Corso di Laurea Magistrale (LM-56) in Economia

BUSINESS ANALYTICS AND DECISIONS THEORY

Dualità nella Programmazione Lineare

A. A. 2020/2021

Docente: Massimiliano FERRARA
A cura della Dott.ssa Tiziana CIANO

Problema duale

- Ad ogni problema di PL, detto **primale**, risulta associato un altro problema, detto **duale**, costruito utilizzando gli stessi coefficienti (trasposti)

- Le soluzioni dei due problemi sono tra loro strettamente legate.

- Il duale è formulato da informazioni contenute nel problema originale (primale) e, quando risolto, il duale fornisce tutte le informazioni essenziali sulla soluzione del primale

Problema duale

Si consideri un problema P di PL in forma standard

$$
\begin{aligned}
&\min z(x) \; = \; c^T x \\
&s.v. \quad Ax \; = \; b \\
&x \; \geq \; 0;
\end{aligned}
$$

con A ∈ R^{mxn}, b ∈R^m e x ∈ R^n

Al problema P rimane associato il problema D

$$max\, w(y) = \; b^T y$$

$$s.v.$$

$$A^T y \; \leq \; c$$

Problema duale

È immediato osservare che, mentre il primale è un problema di minimo, il duale è un problema di massimo e che i termini noti di un problema sono i coefficienti della funzione obiettivo dell'altro.

Inoltre, a ciascuna variabile del primale corrisponde univocamente un vincolo del duale e a ciascuna variabile del duale è univocamente associato un vincolo del primale.

Problema duale

Riassumendo, l'insieme delle proprietà di «simmetria» nella coppia primale-duale viene espresso attraverso le seguenti regole generali:

- ✓ a un vincolo di disuguaglianza nel primale corrisponde una variabile vincolata in segno nel duale;
- ✓ a un vincolo di uguaglianza nel primale corrisponde una variabile libera in segno nel duale;
- ✓ a una variabile vincolata in segno nel primale corrisponde un vincolo di disuguaglianza nel duale;
- ✓ a una variabile libera in segno nel primale corrisponde un vincolo di uguaglianza nel duale;
- ✓ se la funzione obiettivo del primale è in forma di minimo, la funzione obiettivo del duale è in forma di massimo e viceversa,

ovvero, più formalmente, dal seguente teorema, la cui dimostrazione ricalca le modalità utilizzate per costruire il duale dei vari problemi di PL introdotti in precedenza.

Problema duale

Dato il seguente problema di PL:

$$\min z(x) = c^T x$$

$$s.v.$$

$$\begin{aligned} a^T{}_i x &\geq bi, & i &\in I_1 \\ a^T{}_i x &\leq bi, & i &\in I_2 \\ a^T{}_i x &= bi, & i &\in I_3 \\ x_j &\geq 0, & j &\in J_1 \\ x_j &\leq 0, & j &\in J_2 \\ x_j &\ libera, & j &\in J_3 \end{aligned}$$

Problema duale

il suo duale è

$$\max w(y) \; = \; b^T y$$

$$
\begin{aligned}
&s.v. \\
&\quad y^T A_j \;\le\; c_j\,, && j \in J_1 \\
&\quad y^T A_j \;\ge\; c_j\,, && j \in J_2 \\
&\quad y^T A_j \;=\; c_j\,, && j \in J_3 \\
&\quad y_i \;\ge\; 0, && i \in I_1 \\
&\quad y_i \;\le\; 0, && i \in I_2 \\
&\quad y_i \;\; libera, && i \in I_3.
\end{aligned}
$$

Primale $\min z(x) = c^T x$	**Duale** $\max w(y) = b^T y$
$a^T{}_i x \geq bi$	$y_i \geq 0$
$a^T{}_i x \leq bi$	$y_i \leq 0$
$a^T{}_i x = bi$	$y_i \; libera$
$x_j \geq 0$	$y^T A_j \leq c_j$
$x_j \leq 0$	$y^T A_j \geq c_j$
$x_j \; libera$	$y^T A_j = c_j$

Problema duale

- Esempio

Dato il seguente problema di PL:

$$
\begin{aligned}
\min z(x) \;=\; & 8x_1 + 5x_2 + 12x_3 + 7x_4 \\
s.v.\; & \\
& 4x_1 - 6x_2 + 8x_3 + 2x_4 \leq 27 \\
& -x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 3x_4 \geq 12 \\
& x_1 - 2x_4 = 20 \\
& x_1, x_2 \geq 0 \\
& x_4 \leq 0,
\end{aligned}
$$

Problema duale

- Esempio

il corrispondente problema duale è

$$
\begin{gathered}
\max w(y) \; = \; 27y_1 \; + \; 12y_2 \; + \; 20y_3 \\
s.v. \\
4y_1 \; - \; y_2 \; + \; y_3 \; \leq \; 8 \\
-6y_1 \; + \; 3y_2 \; \leq \; 5 \\
8y_1 \; + \; 5y_2 \; = \; 12 \\
2y_1 \; + \; 3y_2 \; - \; 2y_3 \; \geq \; 7 \\
y_1 \; \leq \; 0 \\
y_2 \; \geq \; 0.
\end{gathered}
$$

Problema duale

- Esempio

Dato il seguente problema di PL:

$$\max z(x) = 6x_1 + 8x_2 + 4x_3$$

$s.v.$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 10$$
$$3x_1 + 5x_2 = 15$$
$$5x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 20$$
$$x_1, x_2 \geq 0,$$

Problema duale

- Esempio

il corrispondente problema duale è

$$\min w\,(y) = 10y_1 + 15y_2 + 20y_3$$

$s.v.$

$$\begin{gathered} y_1 + 3y_2 + 5y_3 \geq 6 \\ y_1 + 5y_2 + 2y_3 \geq 8 \\ 2y_1 + 4y_3 = 4 \\ y_1 \geq 0 \\ y_3 \leq 0. \end{gathered}$$

Proprietà

- I problemi primali e duali sono strettamente connessi, non solo per quanto riguarda la loro formulazione, ma anche per le soluzioni.
- Le proprietà di seguito hanno un significato importante sia teorico che pratico.

Proprietà della coppia primale-duale

- 1. Simmetria

Il duale del problema duale è il problema primale.

Dimostrazione. La dimostrazione segue immediatamente dalle regole di costruzione del duale.

Proprietà della coppia primale-duale

- Esempio

Dato il seguente problema (P) di PL:

$$\max z(x) = 2x_1 + 4x_2 + 7x_3$$

$$s.v.$$

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 5x_3 &\leq 2 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 &\geq 8 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ x_3 &\leq 0; \end{aligned}$$

il corrispondente problema duale (D) è

$$\min w(y) = 2y_1 + 8y_2$$

$$s.v.$$

$$\begin{aligned} y_1 + 3y_2 &\geq 2 \\ 3y_1 - y_2 &\geq 4 \\ -5y_1 + y_2 &\leq 7 \\ y_1 &\geq 0 \\ y_2 &\leq 0. \end{aligned}$$

Proprietà della coppia primale-duale

- Esempio

A sua volta, il duale del problema (D) è

$$\max z(x) = 2x_1 + 4x_2 + 7x_3$$
$$s.v.$$
$$x_1 + 3x_2 - 5x_3 \leq 2$$
$$3x_1 - x_2 + x_3 \geq 8$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$
$$x_3 \leq 0;$$

che corrisponde al problema (P).

Proprietà della coppia primale-duale

- **2. Teorema Dualità Debole**

  Sia data una coppia di problemi P-D che ammettono soluzione ammissibile. Allora, per ogni soluzione ammissibile $\overline{x}$ di P e $\overline{y}$ di D, vale la relazione:

$$b^T\bar{y} \leq c^T\bar{x}$$

<u>Dimostrazione</u>

Essendo $\overline{y}$ ammissibile

$A^T\bar{y} \leq c$ ovvero $\bar{y}^T\boldsymbol{A} \leq c^T$

Moltiplicando ambo i membri per $\overline{x}$ ammissibile

$$\bar{y}^T\boldsymbol{A}\,\overline{x} = \bar{y}^T\boldsymbol{b} \leq c^T\,\overline{x}$$

Proprietà della coppia primale-duale

- In generale il Teorema di Dualità Debole stabilisce che il valore di funzione obiettivo del problema di massimo è un limite inferiore per quello di minimo.
- La differenza $c^T\bar{x}$ - $b^T\bar{y}$ è non negativa e si chiama **gap di ottimalità**
- Se il gap è nullo, le corrispondenti soluzioni sono ottime

Proprietà della coppia primale-duale

Corollario

Sia $\bar{x}$ una soluzione ammissibile di P e $\bar{y}$ una soluzione ammissibile di D.

Se $c^T\bar{x} = b^T\bar{y}$ allora $(\bar{x}, \bar{y})$ sono soluzione ottime per i rispettivi problemi.

<u>Dimostrazione</u>

Supponiamo che $\bar{x}$ non sia ottima. Esisterebbe una nuova soluzione $\tilde{x}$ tale che $c^T\tilde{x} \leq c^T\bar{x} = b^T\bar{y}$ e questo violerebbe il teorema di dualità debole.

Proprietà della coppia primale-duale

3. Teorema di Dualità Forte

Se il problema primale ha soluzione ottima finita allora anche il suo duale possiede una soluzione ottima ed il valore delle due soluzioni è uguale.

<u>Dimostrazione</u>

Sia x^* la soluzione ottima associata alla base B

$$x^*_B = A_B^{-1}b;$$
$$x^*_N = 0,$$

di valore pari a $z^* = c_B^T A_B^{-1}\mathrm{b}$. Essendo soluzione ottima i coefficienti di costo ridotto sono non negativi

$$\bar{c}^T = c^T - c_B^T A_B^{-1} A \geq 0^T.$$

Proprietà della coppia primale-duale

In particolare

$c_N{}^T - c_B^T A_B^{-1} A_N \geq 0^T$ ovvero $c_N{}^T \geq c_B^T A_B^{-1} A_N$

Sia $\quad y_B{}^T = c^T{}_B A^{-1}{}_B$.

Si osserva che $\bar{y}$ è soluzione ammissibile del problema duale.

$y_B{}^T A = [y_B{}^T A_B \; y_B{}^T A_N] = [c^T{}_B A^{-1}{}_B A_B \mid c^T{}_B A^{-1}{}_B A_N] =$

$= [c^T{}_B \mid c^T{}_B A^{-1}{}_B A_N] \leq [c^T{}_B \mid c_N{}^T]$

$y_B{}^T b = c^T{}_B A^{-1}{}_B b = c^T{}_B x^*{}_B$

Il gap di ottimalità è nullo e le due soluzioni sono ottime

Proprietà della coppia primale-duale

- Esempio

Sia dato il seguente problema di PL:

$$
\begin{gathered}
\min z(x) = 14x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 30x_4 \\
s.v. \\
7x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 6x_4 = 4 \\
5x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 5x_4 = 6 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{gathered}
$$

il cui problema duale risulta essere

$$
\begin{gathered}
\max w(y) = 4y_1 + 6y_2 \\
s.v. \\
7y_1 + 5y_2 \leq 14 \\
6y_1 - 3y_2 \leq -6 \\
3y_1 + 6y_2 \leq 3 \\
-6y_1 + 5y_2 \leq 30.
\end{gathered}
$$

Proprietà della coppia primale-duale

- Esempio

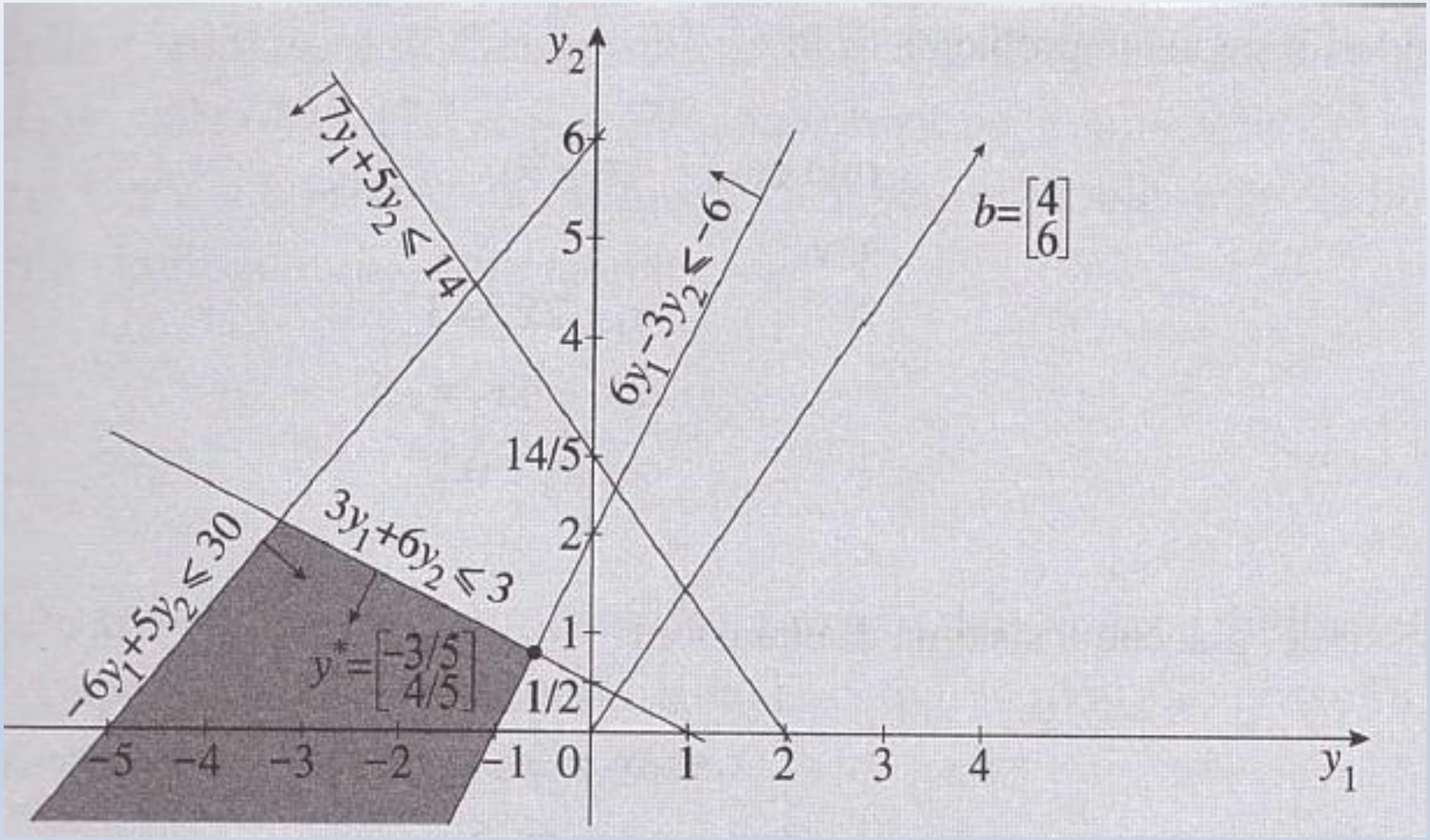
La soluzione ottima del problema primale è $x^* = [0\ 2/15\ 16/15\ 0]^T$, con valore $z* = 12/5$.

Di conseguenza, in base al teorema di dualità forte, il problema duale ha soluzione ottima $y*$ avente valore $w^* = 12/5$.

Infatti, risolvendo graficamente il problema duale (vedi Figura 7.2), si ricava che $y^* = [-3/5\ 4/5]^T$, a cui corrisponde il valore $w^* = 12/5$.

Proprietà della coppia primale-duale

- Figura 7.2 Soluzione grafica del problema duale



Proprietà della coppia primale-duale

- Corollario

  Se il problema primale è illimitato inferiormente, allora il problema duale non ammette soluzioni ammissibili.

Dimostrazione.

Si supponga, per assurdo, che il problema primale sia illimitato inferiormente e che esista una soluzione ammissibile $\bar{y}$ per il problema duale.

Per il teorema di dualità debole, deve essere $c^T x \geq b^T \bar{y}$, per ogni $x \in P$, contraddicendo l'ipotesi che il primale sia illimitato inferiormente ($b^T \bar{y}$ sarebbe infatti una limitazione inferiore per tutti i valori della funzione obiettivo del problema primale).

Proprietà della coppia primale-duale

- Esempio

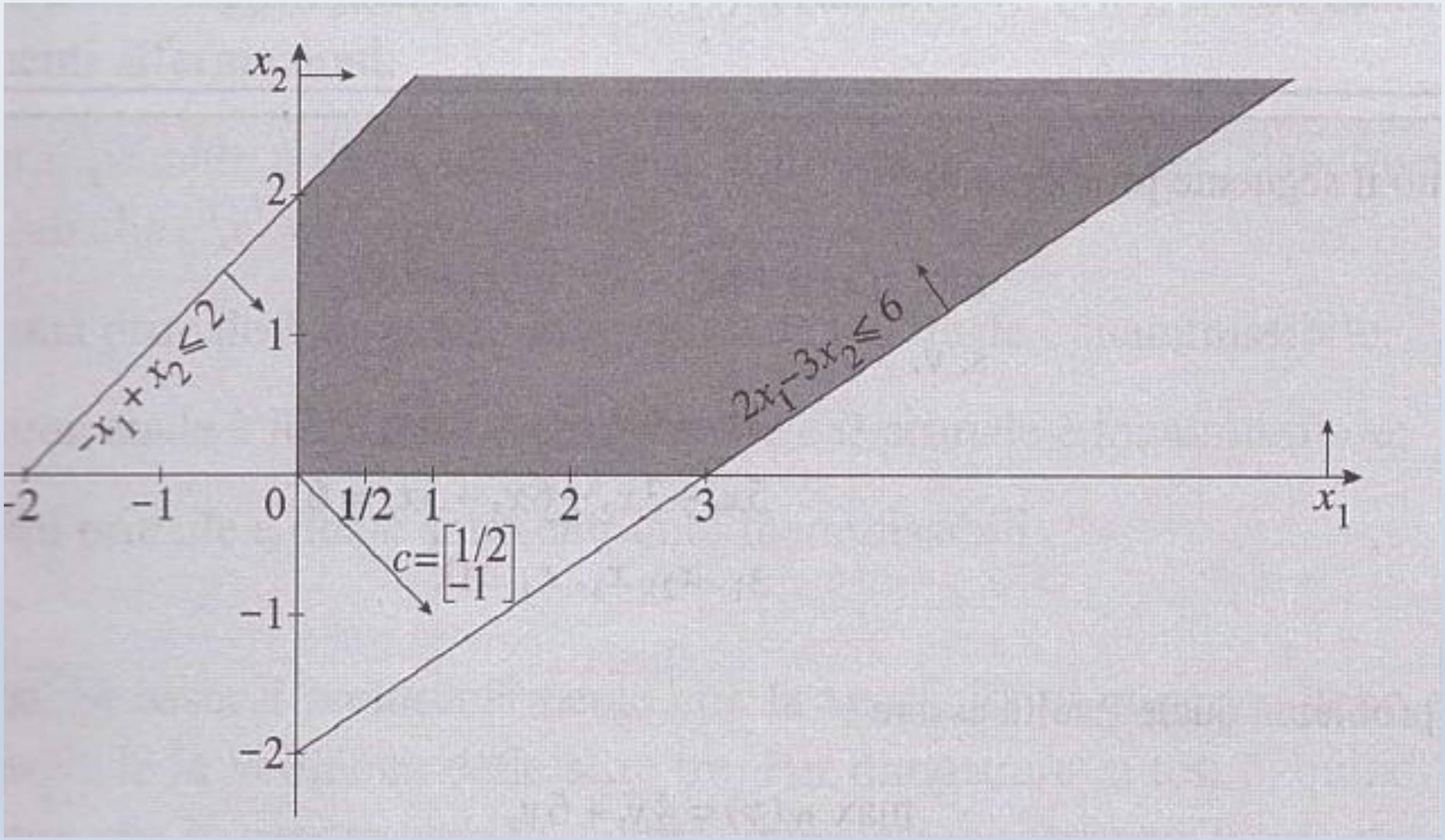
Dato il seguente problema di PL:

$$\begin{gathered}\min z(x) = \ 1/2x_1 \ - \ x_2 \\ s.v. 2x_1 \ - \ 3x_2 \ \leq \ 6 \\ -x_1 \ + \ x_2 \ \leq \ 2 \\ x_1, x_2 \ \geq \ 0;\end{gathered}$$

È dimostrato per via grafica essere illimitato inferiormente (vedi Figura 7.1)

Proprietà della coppia primale-duale

- Figura 7.1 – Problema illimitato inferiormente



Proprietà della coppia primale-duale

- Esempio

Il corrispondente problema duale

$$\max w(y) = 6y_1 + 2y_2$$
$$s.v.$$
$$2y_1 - y_2 \leq 1/2$$
$$-3y_1 + y_2 \leq -1$$
$$y_1, y_2 \leq 0$$

è inammissibile.

Proprietà della coppia primale-duale

Se il problema primale è inammissibile il duale non ammette ottimo (inammissibile o illimitato)

		DUALE		
		OTTIMO FINITO	ILLIMITATO SUPERIOR.	INAMMISSIBILE
PRIMALE	OTTIMO FINITO	SI	NO	NO
	ILLIMITATO INFERIOR.	NO	NO	SI
	INAMMISSIBILE	NO	SI	SI

Esempio

PRIMALE INAMMISSIBILE – DUALE INAMMISSIBILE

$$\min z(x) = x_1$$
$$s.v.$$
$$x_1 + x_2 \geq 1$$
$$-x_1 - x_2 \geq 1$$
x_1, x_2 libere

$$max\, w(y) = y_1 + y_2$$

$$y_1 - y_2 = 1$$
$$y_1 - y_2 = 0$$
$$y_1, y_2 \geq 0$$

Esempio

PRIMALE INAMMISSIBILE – DUALE ILLIMITATO

$$\min z(x) = x_1$$
$$s.v.$$
$$x_1 + x_2 \geq 1$$
$$-x_1 - x_2 \geq 1$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$max\, w(y) = y_1 + y_2$$

$$y_1 - y_2 \leq 1$$
$$y_1 - y_2 \leq 0$$
$$y_1, y_2 \geq 0$$

Proprietà della coppia primale-duale

4. Teorema degli scarti complementari

Data una coppia di soluzioni ottime, una per il problema primale e una per il duale, si può fornire un'ulteriore caratterizzazione delle stesse avvalendosi delle cosiddette «**condizioni di ortogonalità**».

Sia $\bar{x} \in R^n$ una soluzione ammissibile del problema primale e $\bar{y} \in R^m$ una soluzione ammissibile del problema duale; $\bar{x}$ e $\bar{y}$ sono soluzioni ottime per i rispettivi problemi se e solo se soddisfano le seguenti condizioni di ortogonalità:

$$(c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\bar{y}_i)\bar{x}_j = 0, \quad j=1,\ldots,n. \qquad (1)$$

Proprietà della coppia primale-duale

<u>Dimostrazione</u>.

Si osservi preliminarmente che, in virtù dell'ammissibilità delle soluzioni $\bar{x}$ e $\bar{y}$ per i rispettivi problemi, le condizioni di ortogonalità (1) possono equivalentemente riscriversi come un'unica equazione

$$(c^T - \bar{y}^T A)\bar{x} = 0 \qquad (2)$$

dal momento che le(1) implicano il soddisfacimento della (2) e viceversa.

Proprietà della coppia primale-duale

(*Condizione necessaria*).

Si supponga che $\bar{x}$ e $\bar{y}$ siano soluzioni ottime per i rispettivi problemi e dimostriamo che soddisfano le condizioni di ortogonalità.

Dal **teorema di dualità forte** si ha che

$$c^T \bar{x} = \bar{y}^T b$$

ovvero,

$$c^T \bar{x} - \bar{y}^T b = 0 \qquad (3)$$

Proprietà della coppia primale-duale

(*Condizione necessaria*).

Essendo $\bar{x}$ soluzione ammissibile per il primale, la (3) può scriversi come

$$c^T \bar{x} - \bar{y}^T A \bar{x} = 0$$

ovvero,

$$(c^T - \bar{y}^T A) \bar{x} = 0.$$

Proprietà della coppia primale-duale

(*Condizione sufficiente*).

Se le soluzioni x e y soddisfano la relazione (2), si ha che

$$c^T \bar{x} = \bar{y}^T A \bar{x} \qquad (4)$$

Essendo $\bar{x}$ soluzione ammissibile per il primale, la (4) è equivalente a

$$c^T \bar{x} = \bar{y}^T b.$$

Proprietà della coppia primale-duale

(*Condizione sufficiente*).

Dal **Corollario** segue l'ottimalità delle soluzioni $\bar{x}$ e $\bar{y}$ per i rispettivi problemi.

Le condizioni di ortogonalità rappresentano uno strumento molto utile e versatile nell'ambito della teoria della dualità.

In particolare, possono essere utilizzate per «**certificare**» agevolmente l'ottimalità di una data soluzione per un problema di PL.

Esercizio 1

Sia dato il seguente problema di PL:

$$\max z(x) = 40x_1 + 60x_2$$

$$s.v.$$

$$20x_1 + 20x_2 \leq 2800$$
$$10x_1 \leq 1000$$
$$x_1 + 3x_2 \leq 300$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

1. Risolvere il problema primale utilizzando il metodo grafico
2. Formulare il problema duale
3. Determinare i valori ottimali delle variabili duali utilizzando le condizioni di ortogonalità.

Esercizio 2

Sia dato il seguente problema di PL:

$$
\begin{aligned}
& \min z(x) = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 \\
s.v.\quad & \\
& 2x_1 + x_2 + x_3 \geq 2 \\
& x_1 + 3x_2 + 1/2x_4 \geq 3 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

1. Quante variabili ha il problema duale?
2. Scrivere il problema duale e trovare la soluzione ottima.
3. Trovare la soluzione ottima del problema primale utilizzando quella del duale.

Esercizio 3

Sia dato il seguente problema di PL:

$$\max z(x) = 3x_1 + 2x_2$$

$$s.v.$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\geq 10 \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 24 \\ -x_1 + x_2 &\leq 2 \\ 2x_1 - 3x_2 &\leq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

1. Scrivere il problema duale.
2. Utilizzando le condizioni di ortogonalità, trovare la soluzione ottima del duale sapendo che quella del primale è $x_1 = 6$, $x_2 = 4$