

Simbolo di Kronecker e simbolo di Levi-Civita<sup>1</sup>

Convenzione di Einstein (o della somma su  
indici ripetuti): è la convenzione per la  
quale i termini tensoriali con indici ripetuti  
si intendono sommati. Ad esempio:

$$d_{4k} b_k \equiv \sum_{k=1}^3 d_{4k} b_k = d_{41} b_1 + d_{42} b_2 + d_{43} b_3.$$

Simbolo di Kronecker: È indicato con  $\delta_{ij}$   
e definito come segue:

$$\text{per } i, j = 1, 2, 3, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ 1, & \text{se } i = j \end{cases}$$

È rappresentata le componenti della matrice identica

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \text{Si ha } \delta_{ij} = \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j (= \delta_{ji})$$

In una somma, il delta di Kronecker saturava  
il primo indice col secondo, cioè

$$V_i \delta_{ij} = V_j, \quad A_{ij} \delta_{ie} \delta_{js} = A_{es},$$

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = (a_i \hat{e}_i) \cdot (b_j \hat{e}_j) = a_i b_j (\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j) = a_i b_j \delta_{ij} = a_i b_i.$$

Simbolo di Levi-Civita:  $\epsilon$  indicato con

$\epsilon_{ijl}$ , essendo un tensore del terzo ordine così

definito:

$$\underline{\underline{\epsilon}} = (\epsilon_{ijl}) \text{ con } \epsilon_{ijl} = \begin{cases} 0, & \text{se due indici coincidono} \\ +1, & \text{se } ij l \text{ è una permutazione} \\ & \text{pari di } 123 \text{ (cioè } 231 \text{ o } 312) \\ -1, & \text{se } ij l \text{ è una perm. dispari} \\ & \text{di } 123 \text{ (cioè } 213, 132, 321) \end{cases}$$

per  $i, j, l = 1, 2, 3$ .

Si ha che  $\epsilon_{ijl} = (\hat{e}_i \wedge \hat{e}_j) \cdot \hat{e}_l$  per ogni

terna levogira trinelemento, cioè il pari di volume con segno del cubo costruito dai tre vettori.

È un tensore anti-simmetrico:  $\epsilon_{ijl} = -\epsilon_{jil} = -\epsilon_{lji}$ .

Verifichiamo che  $\underline{a} \wedge \underline{b} = \underline{\underline{\epsilon}} (\underline{a} \otimes \underline{b})$ .

$$\begin{aligned} \text{Infatti } (\underline{a} \wedge \underline{b})_i &= (a_j \hat{e}_j \wedge b_l \hat{e}_l) \cdot \hat{e}_i = \\ &= a_j b_l (\hat{e}_j \wedge \hat{e}_l) \cdot \hat{e}_i = a_j b_l \epsilon_{jli} = \epsilon_{ijl} a_j b_l = \\ &= [\underline{\underline{\epsilon}} (\underline{a} \otimes \underline{b})]_i, \text{ per ogni } i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

# Proprietà del simbolo di Levi-Civita

- i)  $\epsilon_{irs} \epsilon_{irq} = 2 \delta_{sq}$ ,  $\forall s, q = 1, 2, 3$  ;
- ii)  $\epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} = \delta_{je} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}$ ,  $\forall j, k, l, m$  ;
- iii)  $\text{SKW } \underline{A} = \frac{1}{2} \underline{\epsilon} (\underline{\epsilon} \underline{A})$ .

## Dimostrazioni

$$\begin{aligned}
 \text{i) } \epsilon_{irs} \epsilon_{irq} &= \epsilon_{125} \epsilon_{12q} + \epsilon_{135} \epsilon_{13q} + \epsilon_{235} \epsilon_{23q} + \epsilon_{215} \epsilon_{21q} + \\
 &+ \epsilon_{315} \epsilon_{31q} + \epsilon_{325} \epsilon_{32q} = 2 (\epsilon_{125} \epsilon_{12q} + \epsilon_{135} \epsilon_{13q} + \epsilon_{235} \epsilon_{23q}) = \\
 &= 2 \cdot \begin{cases} 0, & \text{se } s \neq q \\ 1, & \text{se } s = q \end{cases} = 2 \delta_{sq} ;
 \end{aligned}$$

$$\text{2) } \epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} = [(\hat{e}_i \wedge \hat{e}_j) \cdot \hat{e}_k] [(\hat{e}_i \wedge \hat{e}_l) \cdot \hat{e}_m] =$$

$$\det \begin{pmatrix} \hat{e}_i \\ \hat{e}_j \\ \hat{e}_k \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} \hat{e}_i & \hat{e}_l & \hat{e}_m \end{pmatrix} = \det \left[ \begin{pmatrix} \hat{e}_i \\ \hat{e}_j \\ \hat{e}_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{e}_i & \hat{e}_l & \hat{e}_m \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \det \begin{pmatrix} \hat{e}_i \cdot \hat{e}_i & \hat{e}_i \cdot \hat{e}_l & \hat{e}_i \cdot \hat{e}_m \\ \hat{e}_j \cdot \hat{e}_i & \hat{e}_j \cdot \hat{e}_l & \hat{e}_j \cdot \hat{e}_m \\ \hat{e}_k \cdot \hat{e}_i & \hat{e}_k \cdot \hat{e}_l & \hat{e}_k \cdot \hat{e}_m \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \delta_{ii} & \delta_{il} & \delta_{im} \\ \delta_{ji} & \delta_{jl} & \delta_{jm} \\ \delta_{ki} & \delta_{kl} & \delta_{km} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
 &= 3(\delta_{je} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{ke}) + \delta_{il} \delta_{jm} \delta_{ki} - \delta_{ie} \delta_{ji} \delta_{km} + \\
 &+ \delta_{im} \delta_{ji} \delta_{kl} - \delta_{im} \delta_{ie} \delta_{ki} = 3(\delta_{je} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{ke}) + \\
 &+ 2 \delta_{jm} \delta_{kl} - 2 \delta_{je} \delta_{km} = \delta_{je} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{ke} ;
 \end{aligned}$$

4

$$\begin{aligned}
 \text{iii)} \quad \frac{1}{2} \varepsilon_{ijl} (\varepsilon_{lmn} A_{mn}) &= \frac{1}{2} \varepsilon_{lij} \varepsilon_{lmn} A_{mn} = \\
 &\stackrel{\text{ii)}}{=} \frac{1}{2} (\delta_{im} \delta_{jn} A_{mn} - \delta_{in} \delta_{jm} A_{mn}) = \\
 &= \frac{1}{2} (A_{ij} - A_{ji}) = [\text{skw } A]_{ij}
 \end{aligned}$$

iv)  $\mathcal{F}$  isomorfismo di  $\text{Skw } \mathcal{W}$  e  $\mathcal{V}$ .

$$\begin{aligned}
 \forall \underline{d} \in \mathcal{V} \text{ si ha } \mathcal{W}_{ij} d_j &= (\underline{\mathcal{W}} \underline{d})_i = (\underline{\mathcal{W}} \wedge \underline{d})_i = \\
 &= [\underline{\Phi}(\underline{\mathcal{W}} \otimes \underline{d})]_i = \varepsilon_{ijl} \mathcal{W}_l d_j = (-\varepsilon_{ijl} \mathcal{W}_l) d_j
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{W}_{ij} = -\varepsilon_{ijl} \mathcal{W}_l, \text{ cioè } \boxed{\underline{\mathcal{W}} = -\underline{\Phi} \underline{\mathcal{W}}}.$$

Inoltre si ha:

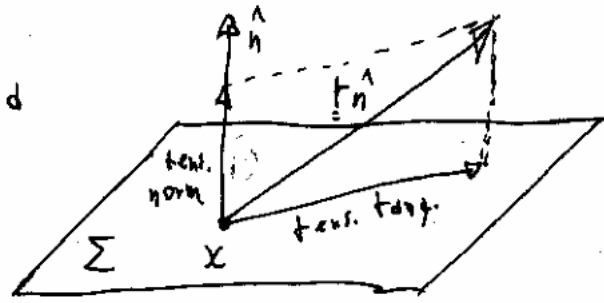
$$\begin{aligned}
 (\underline{\Phi} \underline{\mathcal{W}})_i &= \varepsilon_{ijl} \mathcal{W}_l = -\varepsilon_{ijl} (\varepsilon_{jeh} \mathcal{W}_h) = \\
 &= -\varepsilon_{jeh} \varepsilon_{ijl} \mathcal{W}_h \stackrel{\text{i)}}{=} -2\delta_{ih} \mathcal{W}_h = -2\mathcal{W}_i
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\underline{\mathcal{W}} = -\frac{1}{2} \underline{\Phi} \underline{\mathcal{W}}}$$

Dunque, se  $\underline{\underline{t}}(x, t)$  è il tensore degli sforzi di Cauchy (nella posizione  $x$  all'istante  $t$ ,  $\underline{\underline{t}} \hat{n}$  misura la forza di contatto per unità di superficie nella posizione assoluta  $dx$  all'istante  $t$ ). Fissato  $(x, t)$ , le tensioni principali  $\lambda$  e le direzioni principali  $m$  sono le coppie (autovalore, autovettore) del tensore simmetrico  $\underline{\underline{t}}(x, t)$ :  $\underline{\underline{t}} m = \lambda m$ . (1)

Scelta una superficie piana arbitraria  $\Sigma$  di normale  $\hat{n}$  per  $x$ , la tensione

$\underline{\underline{t}} \hat{n}$  si decompone nella



tensione normale

$$(\hat{n} \cdot \underline{\underline{t}}) \hat{n} = (\hat{n} \otimes \hat{n}) \underline{\underline{t}} \hat{n} \tag{2}$$

e nella tensione tangenziale  $(\underline{\underline{I}} - \hat{n} \otimes \hat{n}) \underline{\underline{t}} \hat{n}$ , (3)

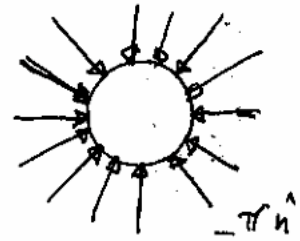
che rappresentano le proiezioni ortogonali di  $\underline{\underline{t}} \hat{n}$  su  $\hat{n}$  e  $\Sigma$ , rispettivamente.

Tre stati di tensione di particolare importanza e semplicità sono i seguenti.

i) Pressione uniforme:  $\underline{\underline{t}} = -\pi \underline{\underline{I}}$ , con  $\pi(x,t) \in \mathbb{R}^+$ . 6

Allora  $\underline{\underline{t}} \hat{n} = -\pi \hat{n}$ ,  $\forall \hat{n}$  e dunque le tensioni principali sono tutte eguali a  $-\pi$  (di molteplicità 3) con direzioni qualunque. La tensione normale è  $-\pi \hat{n}$  e la tangenziale

è ovviamente nulla:  $(\underline{\underline{I}} - \hat{n} \otimes \hat{n}) \underline{\underline{t}} \hat{n}$   
 $= (\underline{\underline{I}} - \hat{n} \otimes \hat{n})(-\pi \hat{n}) = -\pi (\hat{n} - (\hat{n} \cdot \hat{n}) \hat{n}) = \underline{\underline{0}}$ .



L'equazione di Cauchy per la statica, in assenza di forze di massa ( $\underline{\underline{b}} = \underline{\underline{0}}$ ):

$$\underline{\underline{0}} = \text{div } \underline{\underline{t}} = -\text{div } (\pi \underline{\underline{I}}) = -\nabla \pi \quad \text{in } \mathcal{L}, \quad (5)$$

poiché  $(\pi \underline{\underline{I}})_{ij} = \pi_{ij} \delta_{ij} = \pi_{,i}$ ,  $i=1,2,3$ . La soluzione costante è il caso dei fluidi perfetti.

ii) Tensione semplice, di entità  $\sigma$  in direzione  $\hat{e}$ :

$$\underline{\underline{t}} = \sigma \hat{e} \otimes \hat{e}, \quad \text{con } \sigma(e) \in \mathbb{R}^+. \quad (6)$$

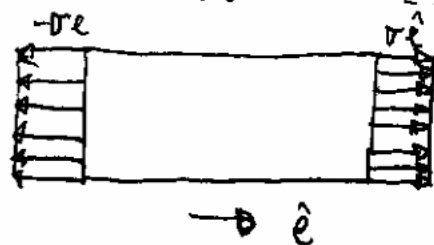
In una base  $\mathcal{B} = \{ \hat{e}, \hat{f}, \hat{g} \}$ , si ha  $\underline{\underline{t}} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Le tensioni principali si ottengono dalla (1):

$$\underline{\underline{t}} \underline{\underline{m}} = \sigma (\hat{e} \otimes \hat{e}) \underline{\underline{m}} = \sigma (\hat{e} \cdot \underline{\underline{m}}) \hat{e} = \begin{cases} 0, & \text{se } \underline{\underline{m}} = \hat{f} \text{ o } \underline{\underline{m}} = \hat{g} \\ \sigma \hat{e}, & \text{se } \underline{\underline{m}} = \hat{e} \end{cases}, \quad (7)$$

dunque:  $\lambda_1 = \sigma$  con  $\underline{\underline{m}}_1 = \hat{e}$ ;  $\lambda_i = 0, i=1,2$ , con  $\underline{\underline{m}}_2 = \hat{f}$  e  $\underline{\underline{m}}_3 = \hat{g}$ . (8)

La tensione normale sulla superficie di applicazione della tensione semplice è  $\sigma \hat{e}$ , tutte le altre nulle, come le tangenziali.



L'equazione della statica è  $\frac{d\sigma}{de} = 0$  in  $\mathcal{C}$ , (9) <sup>7</sup>

e dunque la tensione uniforme risolve il caso statico.

iii) Taglio semplice, di entità  $\tau$  rispetto alle direzioni ortogonali  $\hat{e}$  ed  $\hat{f}$ : Scegliendo la base  $\mathcal{B} = \{\hat{e}, \hat{f}, \hat{g}\}$ , si

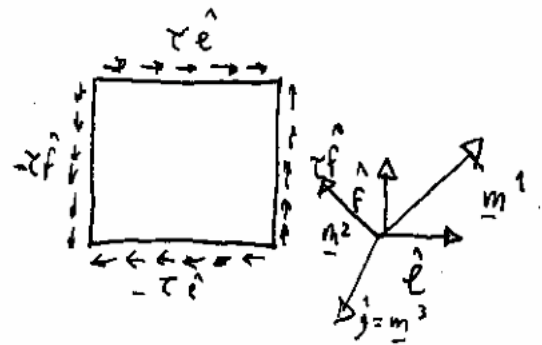
ha: 
$$\underline{\underline{T}} = \tau (\hat{e} \otimes \hat{f} + \hat{f} \otimes \hat{e}) = \begin{pmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ con } \tau(e, f) \in \mathbb{R}^+$$

Si ha  $0 = |\underline{\underline{T}} - \lambda \underline{\underline{I}}| = \begin{vmatrix} -\lambda & \tau & 0 \\ \tau & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda (\lambda^2 - \tau^2)$  e quindi le

tensioni principali sono  $\lambda_1 = \tau$ ,

$\lambda_2 = -\tau$ ,  $\lambda_3 = 0$ ; mentre

$$\underline{\underline{T}} \underline{\underline{m}} = \begin{pmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau m_2 \\ \tau m_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$



Allora dalla (1) si ha: a)  $\underline{\underline{T}} \underline{\underline{m}}^1 = \lambda_1 \underline{\underline{m}}^1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \tau m_2 \\ \tau m_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau m_1 \\ \tau m_2 \\ 0 \end{pmatrix}$  cioè

$m_1^1 = m_2^1, m_3^1 = 0$ , dunque  $\underline{\underline{m}}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

b)  $\underline{\underline{T}} \underline{\underline{m}}^2 = \lambda_2 \underline{\underline{m}}^2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \tau m_2 \\ \tau m_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\tau m_1 \\ -\tau m_2 \\ -\tau m_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \underline{\underline{m}}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

c)  $\underline{\underline{T}} \underline{\underline{m}}^3 = \lambda_3 \underline{\underline{m}}^3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \tau m_2 \\ \tau m_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \underline{\underline{m}}^3 = \hat{g}$ .

La tensione, nelle direzioni della base  $\hat{e}$ : 1)  $\underline{\underline{T}} \hat{e} = \tau \hat{f}$  con tensione normale nulla e tangenziale  $\tau \hat{f}$ ; 2)  $\underline{\underline{T}} \hat{f} = \tau \hat{e}$ , dunque normale nulla e tang.  $\tau \hat{e}$ ;

3)  $\underline{\underline{T}} \hat{g} = 0$ , dunque tutto nulla.

L'equazione della statica  $\underline{\underline{0}} = \text{div } \underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} 0 + \frac{\partial \tau}{\partial e} + 0 \\ \frac{\partial \tau}{\partial e} + 0 + 0 \\ 0 + 0 + 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial \tau}{\partial e} \hat{e} + \frac{\partial \tau}{\partial e} \hat{f}$  ha come soluzione il taglio semplice costante.

# Applicazioni del Principio di indifferenza Materiali

8

Nel caso della velocità e del suo gradiente, letti da un altro osservatore, si ha; poiché  $x = R x'$ ,

$$\underline{v}' = \frac{dx'}{dt} = \dot{\underline{R}}^T \underline{x} + \underline{R}^T \underline{\dot{x}} = \dot{\underline{R}}^T \underline{R} \underline{x}' + \underline{R}^T \underline{v} \quad (1)$$

Quindi  $\underline{v}$  non si trasforma semplicemente in  $\underline{R}^T \underline{v}$ , ma è influenzato anche dalla scelta del tensore dati simmetrico

$\underline{R}^T \underline{R}$ ; quindi  $\underline{v}$  non può intervenire direttamente in un'equazione costitutiva. Per il suo gradiente si ha:

$$\begin{aligned} \nabla_{x'} \underline{v}' &= \nabla_{x'} (\dot{\underline{R}}^T \underline{R} \underline{x}' + \underline{R}^T \underline{v}) = \dot{\underline{R}}^T \underline{R} \nabla_{x'} \underline{x}' + \underline{R}^T \nabla_{x'} \underline{v} = \\ &= \dot{\underline{R}}^T \underline{R} \underline{I} + \underline{R}^T \underline{\nabla}_x \underline{v} \frac{\partial x}{\partial x'} = \dot{\underline{R}}^T \underline{R} + \underline{R}^T \underline{\nabla}_x \underline{v} \underline{R} = \\ &= \dot{\underline{R}}^T \underline{R} + \underline{R}^T \underline{W} \underline{R} + \underline{R}^T \underline{D} \underline{R}, \end{aligned} \quad (2)$$

dove abbiamo usato la decomposizione del  $\underline{\nabla}_x \underline{v}$  nella velocità di deformazione  $\underline{D}$  e nella vorticità  $\underline{W}$ . Dunque:

$$\underline{D}' = \underline{R}^T \underline{D} \underline{R} \quad \text{e} \quad \underline{W}' = \dot{\underline{R}}^T \underline{R} + \underline{R}^T \underline{W} \underline{R}, \quad (3)$$

poiché  $\dot{\underline{R}}^T \underline{R} = -(\underline{R}^T \underline{\dot{R}})$  per la relazione  $\underline{R}^T \underline{R} = \underline{I}$ .

Quindi solo  $\underline{D}$  può comparire nelle equazioni costitutive.