Esercizi svolti di Analisi Matematica

Tutor Ing. Tiziano Pizzone

Corso di Laurea in Ingegneria Civile-Ambientale
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Dipartimento DICEAM
Universitá Mediterranea di Reggio Calabria

Indice

Capitolo 1

Esercizio 1

Data la funzione

$$f(x) = \left| \frac{|x| - 1}{4 - |x|} \right|$$

determinare:

- l'insieme di definizione D_f.
- gli intervalli di monotonia;
- $f(Df)$ ed eventuali punti di estremo locale e globale nel suo dominio naturale;
- eventuali punti di estremo locale e globale nell'intervallo [-2; 1];
- verificare se f è iniettiva nell'intervallo $(-\infty, 0)$.
- stimare il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = 8$.
- gli intervalli di concavità e convessità ed eventuali punti di flesso.

SVOLGIMENTO
Osserviamo che:

$$f(x) = |h(x)|$$

dove

$$h(x) = g(|x|)$$

con

$$g(x) = \frac{x - 1}{4 - x}$$

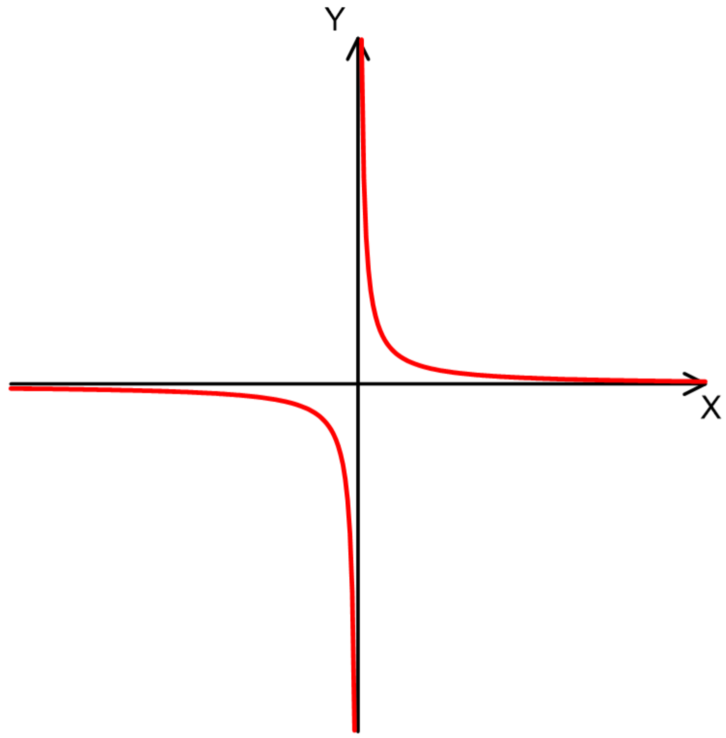


Figura 1.1:

Quindi, prima ricaviamo il grafico di $g(x)$ e poi ricaviamo gli altri effettuando le trasformazioni.

$$g(x) = \frac{x-1}{4-x} = -\frac{-x+1+3-3}{4-x} = -\frac{4-x}{4-x} + \frac{3}{4-x} = \frac{3}{4-x} - 1$$

Chiaramente, per $x \geq 0$, la funzione g é ben definita per $x \neq 4$ e, partendo dalla funzione $\frac{1}{x}$ (il cui grafico é rappresentanto in figura), si possono effettuare le seguenti trasformazioni per ottenere $g(x)$:

1. $$a(x) = \frac{1}{x} \Longrightarrow b(x) = a(x-4) = \frac{1}{x-4}$$

   Il grafico della funzione $a(x)$ viene traslato verso destra di 4 unitá

2. $$c(x) = -a(x) = -\frac{1}{x-4} = -\frac{1}{4-x}$$

   Graficamente si ottiene il ribaltamento del grafico rispetto all'asse x

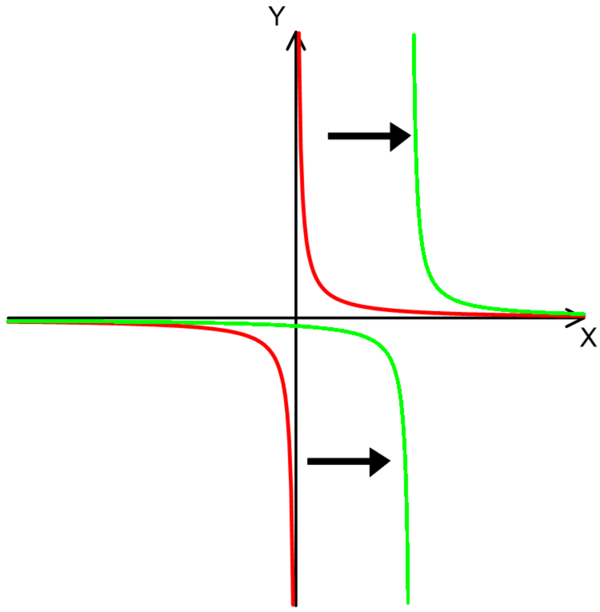


Figura 1.2:

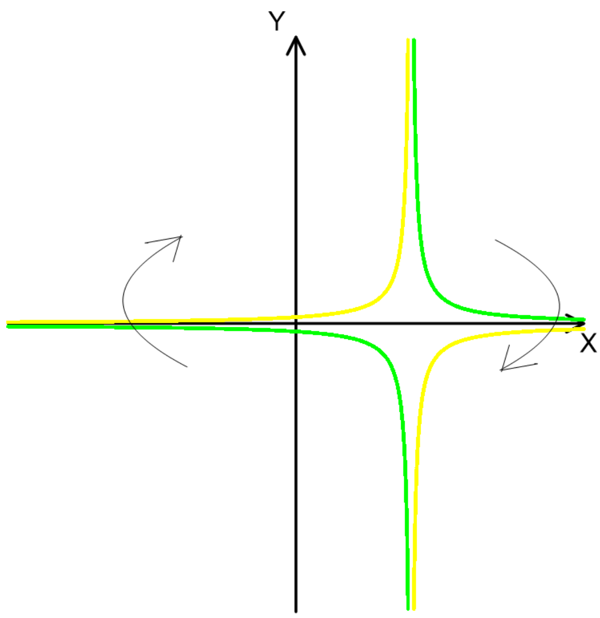


Figura 1.3:

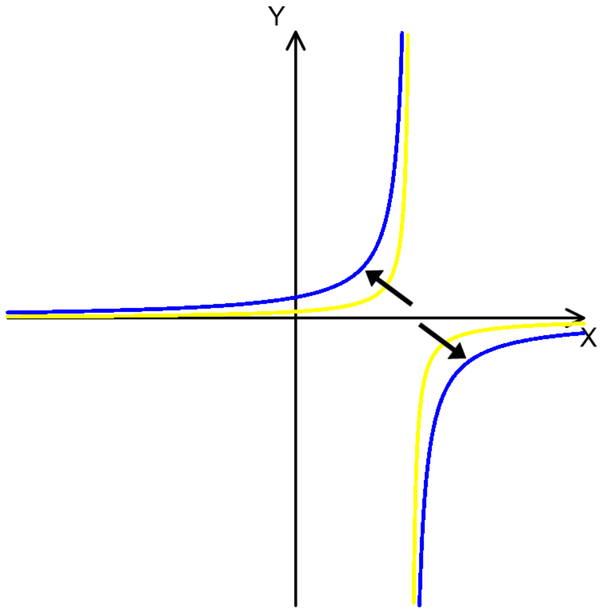


Figura 1.4:

3.
$$d(x) = 3c(x) = \frac{3}{4-x}$$

Graficamente si ottiene la dilatazione del grafico sull'asse y di 3 unitá

4.
$$g(x) = d(x) - 1 = \frac{3}{4-x} - 1$$

Graficamente si ottiene la traslazione verso il basso del grafico di 1 unitá

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Per ottenere $h(x)$, visto che é pari e quindi simmetrica rispetto all'asse y, basta considerare il grafico di $g(x)$ per $x \geq 0$ e "ribaltarlo"rispetto all'asse y: Infine, per ottenere il grafico di $f(x)$ basta "ribaltare"la parte negativa del grafico di $h(x)$ rispetto all'asse x:

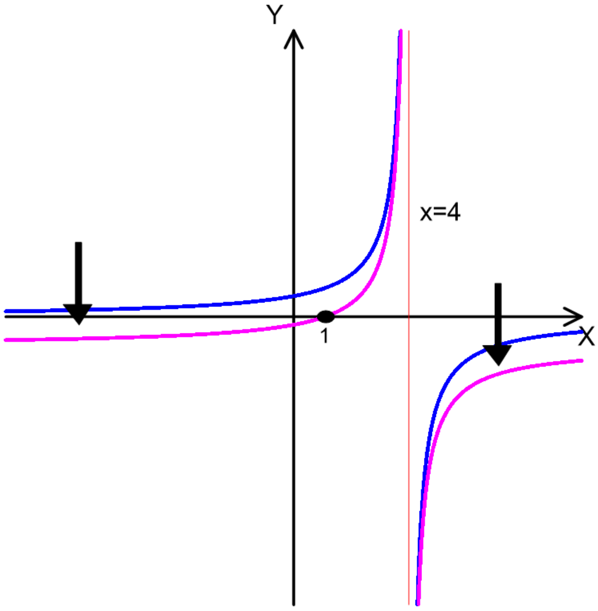


Figura 1.5:

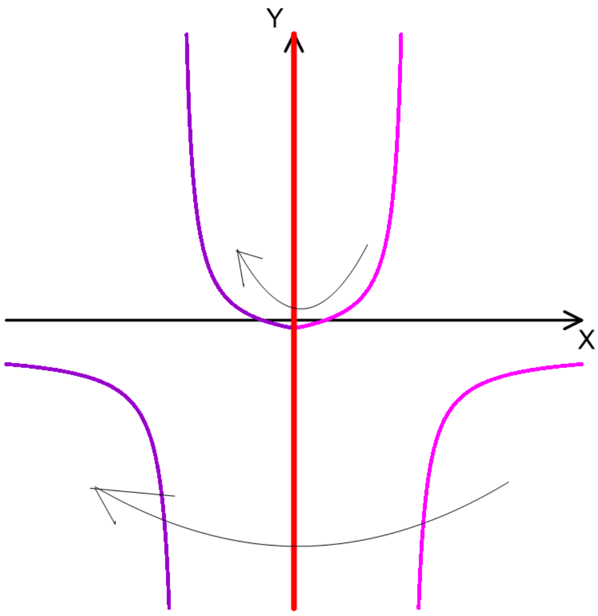


Figura 1.6:

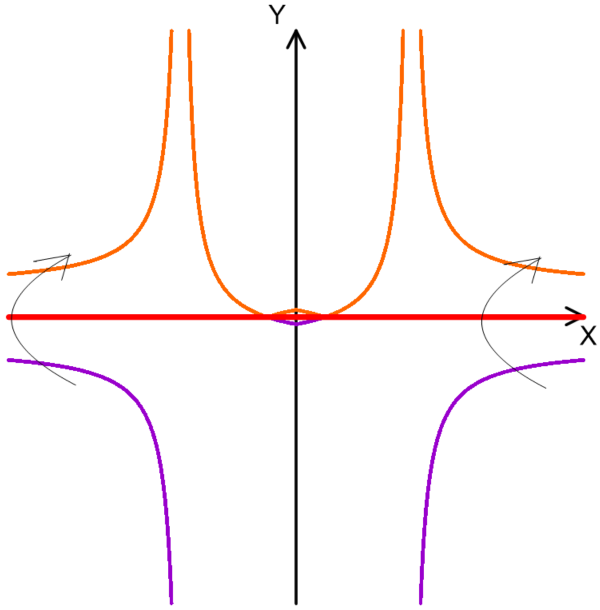


Figura 1.7:

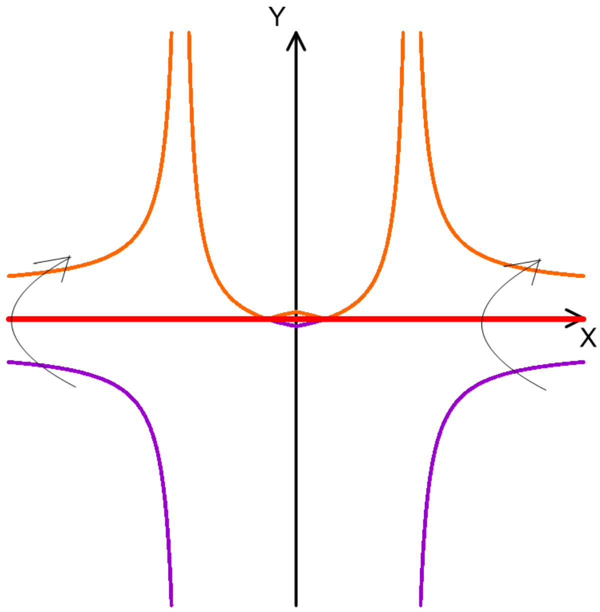


Figura 1.8:

Capitolo 2

Esercizio 2

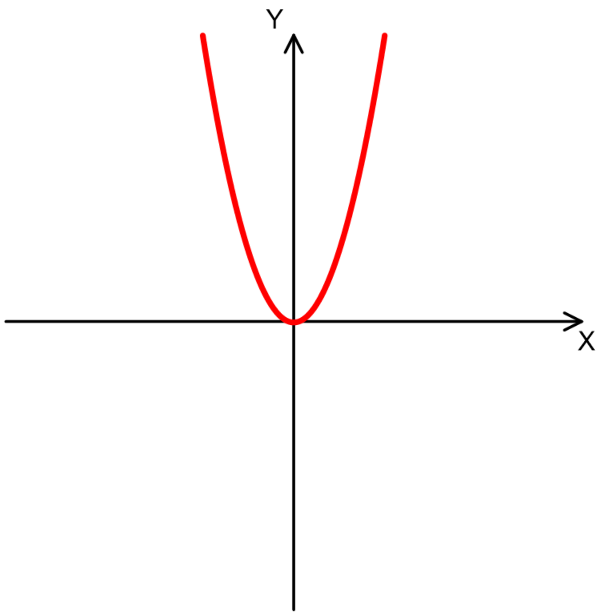
Data la funzione

$$f(x) = x^2$$

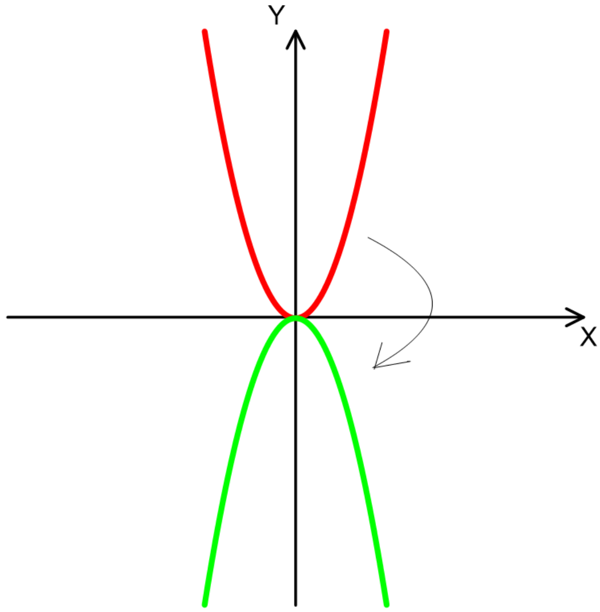
Tracciare il grafico di $-f$, f^+, f^-, $|f(x)|$, $f(|x|)$, $f(x \pm c)$, $f(x) \pm c$ e $\frac{x \pm c}{|x \pm c|} f(x)$, dove $c \in R$.

SVOLGIMENTO

- Il grafico di x^2 é rappresentato da una parabola rivolta verso l'alto con asse di simmetria corispondente all'asse delle ordinate e vertice nell'origine degli assi cartesiani:



- Il grafico di $-f(x) = -x^2$ si ottiene "ribaltando"il grafico di $f(x)$ rispetto all'asse x:



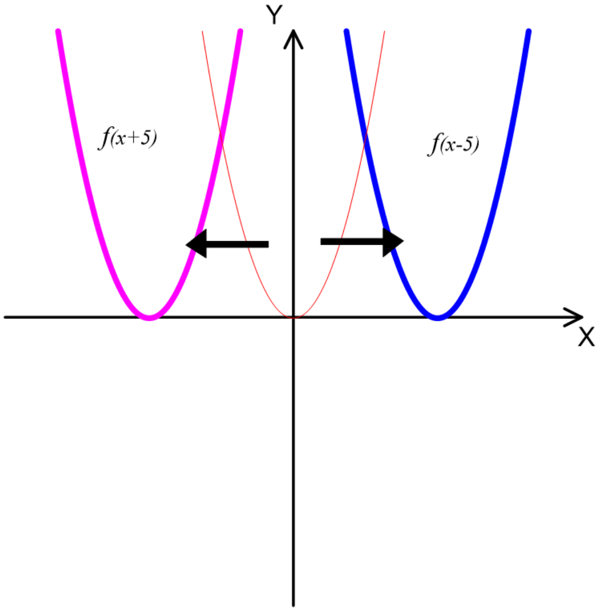
- Il grafico di $f^+(x) = \max f(x), 0 = x^2$ coincide con quello di f, in quanto f é una funzione non negativa e quello di f^- con l'asse delle ascisse poiché $f^-(x) = \max -f(x), 0 = 0$.

- Il grafico di $|f(x)| = |x^2|$ coincide con quello di $f(x)$ perché in entrambi i casi la funzione é sempre positiva $\forall x \in R$.

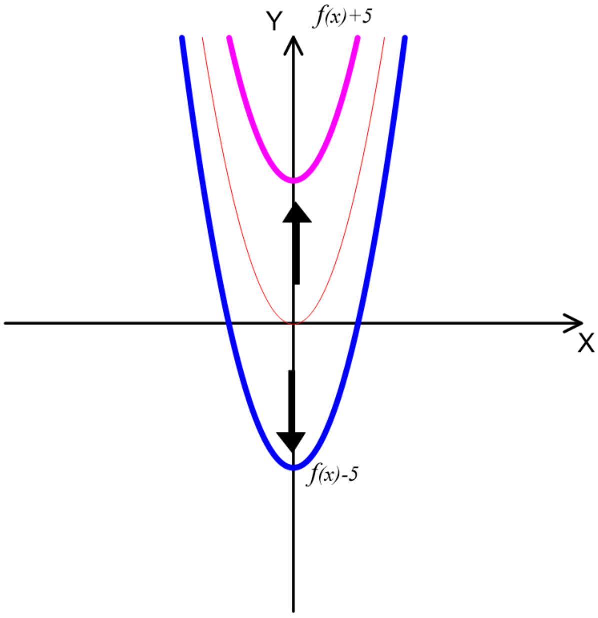
- Il grafico di $f(|x|) = |x|^2$ coincide con quello di $f(x)$ perché entrambe le funzioni sono pari.

- Considerando $c = 5$,

  il grafico di $f(x+5) = (x+5)^2$ e $f(x-5) = (x-5)^2$ si ottiene traslando il grafico di $f(x)$ rispettivamente verso sinistra e verso destra di 5 unitá:



Il grafico di $f(x)+5 = x^2+5$ e $f(x)-5 = x^2-5$ si ottiene traslando il grafico di $f(x)$ rispettivamente verso l'alto e verso il basso di 5 unitá:



- Considerando $c = 2$,

  il grafico di $\frac{x+2}{|x+2|}f(x)$ si ottiene facendo alcune considerazioni:

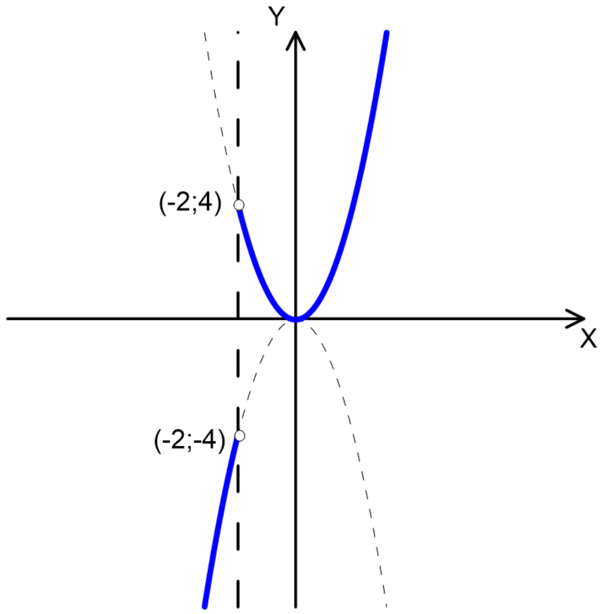
$x+2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$

$$\frac{x+2}{|x+2|}x^2 = \begin{cases} x^2, & \text{se } x+2>0 \Rightarrow x>-2; \\ -x^2, & \text{se } x+2>0 \Rightarrow x<-2. \end{cases}$$

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{x+2}{|x+2|}x^2 = \lim_{x\to -2^-} x^2 = -4$$

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{x+2}{|x+2|}x^2 = \lim_{x\to -2^+} -x^2 = 4$$

Si tratta di una discontinuità di 1^a specie.



Infine, per quanto riguarda $\frac{x-2}{|x-2|}f(x)$, effettuando gli stessi ragionamenti del punto precedente si ottiene:

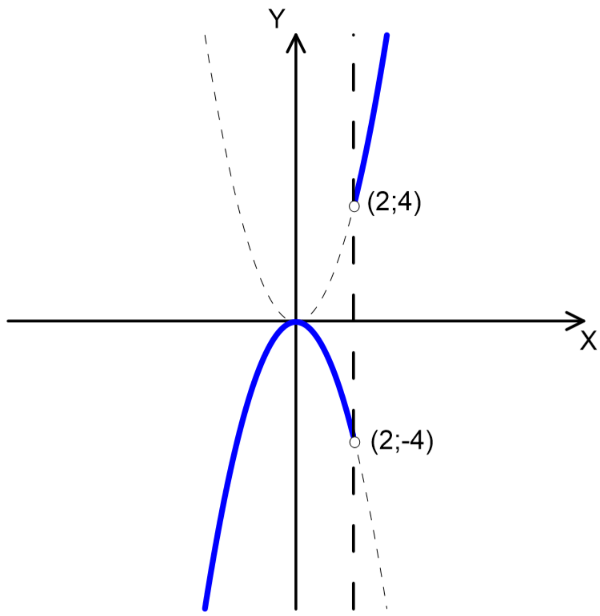
$x-2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$

$$\frac{x-2}{|x-2|}x^2 = \begin{cases} x^2, & \text{se } x-2>0 \Rightarrow x>2; \\ -x^2, & \text{se } x-2>0 \Rightarrow x<2. \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x-2}{|x-2|}x^2 = \lim_{x\to 2^-} x^2 = -4$$

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{x+2}{|x+2|}x^2 = \lim_{x\to -2^+} -x^2 = 4$$

Si tratta di una discontinuità di 1^a specie.


Y
X
(2;4)
(2;-4)

Capitolo 3

Esercizio 3

Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} |\sinh(|x-1|)|\,, & \text{se } x < -1; \\ -\sqrt{|(x+1)(x-1)|}, & \text{se } -1 \le x \le 1, \\ \frac{|4-x|}{4-x}|\ln(|x|+1)|, & \text{se } x > 1 \text{ e } x \ne 4; \\ 0, & x = 4; \end{cases}$$

determinare:

1) l'insieme di definizione D_f, di continuità C_f e di derivabilità di $D_{f'}$.

2) gli intervalli di monotonia;

3) $f(Df)$ ed eventuali punti di estremo locale e globale nel suo dominio naturale;

4) eventuali punti di estremo locale e globale nell'intervallo $[-2; 1]$;

5) se f é iniettiva nell'intervallo $(-5, 0)$;

6) il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = 10^{-2}$;

7) se f soddisfa le ipotesi del Teorema di Lagrange nell'intervallo $[-1; 1]$.

⋆ Svolgimento ⋆

Prima di iniziare a fornire la risposta al singolo quesito può tornare utile semplificare le espressioni analitiche utilizzate per definire la funzione e disegnare i "pezzi "del grafico riconducibili ai grafici delle funzioni elementari e loro trasformazioni. A tal fine, semplifichiamo i vari ragionamenti procedendo per "passi "successivi:

I_1) $|\sinh(|x-1|)|$ per $x < -1$;
Considerando il valore assoluto $|x-1|$ abbiamo che:

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{se } x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1; \\ -(x-1) = 1-x, & \text{se } x-1 < 0 \Leftrightarrow x < 1; \end{cases}$$

Visto che la funzione è definita per $x < -1$ possiamo semplificare il valore assoluto ed otteniamo:

$$|\sinh(1-x)|$$

Considerando quest'ultima espressione abbiamo che:

$$|\sinh(1-x)| = \begin{cases} \sinh(1-x), & \text{se } \sinh(1-x) \geq 0 \Leftrightarrow 1-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1; \\ -\sinh(1-x), & \text{se } \sinh(1-x) < 0 \Leftrightarrow 1-x < 0 \Leftrightarrow x > 1; \end{cases}$$

Visto che la funzione è definita per $x < -1$ possiamo semplificare il valore assoluto ed otteniamo:

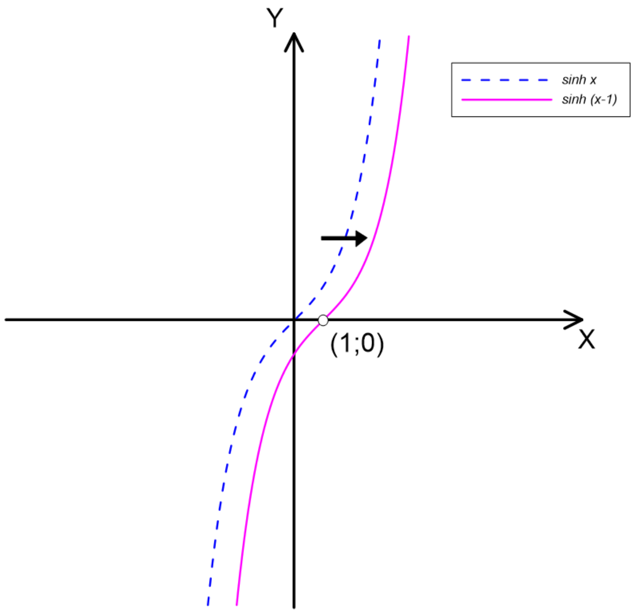
$$\sinh(1-x)$$

Inoltre, ricordando che $\sinh(z)$ è una funzione dispari $[f(-z) = -f(z)]$ si ha:

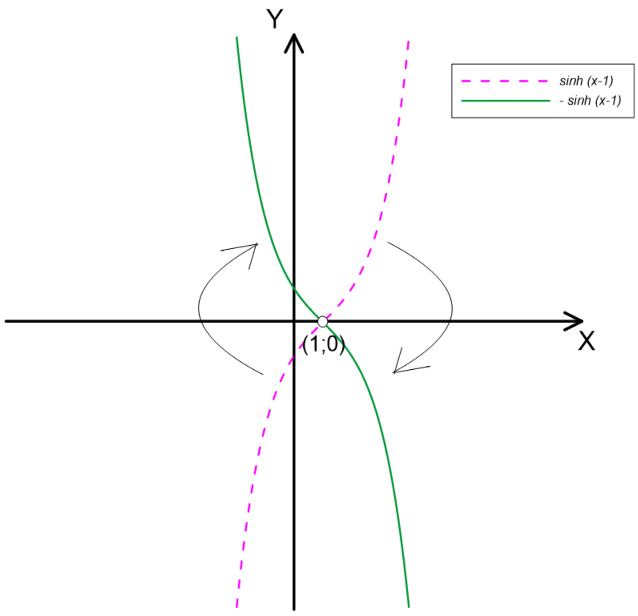
$$\sinh(1-x) = \sinh[-(x-1)] = -\sinh(x-1)$$

Il grafico di quest'ultima funzione si ottiene dal grafico di $\sinh x$ eseguendo due passaggi:

- traslandolo di 1 unitá verso destra

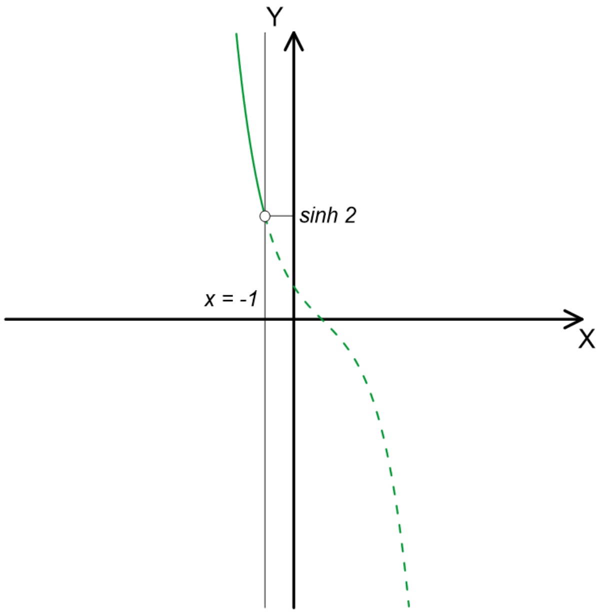


- "ribaltandolo" rispetto all'asse x



Ricordiamo che la funzione é definita per $x < -1$, quindi prendiamo in considerazione solo la parte del grafico per $x < -1$ e studiando il limite della funzione in -1, otteniamo:

$$f(-1^-) = \lim_{x \to 1^-} |\sinh(|x-1|)| = \sinh 2$$



I_2) $-\sqrt{|(x+1)(x-1)|} = -\sqrt{|x^2-1|}$, per $-1 \leq x \leq 1$.
Considerando il valore assoluto $|x^2-1|$ abbiamo che:

$$\left|x^2-1\right| = \begin{cases} x^2-1, & \text{se } x^2-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -1 \text{ e } x \geq 1; \\ -(x^2-1) = 1-x^2, & \text{se } x^2-1 < 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1; \end{cases}$$

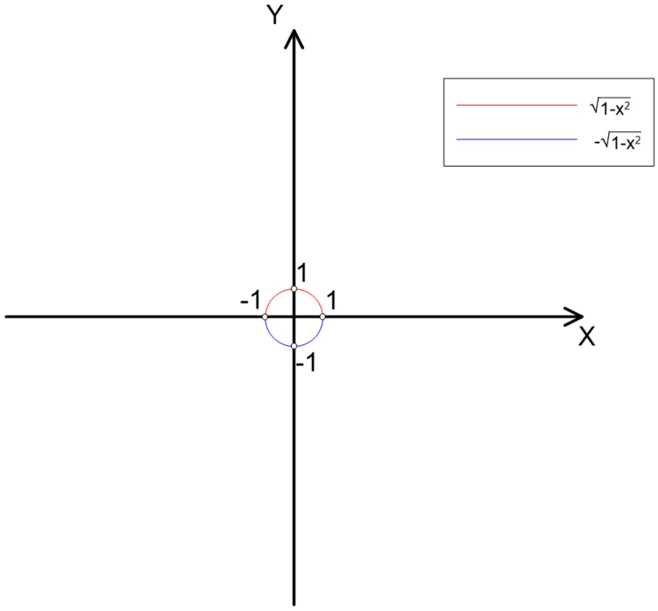
Semplificando il valore assoluto otteniamo:

$$f(x) = -\sqrt{1-x^2}$$

Quest'ultima espressione rappresenta l'equazione di una semicirconferenza di centro (0;0) e raggio unitario. Infatti:

$$x^2 + y^2 = 1 \Longleftrightarrow y = \pm\sqrt{1 - x^2}$$

Graficamente:



I_3) $\frac{|4-x|}{4-x}|\ln(|x|+1)|$ per $1 < x$ e $x \neq 4$.

Considerando il valore assoluto della frazione abbiamo che:

$$\frac{|4-x|}{4-x} = \begin{cases} \frac{4-x}{4-x} = 1, & \text{se } 4 - x > 0 \Leftrightarrow x < 4; \\ -\frac{4-x}{4-x} = -1, & \text{se } 4 - x < 0 \Leftrightarrow x > 4; \end{cases}$$

Mentre per il valore assoluto del logaritmo abbiamo che:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0; \\ -x, & \text{se } x < 0; \end{cases}$$

Visto che la funzione é definita per $x > 1$ e $x \neq 4$ possiamo semplificare il valore assoluto ed otteniamo:

$$|\ln(x+1)|$$

Inoltre:

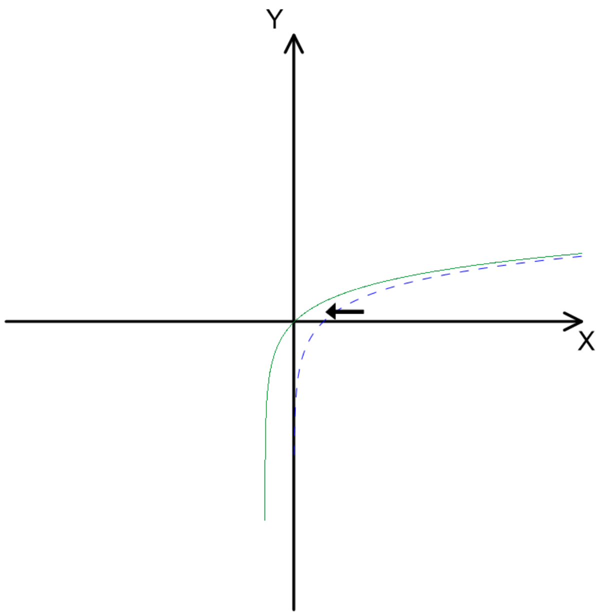
$$|\ln(x+1)| = \begin{cases} \ln(x+1), & \text{se } \ln(x+1) \geq 0 \Leftrightarrow x + 1 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0; \\ -\ln(x+1), & \text{se } \ln(x+1) < 0 \Leftrightarrow x + 1 < 1 \Leftrightarrow x < 0; \end{cases}$$

In sintesi avremo quindi:

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x+1), & \text{se } 1 < x < 4; \\ -\ln(x+1), & \text{se } x > 4; \end{cases}$$

Il grafico di quest'ultima funzione si"ottiene"dal grafico di $\ln x$ eseguendo le seguenti trasfoemazioni elementari:

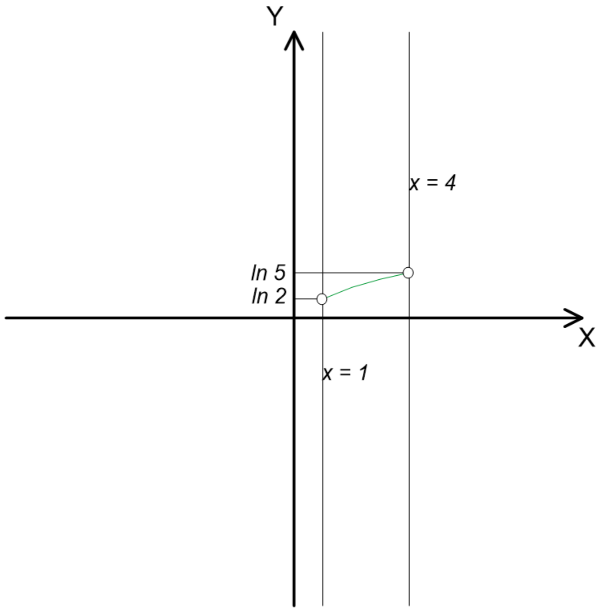
- traslandolo di 1 unitá verso sinistra si ottiene il grafico di $\ln(x+1)$



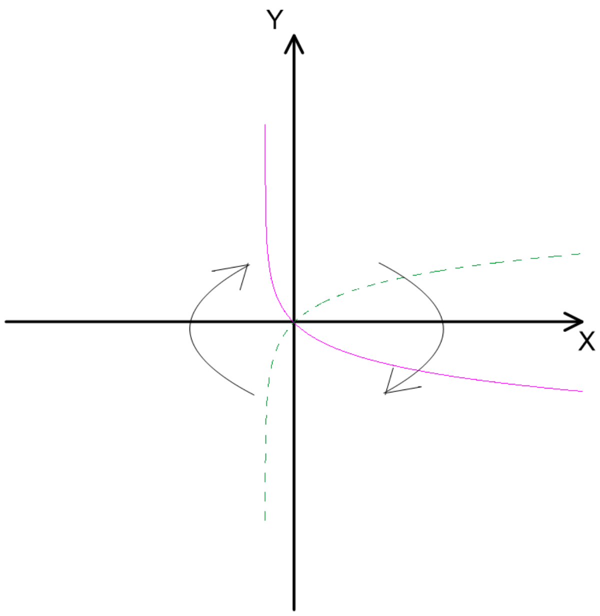
Ricordiamo che la funzione é definita per $1 < x < 4$, quindi prendiamo in considerazione solo la parte del grafico compresa tra il valore di 1 e 4 e studiando i limiti della funzione in 4 ed in 1 otteniamo:

$$f(4^-) = \lim_{x \to 4^-} \frac{|4-x|}{4-x} |\ln(|x|+1)| = \ln 5$$

$$f(1^+) = \lim_{x \to 1^+} \frac{|4-x|}{4-x} |\ln(|x|+1)| = \ln 2$$

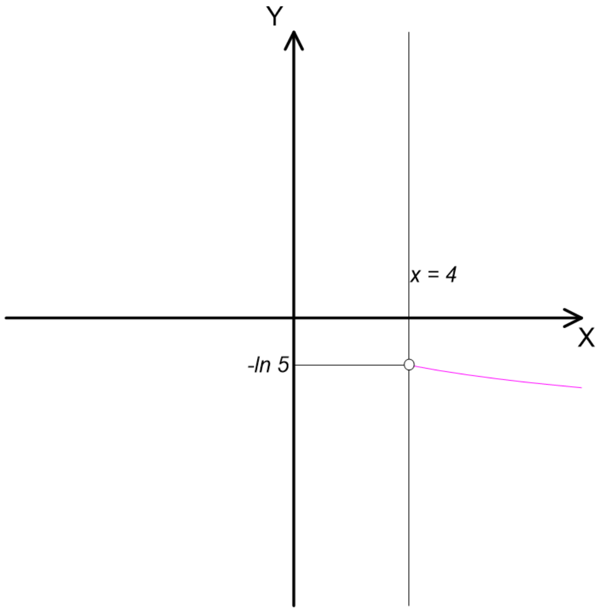


– ”ribaltandolo” rispetto all’asse x si ottiene il grafico di $-\ln(x+1)$



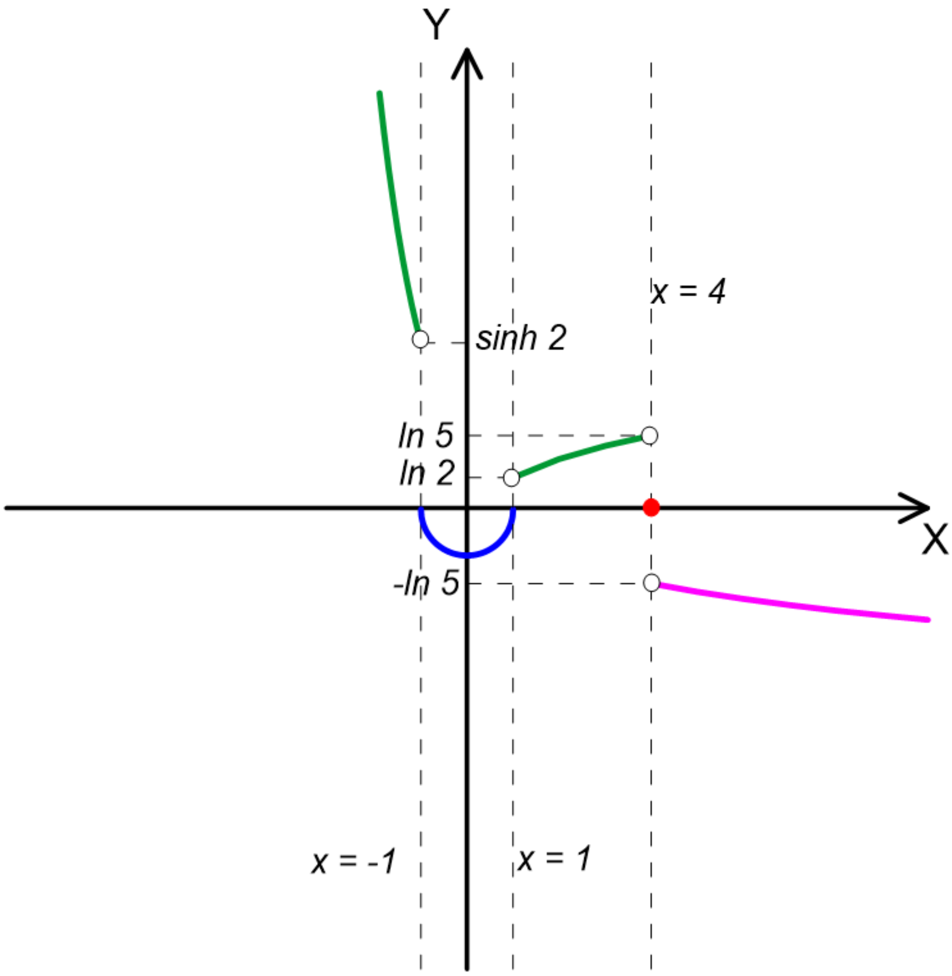
Ricordiamo che la funzione é definita per $x > 4$, quindi prendiamo in considerazione solo la parte del grafico per $x > 4$ e studiando il limite della funzione in 4 otteniamo:

$$f(4^+) = \lim_{x\to 4^+} \frac{|4-x|}{4-x} |\ln(|x|+1)| = -\ln 5$$


Y
x = 4
X
-ln 5

Riassumiamo le informazioni:

$$f(x) = \begin{cases} -\sinh(x-1), & \text{se } x < -1; \\ -\sqrt{(1-x^2)}, & \text{se } -1 \leq x \leq 1; \\ \ln(x+1), & \text{se } 1 < x < 4; \\ -\ln(x+1), & \text{se } x > 4; \\ 0, & x = 4; \end{cases}$$



1) l'insieme di definizione D_f, di continuità C_f e di derivabilità di $D_{f'}$.

   1_1) Come si può dedurre dallo studio preliminare e dal precedente grafico l'insieme di definizione corrisponde all'iniseme dei numeri reali:

$$D_f = \mathbb{R}$$

   1_2) Come si può notare dal grafico precedente l'insieme di continuità corrisponde all'insieme dei numeri reali tranne che nei punti di discontinuità:

$$C_f = \mathbb{R} - \{-1, 1, 4\}$$

   In particolare:

   – $x = -1$ punto di discontinuità di 1^a specie (di salto) con f continua a sinistra:

$$f(-1^-) = sinh(2)$$

$$f(-1^+) = 0 = f(-1)$$

   – $x = 1$ punto di discontinuità di 1^a specie (di salto) con f continua a destra:

$$f(1^-) = 0 = f(1)$$

$$f(1^+) = \ln 2$$

   – $x = 4$ punto di discontinuità di 1^a specie (di salto):

$$f(4^-) = \ln 5$$

$$f(4^+) = -\ln 5$$

   senza continuità perché $f(x) = 0$ in $x = 4$

   1_3) Come si può notare dal grafico precedente l'insieme di derivabilità corrisponde all'iniseme di continuità:

$$D_{f'} = C_f$$

   In particolare, si ha

$$f'(x) = \begin{cases} -\cosh(1-x), & \text{se } x < -1; \\ \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}}, & \text{se } -1 < x < 1; \\ \frac{1}{x+1}, & \text{se } 1 < x < 4; \\ -\frac{1}{x+1}, & \text{se } x > 4. \end{cases}$$

2) Gli intervalli di monotonia (in quali intervalli la funzione é crescente o decrescente).

   Dal grafico della funzione si evince che:

   - f é crescente negli intervalli (0,1);(1,4)
   - f é decrescente negli intervalli (-∞,-1);(-1,0);(4,+∞)

   Analiticamente si deve studiare il segno della derivata prima:

   2_1) $-\cosh(1-x) > 0 \Longleftrightarrow \cosh(x-1) < 0$
   Ciò non é possibile perché il $\cosh x$ é sempre maggiore di 0 quindi la funzione, nell'intervallo (-∞,-1) é sempre decrescente;

   2_2)
   $$\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}} \geq 0 \Longrightarrow \begin{cases} N \geq 0 & x \geq 0 \\ D > 0 & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$
   Quindi:
   - per $0 < x < 1$ la funzione é crescente;
   - per $-1 < x < 0$ la funzione é decrescente;
   - in corrispondenza di $x = 0$ c'é un punto critico di minimo locale: (0 ; -1).

   2_3)
   $$\frac{1}{x+1} \geq 0 \Longrightarrow \begin{cases} N \geq 0 & \forall x \in \mathbb{R} \\ D > 0 & x+1 > 0 \Longleftrightarrow x > -1 \end{cases}$$
   Quindi la funzione nell'intervallo (1,4) é sempre crescente;

   2_4)
   $$-\frac{1}{x+1} \geq 0$$
   Si ottiene il risultato opposto al caso precedente e quindi la funzione nell'intervallo (4,+∞) é sempre decrescente;

   P.S. $x = 4$ non é un punto di massimo perché é un punto di discontinuità e quindi non può essere un punto critico.

3) $f(D_f)$ ed eventuali punti di estremo locale e globale nel suo dominio naturale.

   3_1) L'insieme delle immagini può essere ricavato dal grafico della funzione e risulta:

$$\lim_{x\to-\infty} \sinh(x-1) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} -\ln(x+1) = -\infty$$

$$f(D_f) = (-\infty, -\ln 5) \cup [-1, 0] \cup (\ln 2, \ln 5) \cup (\sinh 2, +\infty)$$

   Oppure considerando il "Teorema dei Valori Intermedi[1]" applicato nell'insieme di continuità;

   3_2) Non esistono punti di massimo e minimo globale perché $\inf f = -\infty$ e $\sup f = +\infty$;

   3_3) (0 ; -1) punto di estremo locale (minimo).

4) Eventuali punti di estremo locale e globale nell'intervallo $[-2; 1]$

   - $(-2; \sinh 3)$ punto di massimo globale e locale (se si considera l'intorno destro di -2);
   - (0;-1) punto minimo globale e locale;
   - (1;0) massimo locale se considero l'intorno sinistro di 1.

5) Se f é iniettiva nell'intervallo $(-5, 0)$

   Osserviamo che in tale intervallo la funzione è strettamente decrescente e quindi è iniettiva. Graficamente, possiamo giustificare tale risultato tracciando delle rette orizzontali $y = c$ intersecano solo una volta il grafico della funzione quando x varia nell'intervallo $(-5, 0)$. Più precisamente si ha che comunque fissiamo $c \geq -1$ sull'asse delle ordinate la sua contro immagine $f^{-1}(c)$ si riduce ad un singoletto, ovvero f é iniettiva in $(-5, 0)$.

6) Il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = 10^{-2}$.

   Visto che $0 < 10^{-2} < \ln 2$, allora questo valore della funzione non fa parte delle immagini e quindi non esistono soluzioni.

---

[1] Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f(x)$ una funzione continua in I. Se $f(x)$ assume due valori distinti $y_1 < y_2$ in I, allora $f(x)$ assume tutti i valori compresi tra y_1 e y_2:

$$\forall y_0 : y_1 \leq y_0 \leq y_2 \; \exists \; x_0 \in I : f(x_0) = y_0$$

7) Se f soddisfa le ipotesi del Teorema di Lagrange nell'intervallo $[-1;1]$ ovvero se la restrizione della funzione f è continua in $[-1;1]$ e derivabile in $(-1;1)$. La funzioneè continua a destra in $x=-1$ e continua a sinistra in $x=1$. Quindi, la restrizione della funzione f è continua in $[-1;1]$. É derivabile in $(-1;1)$ in quanto $(-1;1)\subset D_{f'}$.

Capitolo 4

Esercizio 4 - Svolgimento traccia del 10/01/2018

1. Verificare se esistono dei parametri λ e μ per i quali risulti continua in $x = 0$ la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(\lambda x)^3 - \sin(\lambda x)^3}{\tan(\lambda x)^9}, & \text{se } x > 0; \\ 1, & \text{se } x = 0; \\ \dfrac{-\mu x + \arcsin(\mu x)}{\sin(\mu x^3)}, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

2. Studiare, al variare del parametro reale λ, il carattere della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3\lambda)^n}{(1+2\lambda)^n}.$$

Nei casi in cui converge, calcolarne la somma e stabilire se esiste un valore del parametro per il quale la somma sia massina.

3. Data la funzione

$$f(x) = 2^{\arcsin(x)}$$

determinare:

1) l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x_0 = 0.5$;
2) i polinomi di Taylor di ordine 1 e 2 centrati nel punto $x_0 = 0.5$;
3) gli intervalli di convessità e di concavità ed eventuali punti di flesso.

4. Calcolare l'area delimitata dal grafico della funzione
$$f(x) = \frac{1 - e^x}{e^{2x} + 1}$$
e dalle rette $x = -1$ e $x = 1$.

5. Data la funzione
$$f(x) = \begin{cases} e^{|x|}, & \text{se } x < 0; \\ |x(|x| - 1)|, & \text{se } 0 \leq x \leq 1; \\ \left(\frac{|x|-1}{x^2-x}\right) \frac{|x-3|}{x-3}, & \text{se } x > 1, \end{cases}$$
determinare:

1) l'insieme di definizione D_f, di continuità e di derivabilità di f.
2) gli intervalli di monotonia;
3) $f(Df)$ ed eventuali punti di estremo locale e globale nel suo dominio naturale;
4) eventuali punti di estremo locale e globale nell'intervallo $[-2; 1]$;
5) se f é iniettiva nell'intervallo $(-5, 2)$;
6) il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = 10^3$;
7) se f soddisfa le ipotesi del Teorema di Lagrange nell'intervallo $[0; 1]$.

SVOLGIMENTO

1.1 Bisogna calcolare il limite destro del primo termine:

$$f(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \frac{(\lambda x)^3 - \sin(\lambda x)^3}{\tan(\lambda x)^9}$$

Considerando lo sviluppo in serie di Mc Laurin si ottiene:

$$\sin(t) = t - \frac{t^3}{6} + o(t^3)$$

$$\tan(t) = t + o(t^2)$$

e quindi il limite diventa:

$$f(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \frac{(\lambda x)^3 - (\lambda x)^3 + \frac{(\lambda x)^9}{6} + o((\lambda x)^9)}{(\lambda x)^9 + o((\lambda x)^{18})} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{(\lambda x)^9}{6} + o((\lambda x)^9)}{(\lambda x)^9 + o((\lambda x)^{18})} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{(\lambda x)^9 \left[\frac{1}{6} + \frac{o((\lambda x)^9)}{(\lambda x)^9}\right]}{(\lambda x)^9 \left[1 + \frac{o((\lambda x)^{18})}{(\lambda x)^9}\right]}$$

Ricordando che:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{o((\lambda x)^9)}{(\lambda x)^9} = 0$$

si ottiene:

$$f(0^+) = \frac{1}{6}$$

Quindi se $x > 0$ non esiste λ per cui f é continua a destra in $x = 0$

1.2 Bisogna calcolare il limite sinistro del terzo termine:

$$f(0^-) = \lim_{x\to 0^-} \frac{-\mu x + \arcsin(\mu x)}{\sin(\mu x^3)}$$

Considerando lo sviluppo in serie di Mc Laurin si ottiene:

$$\sin(t) = t + o(t)$$

$$\arcsin(t) = t + \frac{t^3}{6} + o(t^3)$$

e quindi il limite diventa:

$$f(0^-) = \lim_{x\to 0^-} \frac{-\mu x + \mu x + \frac{(\mu x)^3}{6} + o((\mu x)^3)}{\mu x^3 + o(\mu x^3)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{(\mu x)^3}{6} + o((\mu x)^3)}{\mu x^3 + o(\mu x^3)} =$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{(\mu x)^3 \left[\frac{1}{6} + \frac{o((\mu x)^3)}{(\mu x)^3}\right]}{\mu x^3 \left[1 + \frac{o(\mu x^3)}{\mu x^3}\right]} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{\mu^3 x^3}{6}}{\mu x^3} = \frac{\mu^2}{6}$$

Quindi se $x < 0 \implies f$ é continua a sinistra;

In $x = 0 \implies \frac{\mu^2}{6} = 1 \Leftrightarrow \mu = \pm\sqrt{6}$

2

$$q = \frac{3\lambda}{1 + 2\lambda}$$

se $-1 < q < 1$ allora la serie converge:

$$-1 < \frac{3\lambda}{1+2\lambda} < 1 \implies \begin{cases} \frac{3\lambda}{1+2\lambda} > -1 \\ \frac{3\lambda}{1+2\lambda} < 1 \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{5\lambda+1}{1+2\lambda} > 0 \\ \frac{\lambda-1}{1+2\lambda} < 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \lambda < -\frac{1}{2}; \lambda < -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{2} < \lambda < 1 \end{cases}$$

Quindi:

- la serie converge se $-\frac{1}{5} < \lambda < 1$;
- la serie é indeterminata per $\lambda \leq -\frac{1}{5} \implies q \leq -1$;
- la serie é divergente per $\lambda \geq 1 \implies q \leq 1$.

$$S = \frac{q}{1-q} = \frac{\frac{3\lambda}{1+2\lambda}}{1 - \frac{3\lambda}{1+2\lambda}} = \frac{\frac{3\lambda}{1+2\lambda}}{\frac{1+2\lambda-3\lambda}{1+2\lambda}} = \frac{\frac{3\lambda}{1+2\lambda}}{\frac{1-\lambda}{1+2\lambda}} = \frac{3\lambda}{1+2\lambda} \cdot \frac{1+2\lambda}{1-\lambda} = \frac{3\lambda}{1-\lambda}$$

per $-\frac{1}{5} < \lambda < 1$.

$$S'(\lambda) = 3 \cdot \frac{1 - \lambda + \lambda}{(1-\lambda)^2} = \frac{3}{(1-\lambda)^2}$$

La derivata della somma è sempre maggiore di 0 quindi S é sempre crescente e inoltre:

$\lim_{x\to 1^-} S(\lambda) = +\infty \implies$ non c'é massimo

3 $\arcsin(x) \iff -1 \leq x \leq 1 \implies D(f) = [-1, 1]$

3.1

$$f'(x) = 2^{\arcsin(x)} \frac{\ln 2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f''(x) = 2^{\arcsin(x)} \cdot \frac{\ln^2 2}{1-x^2} + 2^{\arcsin(x)} \cdot \ln 2 \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2}(1-x^2)} =$$

$$= \frac{2^{\arcsin(x)} \ln 2}{1-x^2} \left[\ln 2 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right]$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{\frac{\pi}{6}}$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{\frac{\pi}{6}} \cdot \frac{\ln 2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2^{\frac{\pi}{6}+1} \cdot \frac{\ln 2}{\sqrt{3}}$$

$$f''\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2^{\frac{\pi}{6}} \ln 2}{\frac{3}{4}} \left[\ln 2 + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right] = 2^{\frac{\pi}{6}+2} \cdot \frac{\ln 2}{3} \left[\ln 2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right] =$$

Retta tangente:

$$y - f\left(\frac{1}{2}\right) = f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$y - 2^{\frac{\pi}{6}} = 2^{\frac{\pi}{6}+1} \frac{\ln 2}{\sqrt{3}} \left(x - \frac{1}{2}\right)$$

3.2 P1:

$$y = 2^{\frac{\pi}{6}} + 2^{\frac{\pi}{6}+1} \cdot \frac{\ln 2}{\sqrt{3}} \left(x - \frac{1}{2}\right)$$

P2:

$$y = 2^{\frac{\pi}{6}} + 2^{\frac{\pi}{6}+1} \frac{\ln 2}{\sqrt{3}} \left(x - \frac{1}{2}\right) + 2^{\frac{\pi}{6}+2} \cdot \frac{\ln 2}{3 \cdot 2} \left[\ln 2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right] \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$$

3.3

$$f''(x) > 0 \iff \ln 2 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} > 0$$

per $x \geq 0 \implies f''(x) > 0$

per $x < 0 \implies f''(x) > 0 \iff \ln 2 > \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \implies \ln^2 2 > \frac{x^2}{1-x^2} \implies \ln^2 2\,(1-x^2) > x^2 \implies \ln^2 2 - x^2 \ln^2 2 > x^2 \implies \ln^2 2 > x^2\left(1 + \ln^2 2\right) \implies x^2 < \frac{\ln^2 2}{1+\ln^2 2} \iff -\frac{\ln 2}{\sqrt{1+\ln^2 2}} < x < 0$ (ricordando che siamo nel caso di $x < 0$)

$$f''(x) > 0 \iff -\frac{\ln 2}{\sqrt{1+\ln^2 2}} < x < 1$$

f é convessa in $\left]-\frac{\ln 2}{\sqrt{1+\ln^2 2}}, 1\right]$

f é concava in $\left[-1, -\frac{\ln 2}{\sqrt{1+\ln^2 2}}\right[$

$x = -\frac{\ln 2}{\sqrt{1+\ln^2 2}}$ é punto di flesso

4 Calcoliamo prima $I = \int \frac{1-e^x}{e^{2x}+1} dx$

Poniamo $e^x = t \Longrightarrow dx = \frac{1}{t} dt$

$$I = \int \frac{1-t}{t^2+1} \cdot \frac{1}{t} dt$$

$$\frac{At+B}{t^2+1} + \frac{C}{t} = \frac{1-t}{t\left(t^2+1\right)}$$

$$\begin{cases} A+C=0 \\ B=-1 \\ C=1 \end{cases} \begin{cases} A=-1 \\ B=-1 \\ C=1 \end{cases}$$

Quindi:

$$I = \int \left(\frac{-t-1}{t^2+1} + \frac{1}{t} \right) dt = \int \left(\frac{-t}{t^2+1} + \frac{-1}{t^2+1} + \frac{1}{t} \right) dt =$$

$$= -\arctan t - \frac{1}{2} \ln \left(t^2+1\right) + \ln |t| + c$$

Sostituiamo $t = e^x$:

$$I = -\arctan e^x - \frac{1}{2} \ln \left(e^{x^2}+1\right) + \ln |e^x| + c = -\arctan e^x - \ln \left(\sqrt{e^{2x}+1}\right) + \ln |e^x| + c =$$

$$= -\arctan e^x + \ln \frac{e^x}{\left(\sqrt{e^{2x}+1}\right)} + c =$$

Per calcolare l'area studiamo il segno della funzione:

Il denominatore é sempre positivo; Il numeratore:

$$1 - e^x > 0 \Longleftrightarrow e^x < 1 \Longleftrightarrow x < 0$$

Quindi abbiamo ottenuto che per $-1 < x < 0$ la funzione é positiva e per $0 < x < 1$ la funzione é negativa e l'area vale:

$$Area = \int_{-1}^{0} f(x)dx - \int_{0}^{1} f(x)dx = \left[-\arctan e^x + \ln \frac{e^x}{\left(\sqrt{e^{2x}+1}\right)} \right]_{-1}^{0} +$$

$$- \left[-\arctan e^x + \ln \frac{e^x}{\left(\sqrt{e^{2x}+1}\right)} \right]_{0}^{1} =$$

$$= \left[-\arctan 1 + \ln \frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)} + \arctan e^{-1} - \ln \frac{e^{-1}}{\left(\sqrt{e^{-2}+1}\right)} \right] +$$

$$-\left[-\arctan e+\ln\frac{e}{\left(\sqrt{e^2+1}\right)}+\arctan 1-\ln\frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)}\right]=$$

$$=-\arctan 1+\ln\frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)}+\arctan e^{-1}-\ln\frac{e^{-1}}{\left(\sqrt{e^{-2}+1}\right)}+\arctan e+$$

$$-\ln\frac{e}{\left(\sqrt{e^2+1}\right)}-\arctan 1+\ln\frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)}=$$

$$=-2\arctan 1+2\ln\frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)}+\arctan e+\arctan e^{-1}-\ln\frac{e}{\left(\sqrt{e^2+1}\right)}-\ln\frac{e^{-1}}{\left(\sqrt{e^{-2}+1}\right)}$$

5 Semplifichiamo i valori assoluti:

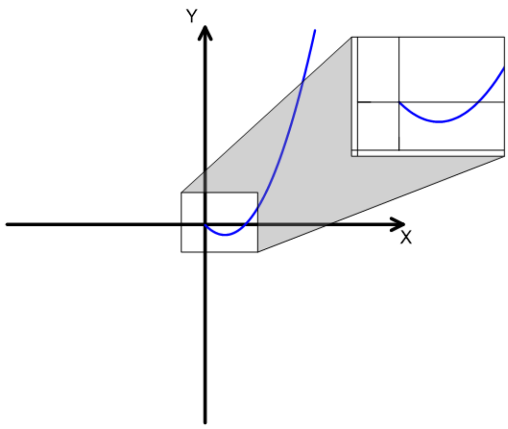
I $f_I(x) = e^{|x|}$

$$e^{|x|} = \begin{cases} e^x & \text{se } x \geq 0; \\ e^{-x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

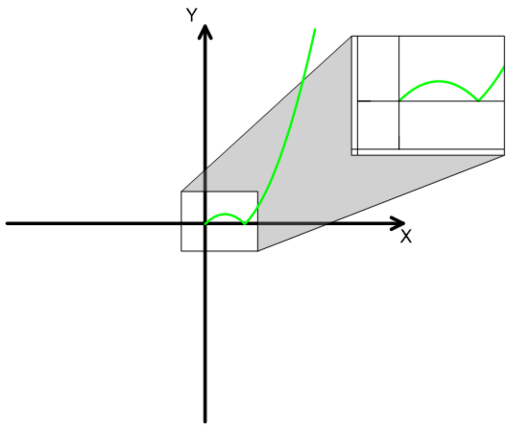
Dalla traccia si nota che la funzione é definita con questa legge per $x < 0$ e quindi $f_I(x) = e^{-x}$ Inoltre:

$$\lim_{x \to 0^-} e^{-x} = e^{0^+} = 1$$

II Per $x > 0$ si ha $f_{II}(x) = |x(x-1)|$
Si può notare che $y = x(x-1) = x^2 - x$ rappresenta una parabola con asse di simmetria verticale con il vertice di coordinate $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right)$ e con il fuoco di coordinate$\left(\frac{1}{2}; 0\right)$:

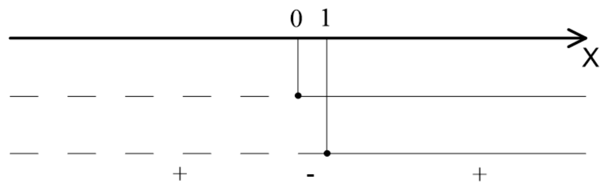


In particolare per $y = 0 \Longrightarrow x = 0$ e $x = 1$
Considerando il valore assoluto si ha un ribaltamento della parte negativa rispetto all'asse x:



Analiticamente:

$$x(x-1) \geq 0 \Longrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \Longrightarrow x \geq 1 \end{cases}$$



$$f_{II}(x) = |x(x-1)| = \begin{cases} x(x-1) & \text{se } x(x-1) > 0 \Longleftrightarrow x > 1; \\ -x(x-1) & \text{se } x(x-1) \leq 0 \Longleftrightarrow 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Dalla traccia si nota che questa funzione é definita per $0 \leq x \leq 1$ e quindi $f_{II}(x) = -x(x-1) = x(1-x)$

III $f_{III}(x) = \left(\frac{|x|-1}{x^2-x}\right) \frac{|x-3|}{x-3}$

$$C.E.: \begin{cases} x^2 - x \neq 0 \\ x - 3 \neq 0 \end{cases} \begin{cases} x(x-1) \neq 0 \Longrightarrow x \neq 0 \vee x \neq 1 \\ x \neq 3 \end{cases}$$

– Per $x - 3 > 0 \Longleftrightarrow x > 3$:

$$f_{III}(x) = \frac{|x|-1}{x^2-x} = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2-x} = \frac{1}{x} & \text{se } x > 0; \\ \frac{-x-1}{x^2-x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

– Per $x - 3 < 0 \Longleftrightarrow x < 3$:

$$f_{III}(x) = -\frac{|x|-1}{x^2-x} = \begin{cases} -\frac{x-1}{x^2-x} = -\frac{1}{x} & \text{se } x > 0; \\ -\frac{-x-1}{x^2-x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Dalla traccia si nota che questa funzione é definita per $x > 1$ e quindi:

$$f_{III}(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} & \text{se } 1 < x < 3; \\ \frac{1}{x} & \text{se } x > 3; \end{cases}$$

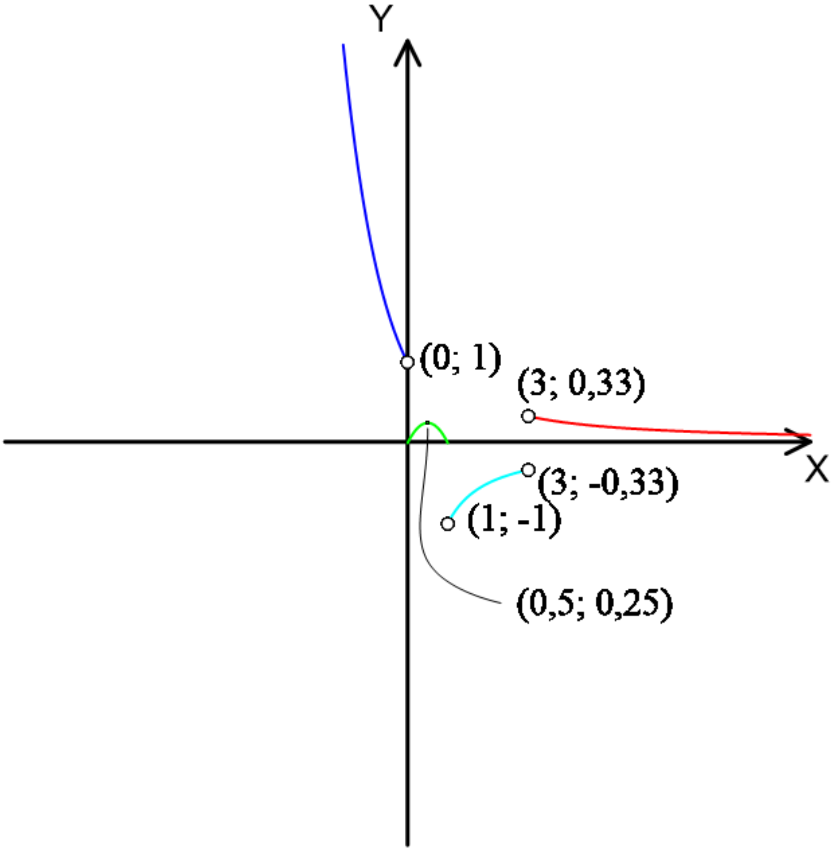
$$\lim_{x\to 1^+} -\frac{1}{x} = -1$$

$$\lim_{x\to 3^-} -\frac{1}{x} = -\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{3}$$

La funzione si semplifica cosí:

$$f(x) = \begin{cases} e^-x & x < 0; \\ x-(1-x) & x \leq 0 \leq 1; \\ -\frac{1}{x} & \text{se } 1 < x < 3; \\ \frac{1}{x} & \text{se } x > 3; \end{cases}$$



5.1 Insieme di definizione D_f, di continuitá e di derivabilitá di f.

Dal grafico della funzione si evince che:

- $D_f = \mathbb{R} - \{3\}$
- f é continua in $\mathbb{R} - \{0, 1, 3\}$

- $f^-(0) = 1; f^+(0) = 0 = f(0)$
  $f^-(1) = 0 = f(1); f^+(1) = -1$
- f é derivabile in $\mathbb{R} - \{0, 1, 3\}$ e inoltre:

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & \text{se } x < 0; \\ 1 - 2x & \text{se } 0 \leq x \leq 1; \\ \frac{1}{x^2} & \text{se } 1 < x < 3; \\ -\frac{1}{x^2} & \text{se } x > 3; \end{cases}$$

5.2 Gli intervalli di monotonia

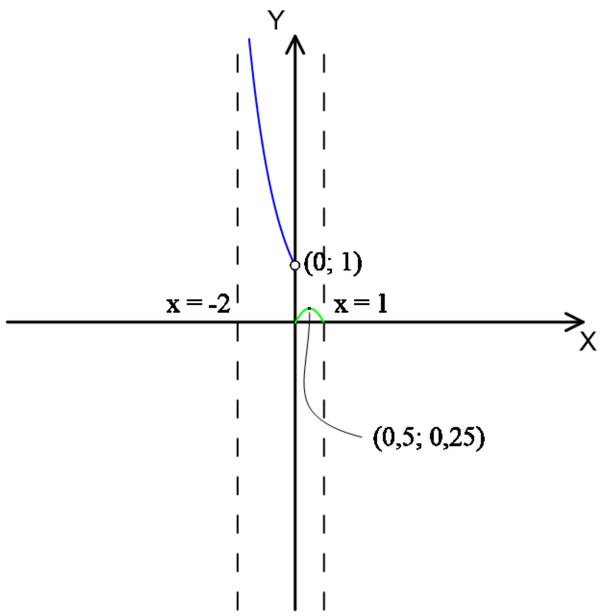
Dal grafico della funzione si evince che

- $f'(x) > 0$ in $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ e in $(1, 3)$
- $f'(x) < 0$ in $(-\infty, 0)$, in $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ e in $(3, +\infty)$
- $x = 0$ punto di minimo relativo
- $x = \frac{1}{2}$ punto di massimo relativo

5.3 $f(D_f)$ ed eventuali punti di estremo locale e globale nel suo dominio naturale Dal grafico della funzione si evince che

- $f(D_f) = \left(-1, -\frac{1}{3}\right) \cup \left[0, \frac{1}{3}\right) \cup (1, +\infty)$
- Non ci sono punti di estremo globale

5.4 Eventuali punti di estremo locale e globale nell'intervallo $[-2; 1]$ Considerando $f_{[-2;1]}$:



si nota che:

- $x = -2$ punto di massimo relativo e assoluto
- $x = 0$, $x = 1$ punti di minimo relativo e assoluto
- $x = \frac{1}{2}$ punto di massimo relativo

5.5 Determinare se f é iniettiva nell'intervallo $(-5, 2)$
f non é iniettiva in $[0, 1] \Rightarrow f$ non é iniettiva in $(-5, 2)$

5.6 L'equazione $f(x) = 10^3$ ha una sola soluzione

5.7 f soddisfa le ipotesi del Teorema di Lagrange nell'intervallo $[0; 1]$ in quanto:

- f é continua in $[0; 1]$
- f é derivabile in $(0; 1)$

Capitolo 5

Esercizio 5 - Svolgimento traccia del 25/01/2018

1. Verificare se esistono dei parametri λ e μ per i quali risulti continua in $x = 0$ la funzione:
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(\sqrt{\lambda}x^3) - \tan(\sqrt{\lambda}x^3)}{\sin(\lambda x)^3}, & \text{se } x > 0; \\ 1, & \text{se } x = 0; \\ \dfrac{x^2 - \arctan(\mu x^2)}{\tan((\mu + \mu^2)x^2)}, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

2. Studiare, al variare del parametro reale λ, il carattere della seguente serie:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{(1 - 4\lambda)^n}.$$
Nei casi in cui converge, calcolarne la somma e stabilire se esiste un valore del parametro per il quale la somma sia massina.

3. Data la funzione
$$f(x) = 2^{\arccos(x)}$$
determinare:
   1) l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x_0 = 0.5$;
   2) i polinomi di Taylor di ordine 1 e 2 centrati nel punto $x_0 = 0.5$;
   3) gli intervalli di convessità e di concavità ed eventuali punti di flesso.

4. Calcolare l'area delimitata dal grafico della funzione
$$f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^x + 2}$$
e dalle rette $y = 0$, $x = -1$ e $x = 1$.

5. Data la funzione
$$f(x) = \begin{cases} e^{|x|+1}, & \text{se } x < 0; \\ |x(2 - |x|)|, & \text{se } 0 \leq x \leq 2; \\ \left(\frac{|x|-2}{x^2-4}\right) \frac{|x-3|}{x-3}, & \text{se } x > 2, \end{cases}$$
determinare:

   1) l'insieme di definizione D_f, di continuità e di derivabilità di f.
   2) gli intervalli di monotonia;
   3) $f(Df)$ ed eventuali punti di estremo locale e globale;
   4) eventuali punti di estremo locale e globale nell'intervallo $[-2; 1]$;
   5) se f é iniettiva nell'intervallo $(-2, 2)$;
   6) il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = 10^2$;
   7) se f soddisfa le ipotesi del Teorema di Rolle nell'intervallo $[0; 2]$.

SVOLGIMENTO

1.1 Bisogna calcolare il limite destro del primo termine:
$$f(0^+) = \lim_{x \to 0^+} \frac{(\sqrt{\lambda}x^3) - \tan(\sqrt{\lambda}x^3)}{\sin(\lambda x)^3}$$
Considerando lo sviluppo in serie di Mc Laurin si ottiene:
$$\sin(t) = t + o(t)$$
$$\tan(t) = t + \frac{t^3}{3} + o(t^4)$$
e quindi il limite diventa:
$$f(0^+) = \lim_{x \to 0^+} \frac{(\sqrt{\lambda}x^3) - (\sqrt{\lambda}x^3) - \frac{(\sqrt{\lambda}x^3)^3}{3} - o((\sqrt{\lambda}x^3)^4)}{(\lambda x)^3 + o((\lambda x)^3)} =$$
$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{-\frac{(\sqrt{\lambda}x^3)^3}{3} - o((\sqrt{\lambda}x^3)^4)}{(\lambda x)^3 + o((\lambda x)^3)} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{(\sqrt{\lambda}x^3)^3 \left[-\frac{1}{3} - \frac{o((\sqrt{\lambda}x^3)^4)}{(\sqrt{\lambda}x^3)^3}\right]}{(\lambda x)^3 \left[1 + \frac{o((\lambda x)^3)}{(\lambda x)^3}\right]}$$

Ricordando che:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{o((\sqrt{\lambda}x^3)^4)}{(\sqrt{\lambda}x^3)^3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{o((\lambda x)^3)}{(\lambda x)^3} = 0$$

si ottiene:

$$f(0^+) = 0.$$

Quindi, essendo $f(0) = 1$, non esistono valori del parametro λ per i quali la funzione sia continua a destra.

1.2 Per completezza studiamo anche la continuità a sinistra. Calcoliamo il limite sinistro del terzo termine:

$$f(0^-) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2 - \arctan(\mu x^2)}{\tan[(\mu + \mu^2)x^2]}$$

Considerando lo sviluppo in serie di Mc Laurin si ottiene:

$$\arctan(t) = t - \frac{t^3}{3} + o(t^4)$$

$$\tan(t) = t + o(t^2)$$

e quindi il limite diventa:

$$f(0^-) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2 - \mu x^2 + \frac{(\mu x^2)^3}{3} - o((\mu x^2)^4)}{(\mu + \mu^2)x^2 + o([(\mu + \mu^2)x^2]^2)}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2 \left[1 - \mu + \frac{(\mu^3 x^4)}{3} - \frac{o((\mu x^2)^4)}{x^2}\right]}{x^2 \left[(\mu + \mu^2) + \frac{o([(\mu+\mu^2)x^2]^2)}{x^2}\right]}$$

Ricordando che:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{(\mu^3 x^4)}{3} = \lim_{x\to 0^-} \frac{o((\mu x^2)^4)}{x^2} = \lim_{x\to 0^-} \frac{o([(\mu + \mu^2)x^2]^2)}{x^2} = 0$$

Si ottiene:

$$f(0^-) = \frac{1-\mu}{\mu + \mu^2}$$

Quindi se $x < 0 \Longrightarrow f$ é continua a sinistra;

In $x = 0 \Longrightarrow \frac{1-\mu}{\mu+\mu^2} = 1 \Leftrightarrow 1 - \mu = \mu + \mu^2 \Longleftrightarrow \mu^2 + 2\mu - 1 = 0$

Da cui si ottiene:

$$\mu = -1 \pm \sqrt{2}$$

2
$$q = \frac{\lambda}{1-4\lambda}, \quad \lambda \neq \frac{1}{4}$$

- se $-1 < q < 1$ allora la serie converge:

$$-1 < \frac{\lambda}{1-4\lambda} < 1 \Longrightarrow \begin{cases} \frac{\lambda}{1-4\lambda} > -1 \\ \frac{\lambda}{1-4\lambda} < 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \frac{1-3\lambda}{1-4\lambda} > 0 \\ \frac{5\lambda-1}{1-4\lambda} < 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda < \frac{1}{4}; \lambda > \frac{1}{3} \\ \lambda < \frac{1}{5}; \lambda > \frac{1}{4} \end{cases}$$

  Quindi la serie converge per $\lambda < \frac{1}{5}; \lambda > \frac{1}{3}$ e la la somma vale:

$$S(\lambda) = \frac{q}{1-q} = \frac{\frac{\lambda}{1-4\lambda}}{1-\frac{\lambda}{1-4\lambda}} = \frac{\frac{\lambda}{1-4\lambda}}{\frac{1-4\lambda-\lambda}{1-4\lambda}} = \frac{\frac{\lambda}{1-4\lambda}}{\frac{1-5\lambda}{1-4\lambda}} = \frac{\lambda}{1-4\lambda} \cdot \frac{1-4\lambda}{1-5\lambda} = \frac{\lambda}{1-5\lambda}$$

$$S'(\lambda) = \frac{1-5\lambda-(-5\lambda)}{(1-5\lambda)^2} = \frac{1}{(1-5\lambda)^2}$$

  La derivata della somma é sempre maggiore di 0 quindi S é sempre crescente e inoltre:

$$\lim_{\lambda \to (1/5)-} S(\lambda) = +\infty,$$

  quindi non esiste un valore del parametro per il quale la somma sia massima.

- la serie é indeterminata per $q \leq -1 \Longrightarrow \frac{1-3\lambda}{1-4\lambda} \leq 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{4} < \lambda \leq \frac{1}{3}$;
- la serie é divergente per $q \geq 1 \Longrightarrow \frac{5\lambda-1}{1-4\lambda} \geq 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{5} \leq \lambda < \frac{1}{4}$.

3 $f(x) = 2^{\arccos(x)}$

$\arccos(x) \Longleftrightarrow -1 \leq x \leq 1 \Longrightarrow D(f) = [-1, 1]$

3.1 L'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x_0 = 0.5$ é:
$$y - f\left(\frac{1}{2}\right) = f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

con $f'(x) = -\ln 2 \cdot \frac{2^{\arccos(x)}}{\sqrt{1-x^2}}$

da cui:

$$f'(\frac{1}{2}) = -\ln 2 \cdot \frac{2^{\arccos\left(\frac{1}{2}\right)}}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}} = -\ln 2 \cdot \frac{2^{\left(\frac{\pi}{3}\right)}}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}} = -\ln 2 \cdot \frac{2^{\left(\frac{\pi}{3}\right)}}{\sqrt{\frac{3}{4}}} =$$

$$= -\ln 2 \cdot \frac{2^{\left(\frac{\pi}{3}\right)}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -2^{\frac{\pi}{3}+1} \cdot \frac{\ln 2}{\sqrt{3}}$$

e quindi:

$$y - 2^{\left(\frac{\pi}{3}\right)} = -2^{\frac{\pi}{3}+1} \cdot \frac{\ln 2}{\sqrt{3}} \left(x - \frac{1}{2}\right)$$

3.2 I polinomi di Taylor di ordine 1 e 2 centrati nel punto di ascissa $x_0 = 0.5$

P1 $y = f\left(\frac{1}{2}\right) + f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) = 2^{\left(\frac{\pi}{3}\right)} - 2^{\frac{\pi}{3}+1} \cdot \frac{\ln 2}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{1}{2}\right)$

P2 $y = f\left(\frac{1}{2}\right) + f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + f''\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$
con:

$$f''(x) = -\ln 2 \cdot \frac{f'(x)\sqrt{1-x^2} - f(x) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} =$$

$$= -\ln 2 \cdot \frac{-\ln 2 \cdot \frac{2^{\arccos(x)}}{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2} + 2^{\arccos(x)} \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} =$$

$$= \frac{-2^{\arccos(x)}\ln 2}{1-x^2} \cdot \left[-\ln 2 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right] =$$

$$= \frac{2^{\arccos(x)}\ln 2}{1-x^2} \cdot \left[\ln 2 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right] =$$

da cui:

$$f''\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2^{\arccos\left(\frac{1}{2}\right)}\ln 2}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} \cdot \left[\ln 2 - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}}\right] = \frac{2^{\frac{\pi}{3}}\ln 2}{\frac{3}{4}} \cdot \left[\ln 2 - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right] =$$

$$= 2^{\frac{\pi}{3}+2} \cdot \frac{\ln 2}{3}\left[\ln 2 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right] =$$

Quindi:

$$y = 2^{\left(\frac{\pi}{3}\right)} - 2^{\frac{\pi}{3}+1} \cdot \frac{\ln 2}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{1}{2}\right) + 2^{\frac{\pi}{3}+2} \cdot \frac{\ln 2}{3}\left[\ln 2 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right]\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$$

3.3 Intervalli di convessità e di concavità ed eventuali punti di flesso

$$f''(x) > 0 \iff \ln 2 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} > 0$$

per $x < 0 \Longrightarrow f''(x) > 0$

per $x > 0 \Longrightarrow f''(x) > 0 \Longleftrightarrow \ln 2 > \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \Longrightarrow \ln^2 2 > \frac{x^2}{1-x^2} \Longrightarrow \ln^2 2\,(1-x^2) > x^2 \Longrightarrow \ln^2 2 - x^2 \ln^2 2 > x^2 \Longrightarrow \ln^2 2 > x^2\left(1+\ln^2 2\right) \Longrightarrow x^2 < \frac{\ln^2 2}{1+\ln^2 2} \Longleftrightarrow 0 < x < \frac{\ln 2}{\sqrt{1+\ln^2 2}}$ (ricordando che siamo nel caso di $x > 0$)

$$f''(x) > 0 \Longleftrightarrow -1 < x < \frac{\ln 2}{\sqrt{1+\ln^2 2}}$$

f é convessa in $\left[-1, \frac{\ln 2}{\sqrt{1+\ln^2 2}}\right[$

f é concava in $\left]\frac{\ln 2}{\sqrt{1+\ln^2 2}}, 1\right]$

$x = \frac{\ln 2}{\sqrt{1+\ln^2 2}}$ é punto di flesso

4 Calcolare l'area delimitata dal grafico della funzione:

$$f(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^x+2}$$

e dalle rette $y = 0$, $x = -1$ e $x = 1$

Calcoliamo prima $I = \int \frac{e^{2x}-1}{e^x+2}$

Poniamo $e^x = t \Longrightarrow dx = \frac{1}{t}dt$

$$I = \int \frac{t^2-1}{t+2} \cdot \frac{1}{t}dt = \int \frac{t^2-1}{t^2+2t}dt$$

Visto che il grado del polinomio è uguale al grado del polinomio al denominatore si può effettuare la divisione polinomiale tra numeratore e denominatore, cosìda determinare il polinomio quoziente $Q(x)$, di grado minore a quello di $N(x)$, ed il polinomio resto $R(x)$, di grado minore di quello di $D(x)$:

$$N(x) = Q(x)D(x) + R(x)$$

In questo modo, sostituendo tale espressione nella funzione integranda

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{Q(x)D(x) + R(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$$

possiamo riscrivere l'integrale nella forma

$$\int \frac{N(x)}{D(x)}dx = \int Q(x)dx + \int \frac{R(x)}{D(x)}dx$$

e si ottiene l'integrale di partenza come una somma di integrali di più facile risoluzione.

t^2		-1	t^2+2t
t^2	+2t		1
//	-2t	-1	

Si ottiene:

$$I=\int \frac{t^2-1}{t^2+2t}dt=\int dt+\int \frac{-2t-1}{t^2+2t}dt=t-\int \frac{2t+1}{t^2+2t}dt=t-\int \frac{2t+1+1-1}{t^2+2t}dt=$$

$$=t-\int \frac{2t+2}{t^2+2t}dt+\int \frac{1}{t^2+2t}dt=t-\ln\left|t^2+2t\right|+\int \frac{1}{t^2+2t}dt$$

Per risolvere l'ultimo integrale utilizziamo il metodo dei fratti semplici:

$$\frac{1}{t^2+2t}=\frac{1}{t(t+2)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t+2}=\frac{A(t+2)+Bt}{t(t+2)}=\frac{At+Bt+2A}{t(t+2)}=\frac{(A+B)t+2A}{t(t+2)}$$

Da cui:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A=\frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} B=-\frac{1}{2} \\ A=\frac{1}{2} \end{cases}$$

Quindi:

$$I=t-\ln\left|t^2+2t\right|+\int \frac{1}{t^2+2t}dt=t-\ln\left|t^2+2t\right|+\frac{1}{2}\int \frac{1}{t}dt-\frac{1}{2}\int \frac{1}{t+2}dt=$$

$$=t-\ln\left|t^2+2t\right|+\frac{1}{2}\ln|t|-\frac{1}{2}\ln|t+2|+c$$

Sostituiamo $t=e^x$:

$$I=e^x-\ln\left(e^{2x}+2e^x\right)+\frac{1}{2}\ln\left(e^x\right)-\frac{1}{2}\ln\left(e^x+2\right)+c=$$

$$=e^x-\ln e^x\left(e^x+2\right)+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\ln\left(e^x+2\right)+c=$$

$$=e^x-\ln e^x-\ln\left(e^x+2\right)+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\ln\left(e^x+2\right)+c=$$

$$=e^x-x-\ln\left(e^x+2\right)+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\ln\left(e^x+2\right)+c=$$

$$=e^x-\frac{x}{2}-\frac{3}{2}\ln\left(e^x+2\right)+c$$

Per calcolare l'area studiamo il segno della funzione $f(x)=\frac{e^{2x}-1}{e^x+2}$:

Il denominatore é sempre positivo; Il numeratore:

$$e^{2x} - 1 > 0 \iff e^{2x} > 1 \iff e^{2x} > e^0 \iff 2x > 0 \iff x > 0$$

Quindi abbiamo ottenuto che per $x > 0$ la funzione è positiva e per $x < 0$ la funzione è negativa e l'area vale:

$$Area = -\int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx = -\left[e^x - \frac{x}{2} - \frac{3}{2}\ln(e^x+2)\right]_{-1}^{0} + \left[e^x - \frac{x}{2} - \frac{3}{2}\ln(e^x\right.$$

$$= -\left[1 - \frac{3}{2}\ln(3) - e^{-1} - \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\ln\left(e^{-1}+2\right)\right] + \left[e - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\ln(e+2) - 1 + \frac{3}{2}\ln(3)\right] =$$

$$= -1 + \frac{3}{2}\ln(3) + \frac{1}{e} + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\ln\left(\frac{1}{e}+2\right) + e - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\ln(e+2) - 1 + \frac{3}{2}\ln(3) =$$

$$= -2 + 3\ln 3 + \frac{1}{e} - \frac{3}{2}\left[\ln\left(\frac{1}{e}+2\right) + \ln(e+2)\right] + e$$

5

5 Semplifichiamo i valori assoluti:

I $f_I(x) = e^{|x|+1}$

$$e^{|x|+1} = \begin{cases} e^{x+1} & \text{se } x \geq 0; \\ e^{1-x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

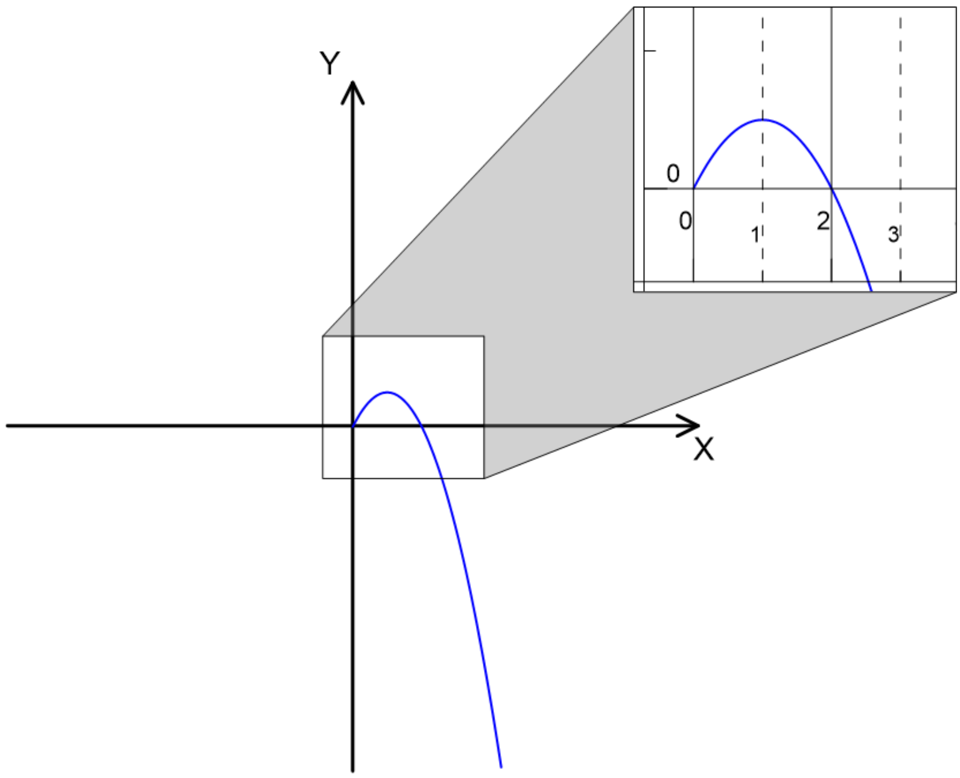
Dalla traccia si nota che questa funzione é definita per $x < 0$ e quindi $f_I(x) = e^{1-x}$

Inoltre:

$$\lim_{x \to 0^-} e^{1-x} = e^{1^+} = e$$

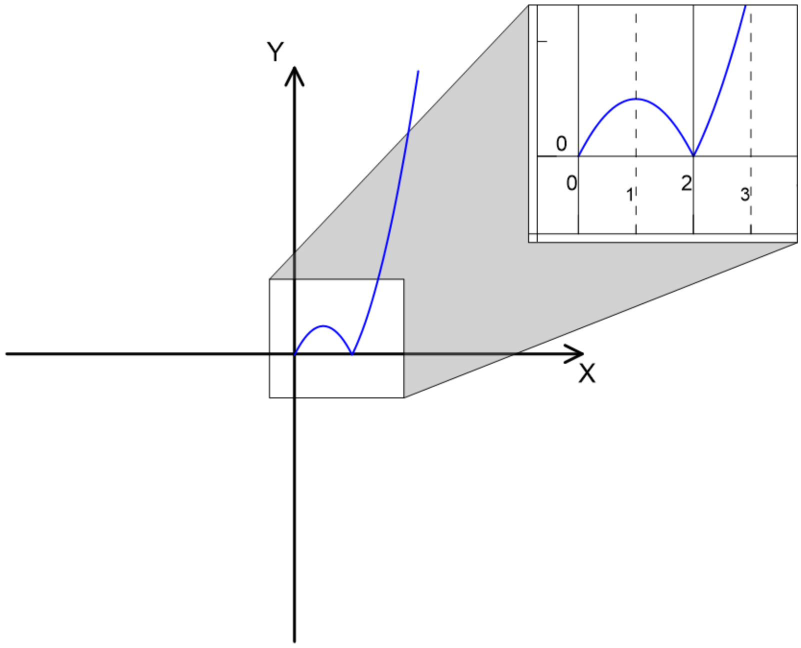
II Per $x \geq 0$ si ha $f_{II}(x) = |x(2-x)|$

Si può notare che $y = x(2-x) = 2x - x^2$ rappresenta una parabola con asse di simmetria verticale con concava verso il basso, con il vertice di coordinate $(1;1)$ e con il fuoco di coordinate$\left(1; \frac{3}{4}\right)$:



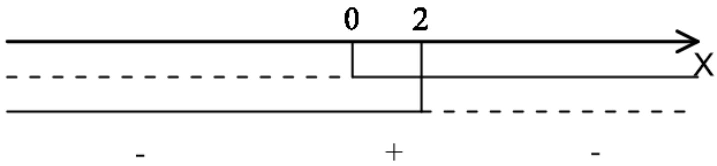
In particolare per $y = 0 \Longrightarrow x = 0$ e $x = 2$

Considerando il valore assoluto si ha un ribaltamento della parte negativa rispetto all'asse x:



Analiticamente:

$$x(2-x) \geq 0 \Longrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \Longrightarrow x \leq 2 \end{cases}$$



$$f_{II}(x) = |x(2-x)| = \begin{cases} x(2-x) & \text{se } x(2-x) \geq 0 \Longleftrightarrow 0 \leq x \leq 2; \\ -x(2-x) & \text{se } x(x-1) < 0 \Longleftrightarrow 0 \leq x < 0 \vee x > 2 \end{cases}$$

Dalla traccia si nota che questa funzione é definita per $0 \leq x \leq 2$
e quindi $f_{II}(x) = x(2-x)$

III $f_{III}(x) = \left(\frac{|x|-2}{x^2-4}\right) \frac{|x-3|}{x-3}$

$$C.E.: \begin{cases} x^2-4 \neq 0 \\ x-3 \neq 0 \end{cases} \begin{cases} x \neq \pm 2 \\ x \neq 3 \end{cases}$$

– Per $x-3>0 \Longleftrightarrow x>3$:

$$f_{III}(x) = \frac{|x|-2}{x^2-4} = \begin{cases} \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{1}{x+2} & \text{se } x>0; \\ \frac{-x-2}{x^2-4} & \text{se } x<0 \end{cases}$$

– Per $x-3<0 \Longleftrightarrow x<3$:

$$f_{III}(x) = -\frac{|x|-2}{x^2-4} = \begin{cases} -\frac{x-2}{x^2-4} = -\frac{1}{x+2} & \text{se } x>0; \\ -\frac{-x-2}{x^2-4} = \frac{x+2}{x^2-4} = \frac{1}{x-2} & \text{se } x<0 \end{cases}$$

Dalla traccia si nota che questa funzione é definita per $x > 2$ e quindi:

$$f_{III}(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x+2} & \text{se } 2 < x < 3; \\ \frac{1}{x+2} & \text{se } x > 3; \end{cases}$$

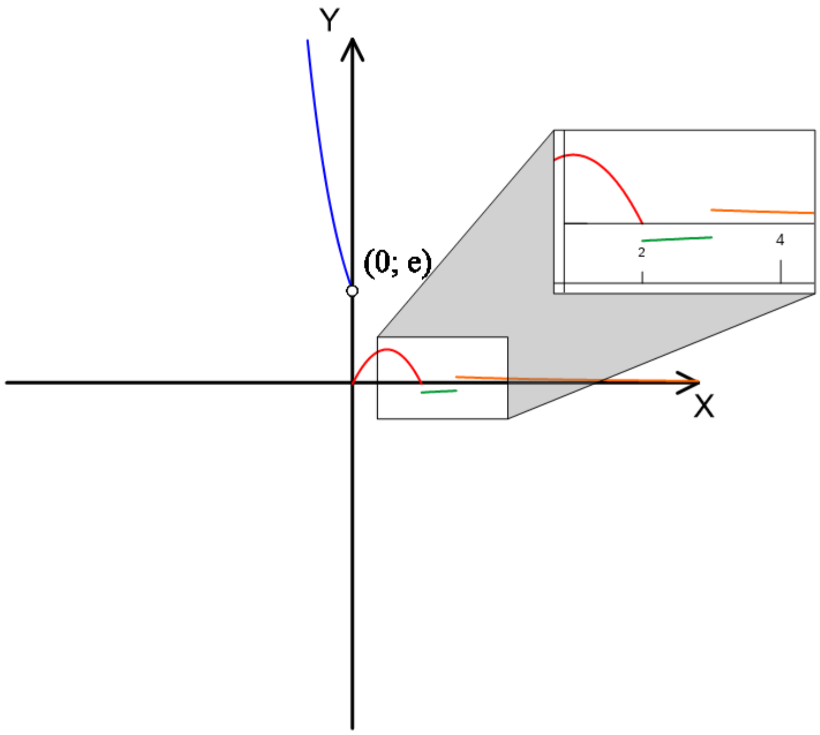
$$\lim_{x \to 2^+} -\frac{1}{x+2} = -\frac{1}{4}$$

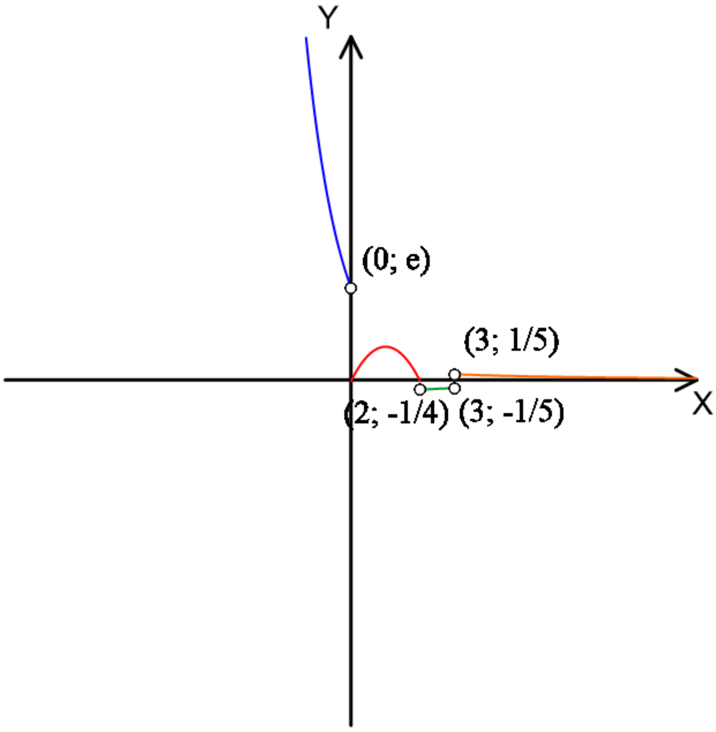
$$\lim_{x \to 3^-} -\frac{1}{x+2} = -\frac{1}{5}$$

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{5}$$

La funzione si semplifica cosí:

$$f(x) = \begin{cases} e^{1-x} & x < 0; \\ x(2-x) & x \leq 0 \leq 2; \\ -\frac{1}{x+2} & \text{se } 2 < x < 3; \\ \frac{1}{x+2} & \text{se } x > 3; \end{cases}$$





5.1 Insieme di definizione D_f, di continuitá e di derivabilitá di f.

Dal grafico della funzione si evince che:

- $D_f = \mathbb{R} - \{3\}$
- f é continua in $\mathbb{R} - \{0, 2, 3\}$
- $f^-(0) = e; f^+(0) = 0 = f(0)$
  $f^-(2) = 0 = f(2); f^+(2) = -\frac{1}{4}$
  $f^-(3) = -\frac{1}{5}; f^+(3) = \frac{1}{5}$
- f é derivabile in $\mathbb{R} - \{0, 2, 3\}$ e inoltre:

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{1-x} & \text{se } x < 0; \\ 2 - 2x & \text{se } 0 \leq x \leq 1; \\ \frac{1}{(x+2)^2} & \text{se } 1 < x < 3; \\ -\frac{1}{(x+2)^2} & \text{se } x > 3; \end{cases}$$

5.2 Gli intervalli di monotonia

Dal grafico della funzione si evince che

- $f'(x) > 0$ in $(0, 1)$ e in $(2, 3)$
- $f'(x) < 0$ in $(-\infty, 0)$, in $(1, 2)$ e in $(3, +\infty)$

- $x = 0$ punto di minimo relativo
- $x = 1$ punto di massimo relativo

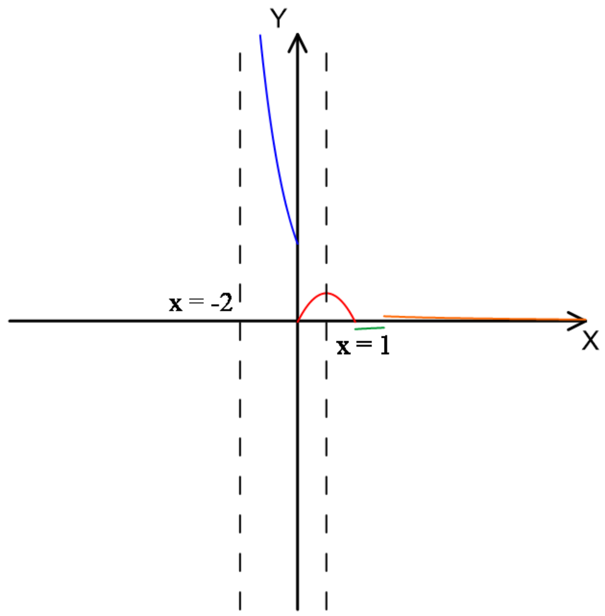
5.3 $f(D_f)$ ed eventuali punti di estremo locale e globale nel suo dominio naturale

Dal grafico della funzione si evince che

- $f(D_f) = \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{5}\right) \cup [0, 1] \cup (e, +\infty)$
- Non ci sono punti di estremo globale

5.4 Eventuali punti di estremo locale e globale nell'intervallo $[-2; 1]$

Considerando $f_{[-2;1]}$:



si nota che:

- $x = -2$ punto di massimo relativo e assoluto
- $x = 0$ punto di minimo relativo e assoluto
- $x = 1$ punto di massimo relativo

5.5 Determinare se f é iniettiva nell'intervallo $(-2, 2)$

f non é iniettiva in $[0, 2] \Rightarrow f$ non é iniettiva in $(-2, 2)$

5.6 L'equazione $f(x) = 10^2$ ha una sola soluzione

5.7 f soddisfa le ipotesi del Teorema di Rolle nell'intervallo $[0;2]$ in quanto:

- f é continua in $[0;2]$
- f é derivabile in $(0;2)$
- $f(0) = f(2)$

Capitolo 6

Esercizio 6 - Svolgimento traccia del 5/02/2018

1. Verificare se esistono dei parametri λ e μ per i quali risulti continua in $x = 0$ la funzione:
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos(\sqrt{\lambda}x)}{\sin(\sqrt{\lambda}x^2)}, & \text{se } x > 0; \\ 1, & \text{se } x = 0; \\ \dfrac{\mu x - \arctan(\mu x)}{\tan((\mu + \mu^2)x)}, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

2. Studiare, al variare del parametro reale λ, il carattere della seguente serie:
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\lambda^n}{(1 - 3\lambda)^n}.$$

3. Data la funzione
$$f(x) = \ln(\cos(x))$$
determinare:
   1) l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x_0 = 0$;
   2) i polinomi di Taylor di ordine 1 e 2 centrati nel punto $x_0 = 0$;
   3) gli intervalli di convessità e di concavità ed eventuali punti di flesso nell'intervallo $[-1, 1]$.

4. Calcolare l'area delimitata dal grafico della funzione
$$f(x) = \frac{\ln^3(x)}{x}$$

e dalle rette $y = 0$, $x = \frac{1}{2}$ e $x = 2$.

5. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} ||x| - 2|, & \text{se } x < -2; \\ |\ln(|x|)|, & \text{se } -2 \leq x \leq -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \leq x \leq 2; \\ \ln(2), & \text{se } -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}, \\ e^{-(x-3)^2}, & \text{se } x > 2. \end{cases}$$

determinare:

1) l'insieme di definizione D_f, di continuità e di derivabilità di f.
2) gli intervalli di monotonia;
3) $f(Df)$ ed eventuali punti di estremo locale e globale nel suo dominio naturale;
4) eventuali punti di estremo locale e globale nell'intervallo $[-3; 0]$;
5) se f é iniettiva nell'intervallo $(2, +\infty)$;
6) il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = \ln(3/2)$;
7) se f soddisfa le ipotesi del Teorema di Lagrange nell'intervallo $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$.

SVOLGIMENTO

1 Osserviamo che f è ben definita se $\lambda > 0$ e $\mu \neq 0$. Per verificare la continuità di f in $x = 0$ bisogna calcolare il limite destro e sinistro della funzione.

1.1 Bisogna calcolare il limite destro del primo termine:

$$f(0^+) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1 - \cos(\sqrt{\lambda}x)}{\sin(\sqrt{\lambda}x^2)}$$

Considerando lo sviluppo in serie di Mc-Laurin si ottiene:

$$\sin(\sqrt{\lambda}x^2) \sim \sqrt{\lambda}x^2$$

$$1 - \cos(\sqrt{\lambda}x) = \frac{\lambda x^2}{2} + o(x^2)$$

dunque, si ha:

$$f(0^+) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{\lambda x^2}{2}}{\sqrt{\lambda}x^2} = \frac{\lambda}{2\sqrt{\lambda}} = \frac{\sqrt{\lambda}}{2}$$

Conseguentemente f è continua a destra in $x = 0$ se
$1 = f(0) = f(0^+) = \frac{\sqrt{\lambda}}{2} \iff 2 = \sqrt{\lambda} \iff \lambda = 4$
P.S. Si può calcolare $f(0^+)$ agevolmente anche utilizzando la regola di De L'Hôpital

1.2 Verifichiamo la continuità a sinistra

$$f(0^-) = \lim_{x \to 0^-} \frac{\mu x - \arctan(\mu x)}{\tan((\mu + \mu^2)x)}$$

Per la formula di Mc-Laurin applicata all'arcotangente ed alla tangente si ha:

$$\arctan(t) = t - \frac{t^3}{3} + o(t^3)$$

$$\tan(t) = t + o(t^2)$$

Da cui segue che:

$$f(0^-) = \lim_{x \to 0-} \frac{\mu x - \left(\mu x - \frac{\mu^3 x^3}{3} + o(x^3)\right)}{(\mu + \mu^2)\,x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\mu^3 x^3}{3\,(\mu + \mu^2)\,x} = 0$$

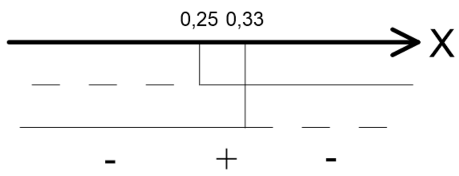
Poichè $f(0^-) \neq f(0) = 1$, f è discontinua a sinistra per qualsiasi valore del parametro $\mu \neq 0$. In conclusione, f non è mai continua in $x = 0$ per qualsiasi $\lambda > 0$ e $\mu \neq 0$.

2 Si tratta di una serie geometrica di ragione

$$q = \frac{\lambda}{1-3\lambda}$$

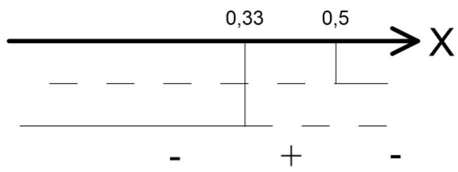
con $\lambda \neq \frac{1}{3}$

2.1 La serie diverge per $q \geq 1$ ovvero $\frac{\lambda}{1-3\lambda} \leq 1 \iff \frac{4\lambda-1}{1-3\lambda} \geq 0$



La serie diverge per $\frac{1}{4} \leq \lambda < \frac{1}{3}$

2.2 La serie oscilla per $q \leq -1 \iff \frac{1-2\lambda}{1-3\lambda} \leq 0$



La serie oscilla per $\frac{1}{3} < \lambda \leq \frac{1}{2}$

Conseguentemente, dai risultati già ottenuti si ha che la serie converge in $(-\infty; \frac{1}{4}) \vee (\frac{1}{2}; +\infty)$

3 Calcoliamo f' e f''. Osserviamo preliminarmente che per $x \in [-1,1]$ si ha $\cos(x) > 0$ quindi f è ben definita in $[-1,1]$.

$$f'(x) = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$$

$$f''(x) = -1 - \tan^2(x) = -\frac{1}{\cos^2(x)}$$

3.1 Equazione della retta tangente in $x_0 = 0$:

$$y = f(0) + f'(0) \cdot x = 0 + 0 \cdot x = 0$$

3.2 Polinomio di Taylor di ordine 1 centrato nel punto $x_0 = 0$:

$$P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) = f(0) + f'(0) \cdot x = 0$$

Polinomi di Taylor di ordine 2 centrato nel punto $x_0 = 0$

$$P_2(x) = f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}\cdot(x-x_0)^2 = f(0)+f'(0)\cdot x+\frac{f''(0)}{2}\cdot x^2 = -\frac{x^2}{2}$$

3.3 La $f''(x) > 0 \forall x \in [-1, 1]$, quindi f è concava in tale intervallo

4

$$A = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \left| \frac{\ln^3(x)}{x} \right| dx = -\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\ln^3(x)}{x} dx + \int_{1}^{2} \frac{\ln^3(x)}{x} dx$$

Osserviamo che, per $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$ si ha che $\frac{\ln^3(x)}{x} \geq 0 \iff \ln(x) \geq 0$ ovvero se $1 \leq x \leq 2$. Posto:

$$F(x) = \int \frac{\ln^3(x)}{x} dx$$

si ha

$$A = F\left(\frac{1}{2}\right) - 2F(1) + F(2)$$

A tal fine si ha

$$\int \frac{\ln^3(x)}{x} dx = \frac{\ln^4(x)}{4} + c$$

da cui segue che:

$$A = \frac{1}{4}\left[\ln^4\left(\frac{1}{2}\right) + \ln^4(2)\right] = \frac{\ln^4(2)}{2}$$

5 Semplifichiamo i valori assoluti:

I $x < -2 \Longrightarrow |x| = -x \Longrightarrow ||x| - 2| = |-x - 2| = -x - 2$

per $-x - 2 > 0 \iff x < -2$

II Osserviamo che $|\ln(|x|)$ è una funzione pari. Quindi possiamo semplificare la sua espressione solo per $\frac{1}{2} < x \leq 2$; per $-2 \leq x < -\frac{1}{2}$ ragioniamo per simmetria.

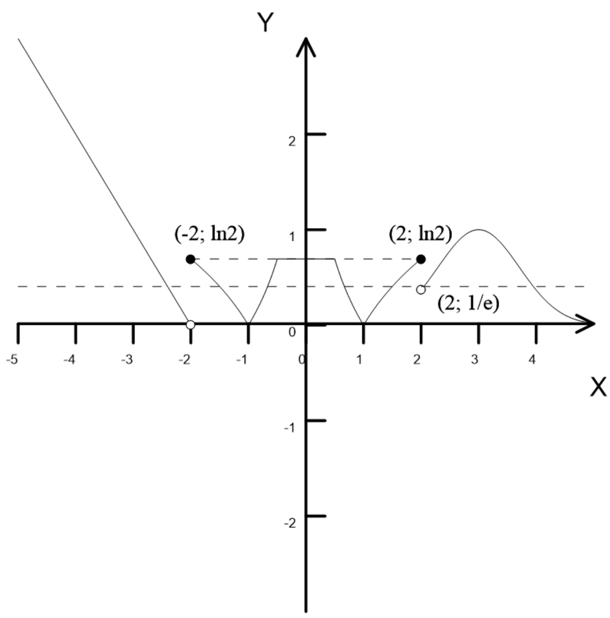
Si ha:

$$|\ln(|x|)| = |\ln(x)| = \begin{cases} \ln(x), & \text{se } 1 \leq x \leq 2; \\ -\ln(x), & \text{se } \frac{1}{2} \leq x < 1. \end{cases}$$

Pertanto si ha che:

$$f(x) = \begin{cases} -(x+2), & \text{se } x < -2; \\ \ln(-x), & \text{se } -2 \leq x \leq -1; \\ -\ln(-x), & \text{se } -1 \leq x \leq -\frac{1}{2}; \\ \ln(2), & \text{se } -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}; \\ -\ln(x), & \text{se } \frac{1}{2} \leq x < 1; \\ \ln(x), & \text{se } 1 \leq x \leq 2; \\ e^{-(x-3)^2}, & \text{se } x > 2. \end{cases}$$

Poichè per $x \leq 2$ la funzione f è definita attraverso delle funzioni elementari, possiamo abbozzare un grafico per $x \leq 0$:



5.1 La funzione è definita in $\mathbb{R}$, cioè $D_f = \mathbb{R}$ e risulta discontinua in $x = -2$ e $x = 2$ in quanto

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = 0 \neq f(-2) = \ln 2 = \lim_{x \to -2^+}$$

$$f(2) = \ln 2 = \lim_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} e^{-(x-3)^2} = e^{-1}$$

Quindi:

- $C_f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$;
- $D'_f = C_f - \{-1, 1\} = \mathbb{R} - \{-2, -1, 1, 2\}$.

5.2 Studiamo la monotonia di f per $x \geq 2$.

$$f'(x) = -e^{-(x-3)^2} \cdot 2 \cdot (x-3) \qquad \forall x \geq 2$$

Studio del segno di $f'(x)$:

$$f'(x) \geq 0 \iff -2e^{-(x-3)^2} \cdot (x-3) \geq 0 \iff -(x-3) \geq 0 \iff x \leq 3$$

Quindi:

- f è crescente negli intervalli (-1, $\frac{1}{2}$), (1, 2) e (2, 3);
- f è decrescente in (-∞, -2), (-2, -1), ($\frac{1}{2}$, 1) e (3, +∞).

In particolare, $f'(x) = 0 \iff x = 3$ ovvero $x = 3$ è un punto di massimo relativo con $f(3) = e^0 = 1$.

5.3 Per il calcolo degli estremi locali e globali, è utile osservare che $e^{-1} < \ln 2 < 1$ e che:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} ||x| - 2| = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} e^{-(x-3)^2} = 0$$

Quindi:

- $f(D_f) = [0, +\infty)$;
- $x = \pm 1$ punti di minimo globale e locale;
- $x = \pm 2$ e $x = 3$ punti di massimo locale;
- Tutti i punti dell'intervallo $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ sono punti di massimo locale;
- Tutti i punti dell'intervallo $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ sono punti di minimo locale.

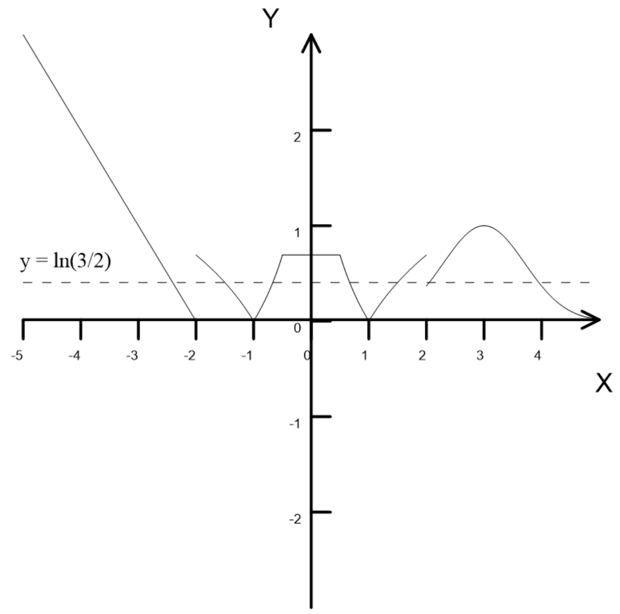
5.4 Si ha:

- $x = -3$ punto di massimo locale e globale;
- $x = -2$ punto di massimo locale;

- Tutti i punti dell'intervallo $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$ sono punti di massimo locale;
- Tutti i punti dell'intervallo $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ sono punti di minimo locale;
- $x = -1$ punto di minimo locale e globale.

5.5 f non è iniettiva nell'intervallo $(2, +\infty)$ in quanto in $x = 3$ ha un punto di massimo locale;

5.6 $\ln\left(\frac{3}{2}\right) \cong 0.4$. i punti di intersezione con la retta $y = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$ sono 7:



5.7 SI, in quanto in tale intervallo f è costante, quindi continua e derivabile.