ ),  $C$  in quiete sul semiasse positivo di  $Oy$  a distanza  $2L$  da  $O$ . **(4 punti)**

Infine, nel caso in cui le costanti del moto siano legate dalla relazione  $m\omega^2 = h = k$ , calcolare:

iii) tutte le posizioni d’equilibrio del sistema materiale, studiandone la stabilità; **(6 punti)**

iv) le piccole oscillazioni del sistema materiale in una posizione d’equilibrio stabile a scelta. **(3 punti)**

**Quesito sulla Meccanica del Continuo N. \_\_ (9 punti)**

- 1) Corpi elastici e conseguenze del principio d’indifferenza materiale nel caso elastico
- 2) Corpi termoelastici e principio d’indifferenza materiale in termoelasticità
- 3) Equazioni di campo della termoelasticità
- 4) Conseguenze del principio di entropia in termoelasticità
- 5) Principio di dissipazione in elasticità
- 6) Equazioni dell’elasticità lineare isotropa, onde piane e velocità di propagazione
- 7) Fluidi dissipativi di Fourier - Navier - Stokes
- 8) Principio di entropia per un fluido
- 9) Fluidi di Eulero comprensibili, equazioni linearizzate e velocità del suono;

Ai sensi del D.Lgs.30/06/2003, n.196, si autorizza la pubblicazione online in chiaro dell’esito della prova.

COGNOME:

NOME:

NUMERO DI MATRICOLA:

CORSO DI LAUREA:

FIRMA:

Università degli Studi “**Mediterranea**” di Reggio Calabria  
Dipartimento DICEAM  
Compito di **Fisica Matematica per le Applicazioni**  
Anno Accademico 2015/2016 – Appello del 10/02/2016

**Quesito sulla Meccanica Lagrangiana**

Una lamina quadrata OABC di lato  $L$  e massa  $m$ , è vincolata in  $O$  e  $C$  all’asse fisso verticale  $Oy$  di un sistema di riferimento  $Oxyz$ . Una molla di costante elastica  $h > 0$  collega il vertice  $B$  della lamina ad un punto fisso  $P$  di coordinate  $(2L, 0, 2L)$ . Sul sistema materiale agiscono inoltre:

I) una forza costante  $\mathbf{F}$  applicata nel vertice  $B$  della lamina e direzione parallela all’asse  $Ox$ ;

II) un momento  $\mathbf{M} = h (\mathbf{OP} \times \mathbf{OA}')$ , dove  $A'$  è la proiezione di  $A$  sull’asse  $Ox$ .

Determinare:

- i) la, o le, equazioni differenziali pure del moto del sistema materiale; **(9 punti)**
- ii) gli eventuali integrali primi del moto nel caso in cui, all’istante iniziale, la lamina è disposta nel piano  $Oxy$ , con il vertice  $A$  avente velocità  $\mathbf{v}_A = u_0 \mathbf{k}$ ,  $u_0 > 0$  e  $\mathbf{k}$  versore dell’asse  $Oz$ . **(4 punti)**
- iii) tutte le posizioni di equilibrio del sistema materiale, studiandone la stabilità; **(6 punti)**
- iv) le piccole oscillazioni del sistema materiale in una posizione d’equilibrio stabile a scelta. **(3 punti)**

**Quesito sulla Meccanica del Continuo N. \_\_ (8 punti)**

- 1) Corpi elastici e conseguenze del principio d’indifferenza materiale nel caso elastico
- 2) Corpi termoelastici e principio d’indifferenza materiale in termoelasticità
- 3) Equazioni di campo della termoelasticità
- 4) Conseguenze del principio di entropia in termoelasticità
- 5) Principio di dissipazione in elasticità
- 6) Equazioni dell’elasticità lineare isotropa, onde piane e velocità di propagazione
- 7) Fluidi dissipativi di Fourier - Navier - Stokes
- 8) Principio di entropia per un fluido
- 9) Fluidi di Eulero comprensibili, equazioni linearizzate e velocità del suono;

Ai sensi del D.Lgs.30/06/2003, n.196, si autorizza la pubblicazione online in chiaro dell’esito della prova.

COGNOME:

NOME:

NUMERO DI MATRICOLA:

CORSO DI LAUREA:

FIRMA:

**Quesito sulla Meccanica Lagrangiana**

Un semidisco materiale omogeneo di centro  $C$ , massa  $2m$  e raggio  $R$ , è vincolato con il proprio diametro  $OA$  all’asse verticale fisso liscio  $Oy$  della terna  $Oxyz$ , di versori rispettivamente  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ , e  $\mathbf{k}$ . Un punto materiale  $Q$ , di massa  $m$ , si muove lungo l’asse orizzontale  $Ox$ . Sul sistema agisce una molla elastica di costante positiva  $h > 0$  collegante il punto materiale  $Q$  al vertice  $P$  del semidisco.

Supponendo tutti i vincoli perfetti determinare:

i) la (o le) equazioni differenziali pure del moto del sistema materiale; **(10 punti)**

ii) gli eventuali integrali primi del moto quando, all’istante iniziale, il vertice  $P$  del semidisco giace sul semipiano positivo  $Oxy$ , con velocità  $\mathbf{v}_P(0) = u_0\mathbf{k}$  dove  $u_0 > 0$ , mentre il punto materiale  $Q$  si trova sul semiasse positivo  $Ox$  a distanza  $2R$  dall’origine  $O$  ed avente velocità  $\mathbf{v}_Q(0) = w_0\mathbf{i}$ , con  $w_0 < 0$ ; **(3 punti)**

iii) tutte le posizioni d’equilibrio del sistema materiale studiandone la stabilità; **(7 punti)**

iv) le piccole oscillazioni del sistema materiale in una posizione d’equilibrio stabile a scelta. **(5 punti)**

**Quesito sulla Meccanica del Continuo N. \_\_ (8 punti)**

- 1) Corpi elastici e conseguenze del principio d’indifferenza materiale nel caso elastico
- 2) Corpi termoelastici e principio d’indifferenza materiale in termoelasticità
- 3) Equazioni di campo della termoelasticità
- 4) Conseguenze del principio di entropia in termoelasticità
- 5) Principio di dissipazione in elasticità
- 6) Equazioni dell’elasticità lineare isotropa, onde piane e velocità di propagazione
- 7) Fluidi dissipativi di Fourier - Navier - Stokes
- 8) Principio di entropia per un fluido
- 9) Fluidi di Eulero comprensibili, equazioni linearizzate e velocità del suono;

Ai sensi del D.Lgs.30/06/2003, n.196, si autorizza la pubblicazione online in chiaro dell’esito della prova.

COGNOME:

NOME:

NUMERO DI MATRICOLA:

CORSO DI LAUREA:

FIRMA:

**Quesito sulla Meccanica Lagrangiana**

Un punto materiale Q, di massa  $m$ , è vincolato a muoversi con attrito lungo l'asse orizzontale Ox di un sistema di riferimento Oxyz ruotante uniformemente intorno all'asse Oy con velocità angolare costante  $\omega$ . Un altro punto materiale P, di massa  $m$ , è vincolato a scorrere lungo la retta liscia di equazione  $y = L$  e  $z = 0$ . I due punti sono collegati da una molla di costante elastica  $k > 0$ . Sul punto P agisce, inoltre, una molla di costante elastica  $h > 0$  e centro un punto fisso  $H(0,L,0)$ . Determinare:

i) la, o le, equazioni differenziali pure del moto. **(8 punti)**

Supponendo tutti i vincoli perfetti, stabilire:

ii) gli eventuali integrali primi del moto supponendo che all'istante iniziale, i due punti si trovano a distanza  $L$  dall'asse Oy, P nel semipiano positivo rispetto ad Ox e Q in quello negativo, con velocità  $\mathbf{v}_P = u_0 \mathbf{i}$  e  $\mathbf{v}_Q = v_0 \mathbf{i}$ , rispettivamente, essendo  $\mathbf{i}$  il versore dell'asse Ox,  $u_0 > 0$  e  $v_0 < 0$ . **(4 punti)**

Inoltre, posto  $k = 2m\omega^2$  e  $h > 3k$ , calcolare:

iii) tutte le posizioni di equilibrio del sistema materiale, studiandone la stabilità; **(6 punti)**

iv) le piccole oscillazioni del sistema materiale in una posizione di equilibrio stabile a scelta. **(4 punti)**

**Quesito sulla Meccanica del Continuo N. \_\_ (8 punti)**

1) Corpi elastici e conseguenze del principio d'indifferenza materiale nel caso elastico

2) Corpi termoelastici e principio d'indifferenza materiale in termoelasticità

3) Equazioni di campo della termoelasticità

4) Conseguenze del principio di entropia in termoelasticità

5) Principio di dissipazione in elasticità

6) Equazioni dell'elasticità lineare isotropa, onde piane e velocità di propagazione

7) Fluidi dissipativi di Fourier - Navier - Stokes

8) Principio di entropia per un fluido

9) Fluidi di Eulero comprensibili, equazioni linearizzate e velocità del suono

Ai sensi del D.Lgs.30/06/2003, n.196, si autorizza la pubblicazione online in chiaro dell'esito della prova.

COGNOME:

NOME:

NUMERO DI MATRICOLA:

CORSO DI LAUREA:

FIRMA:

**Quesito sulla Meccanica Lagrangiana**

In un piano verticale Oxy un sistema materiale è costituito da un’asta AB omogenea di massa  $2m$  e lunghezza  $2L$  e da un punto materiale P di massa  $m$ . L’asta è incernierata nel proprio punto medio nell’origine O degli assi, mentre il punto materiale P è vincolato a muoversi lungo la retta  $r$  passante per gli estremi dell’asta AB. Sul sistema agiscono:

I) una molla elastica di costante positiva  $h > 0$  applicata in B e centro un punto fisso  $H(0, L, 0)$ ;

II) una seconda molla elastica di costante positiva  $k > 0$  collegante il punto materiale P con l’origine O. Supponendo tutti i vincoli perfetti, determinare:

- i) la o le equazioni differenziali pure del moto del sistema materiale; **(11 punti)**
- ii) gli eventuali integrali primi del moto supponendo che all’istante iniziale l’asta giace con l’estremo B sul semiasse positivo Ox ed avente velocità  $\underline{v}_B(0) = v_0 \hat{j}$ , ( $v_0 < 0$ ), mentre il punto materiale è situato in B con velocità  $\underline{v}_P(0) = u_0 \hat{i}$  ( $u_0 < 0$ ), essendo  $\hat{i}$  e  $\hat{j}$  i versori rispettivamente degli assi Ox e Oy. **(4 punti)**

Posto  $mg = hL = 2kL$ , dove  $g$  è il modulo del vettore accelerazione di gravità, calcolare:

- iii) tutte le posizioni d’equilibrio del sistema materiale studiandone la stabilità; **(7 punti)**
- iv) le piccole oscillazioni del sistema materiale in una posizione d’equilibrio stabile a scelta. **(3 punti)**

**Quesito sulla Meccanica del Continuo N. \_\_ (8 punti)**

- 1) Corpi elastici e conseguenze del principio d’indifferenza materiale nel caso elastico
- 2) Corpi termoelastici e principio d’indifferenza materiale in termoelasticità
- 3) Equazioni di campo della termoelasticità
- 4) Conseguenze del principio di entropia in termoelasticità
- 5) Principio di dissipazione in elasticità
- 6) Equazioni dell’elasticità lineare isotropa, onde piane e velocità di propagazione
- 7) Fluidi dissipativi di Fourier - Navier - Stokes
- 8) Principio di entropia per un fluido
- 9) Fluidi di Eulero comprensibili, equazioni linearizzate e velocità del suono

Ai sensi del D.Lgs.30/06/2003, n.196, si autorizza la pubblicazione online in chiaro dell’esito della prova.

COGNOME:

NOME:

NUMERO DI MATRICOLA:

CORSO DI LAUREA:

FIRMA:

Università degli Studi “**Mediterranea**” di Reggio Calabria  
Dipartimento DICEAM  
Compito di **Fisica Matematica per le Applicazioni**  
Anno Accademico 2015/2016 – Appello del 21/09/2016

**Quesito sulla Meccanica Lagrangiana**

In un piano verticale  $Oxy$ , un sistema materiale è costituito da un disco omogeneo, di massa  $m$  e raggio  $R$ , vincolato a rotolare senza strisciare lungo l'asse orizzontale  $Ox$ . Una molla di costante elastica  $h > 0$  collega il baricentro  $C$  del disco al punto fisso  $P = (0, 2R, 0)$ , mentre un'altra molla di costante elastica  $k > 0$  collega il baricentro del disco al punto fisso  $Q = (0, -R, 0)$ . Sul disco agisce anche un momento  $\mathbf{M} = 2 h (CT \times OH)$ , con  $H$  punto di contatto tra disco e guida, e  $T$  punto generico appartenente al bordo del disco. Determinare:

- i) la, o le, equazioni differenziali pure del moto del sistema materiale; **(10 punti)**
  - ii) eventuali integrali primi del moto supponendo che all'istante iniziale il disco è situato nel primo quadrante con il baricentro posto a distanza  $\pi R/2$  dall'asse verticale  $Oy$ , ed avente velocità  $\mathbf{v}_C = u_0 \mathbf{i}$ , con  $u_0 > 0$  e  $\mathbf{i}$  versore dell'asse  $Ox$ . **(5 punti)**
- Inoltre, posto  $h = k$ , calcolare:
- iii) tutte le posizioni di equilibrio del sistema materiale, studiandone la stabilità; **(7 punti)**
  - iv) le piccole oscillazioni del sistema materiale in una posizione d'equilibrio stabile a scelta. **(3 punti)**

**Quesito sulla Meccanica del Continuo N. \_\_ (8 punti)**

- 1) Corpi elastici e conseguenze del principio d'indifferenza materiale nel caso elastico
- 2) Corpi termoelastici e principio d'indifferenza materiale in termoelasticità
- 3) Equazioni di campo della termoelasticità
- 4) Conseguenze del principio di entropia in termoelasticità
- 5) Principio di dissipazione in elasticità
- 6) Equazioni dell'elasticità lineare isotropa, onde piane e velocità di propagazione
- 7) Fluidi dissipativi di Fourier - Navier - Stokes
- 8) Principio di entropia per un fluido
- 9) Fluidi di Eulero comprensibili, equazioni linearizzate e velocità del suono

Ai sensi del D.Lgs.30/06/2003, n.196, si autorizza la pubblicazione online in chiaro dell'esito della prova.

COGNOME:

NOME:

NUMERO DI MATRICOLA:

CORSO DI LAUREA:

FIRMA: