Ricerca Operativa

Programmazione Lineare

Università Mediterranea di Reggio Calabria
Decisions Lab

In un *problema di ottimizzazione* si cerca di massimizzare o minimizzare una quantità specifica, denominata *obiettivo*, che dipende da un numero finito di variabili input. Queste variabili possono essere indipendenti l'una dall'altra, o possono essere collegate da uno o più *vincoli*.

Example 1.1 The problem

$$\begin{aligned} \text{minimize:} \quad & z = x_1^2 + x_2^2 \\ \text{subject to:} \quad & x_1 - x_2 = 3 \\ & x_2 \geq 2 \end{aligned}$$

Ottimizzazione

Example 1.1 The problem

$$\begin{aligned} \text{minimize:} \quad & z = x_1^2 + x_2^2 \\ \text{subject to:} \quad & x_1 - x_2 = 3 \\ & x_2 \geq 2 \end{aligned}$$

è un problema di ottimizzazione per l'obiettivo z. Le variabili input x_1 e x_2, che sono vincolate in due modi

- x_1 deve essere 3 unità maggiore di x_2;
- x_2 maggiore o uguale a 2

Si vogliono trovare valori da assegnare alle variabili input che minimizzino la somma dei loro quadrati, con le limitazioni imposte dai vincoli.

Programma Matematico

Un *programma matematico* è un problema di ottimizzazione in cui l'obiettivo e i vincoli sono espressi come funzioni matematiche e relazioni funzionali, tramite la forma

$$
\begin{array}{rl}
\text{optimize:} & z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
\text{subject to:} & \left.\begin{array}{l} g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \\ g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{array}\right\} \begin{array}{c} \leq \\ = \\ \geq \end{array} \left\{\begin{array}{r} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ \\ b_m \end{array}\right.
\end{array}
$$

Programma Lineare

Un programma matematico è *lineare* se $f(x_1, \ldots, x_n)$ e ciascuna $g_i(x_1, \ldots, x_n)$, $i = (1, 2 \ldots, m)$, sono lineari in ciascuno dei propri argomenti

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$$

e

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \cdot + a_{in} x_n$$

dove c_j e a_{ij} $(i = 1, 2, \ldots m); j = 1, 2, \ldots n)$ sono costanti.

Programma Lineare: Esempio

Il Village Butcher Shop prepara la propria carne macinata mediante una combinazione di manzo e maiale. La carne di manzo macinata contiene l'80 per cento di polpa e il 20 per cento di grasso, e costa al negozio 80 centesimi per libbra; la carne di maiale macinata contiene il 68 per cento di polpa e il 32 per cento di grasso, e costa 60 centesimi per libbra. Quale quantità di ciascun tipo di carne deve impiegare il negozio in ciascuna libbra di carne macinata se esso vuole minimizzare il proprio costo e evitare che il contenuto grasso della carne superi il 25 per cento?

L'obiettivo è minimizzare il costo (in centesimi), z, di una libbra di carne dove $z = 80$ volte il peso del macinato di manzo, più di 60 volte il peso del macinato maiale.

Programma Lineare: Esempio

x_1 peso del macinato di manzo;

x_2 peso del macinato di maiale

La funzione obiettivo : $z = 80x_1 + 60x_2$.

Ciascuna libbra di carne conterrà $0.21x_1$ libbre di grasso provenienti dal manzo e $0.32x_2$ libbre di frasso provenienti dal maiale. Il grasso totale $\leqslant$ 0.25 libbre:

$$0.20x_1 + 0.32x_2 \leqslant 0.25$$

Si ponga poi $x_1 + x_2 = 1$ con $x_i \geqslant 0$ $(i = 1, 2)$

Combinando queste condizioni, si ottiene il programma lineare

minimize: $z = 80x_1 + 60x_2$

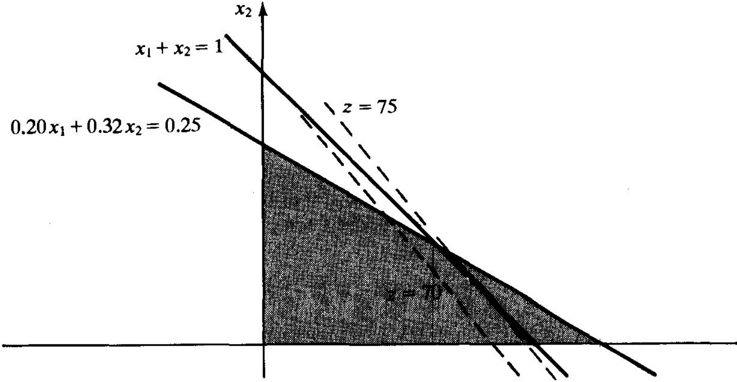
subject to: $0.20x_1 + 0.32x_2 \leq 0.25$

$x_1 + x_2 = 1$

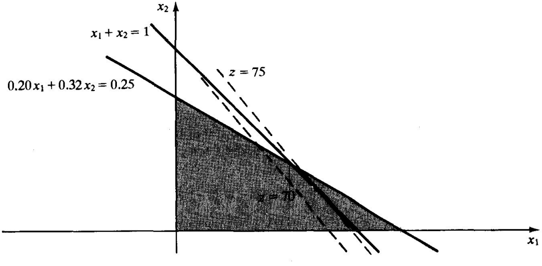
with: all variables nonnegative

Una *soluzione ammissibile* di un problema di PL è un vettore che soddisfa tutti i vincoli. L'insieme di tutte le soluzioni ammissibili si dice *regione ammissibile*. Una *soluzione ottima* è una soluzione ammissibile che ottimizza (minimizza o massimizza) il valore della funzione obiettivo fra tutte le soluzioni ammissibili.

Programma Lineare: Soluzione Grafica



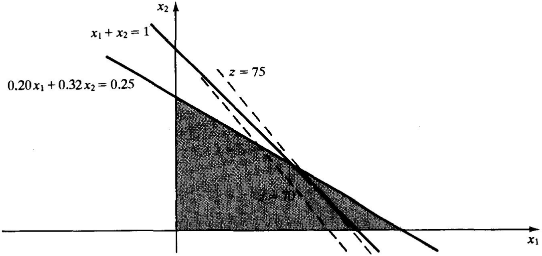
Programma Lineare: Soluzione Grafica



La *regione delle soluzioni ammissibili* è il segmento in neretto della figura. Per determinare z^* , il valore minimo di z, si scelgano due valori arbitrari (linee tratteggiate)

$$70 = 80x_1 + 60x_2 \quad \text{e} \quad 75 = 80x_1 + 60x_2$$

Programma Lineare: Soluzione Grafica



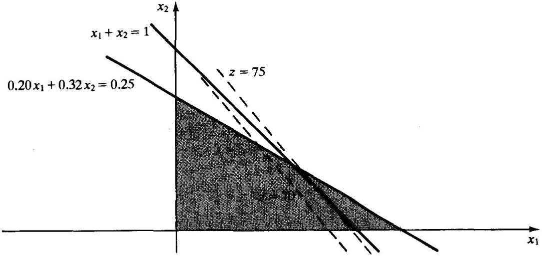
Si fa coincidere z^* con l'estremità superiore del segmento che rappresenta le soluzioni ammissibili, che corrisponde alla intersezione delle due rette

$$0.20x_1 + 0.32x_2 = 0.25 \quad \text{e} \quad x_1 + x_2 = 1$$

Programma Lineare: Soluzione Grafica

La soluzione delle due equazioni è $x_1^* = \frac{7}{12}$ e $X_2^* = \frac{5}{12}$.
Il sistema lineare si risolve:

$$z^* = 80\left(\frac{7}{12}\right) + 60\left(\frac{5}{12}\right) = 71.67$$



Esercizio: Programmi Interi

Un produttore di mobili ha 6 unità di legno e 28 ore di tempo libero durante le quali egli produce pannelli decorativi. Egli si limita a produrre due modelli che in passato vendeva in quantità soddisfacenti. Egli valuta che il modello I richiede 2 unità di legno e 7 ore di tempo, mentre il modello II richiede 1 unità di legno e 8 ore di tempo. I prezzi dei modelli sono rispettivamente 120 e 80 dollari. Quanti pannelli di ciascun modello deve produrre il mobiliere se desidera massimizzare il ricavo delle vendite?

La Forma Canonica

Un PL è in *forma canonica* se tutti i vincoli sono espressi come uguaglianza e se si conosce una soluzione ammissibile. In notazione matriciale, la forma canonica è

$$
\begin{aligned}
\text{optimize:} \quad & z = \mathbf{C}^T\mathbf{X} \\
\text{subject to:} \quad & \mathbf{AX} = \mathbf{B} \\
\text{with:} \quad & \mathbf{X} \geq \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

dove **X** è il vettore colonna delle incognite, $\mathbf{C}^T$ è il vettore riga dei costi corrispondenti, **A** è la matrice dei coefficienti delle equazioni di vincolo, **B** è il vettore colonna dei membri destri delle equazioni di vincolo.

Disuguaglianze e Forma Canonica

Quando vi sono disuguaglianze che esprimono i vincoli, allora queste si possono trasformare in uguaglianze, determinando un'unica soluzione ammissibile, non negativa.

I vincoli lineari hanno la forma

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_k \sim b_i$$

dove $\sim$ indica una delle relazioni $\leqslant, \geqslant, =$. Si può sempre assumere che le variabili b_i siano non negative.

Es: $2x_1 - 3x_2 + 4x_3 \leqslant -5$ moltiplicato per -1, ottenendo $-2x_1 + 3x_2 - 4x_3 \geqslant 5$

Variabili Slack

Un vincolo lineare della forma $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_k \leqslant b_i$ può essere convertito in eguaglianza aggiungendo una nuova variabile non negativa al membro sinistro della disuguaglianza. Questa è uguale alla differenza fra il membro destro e quello sinistro: *variabile slack*.

Rappresenta la perdita che si verifica in quella fase del sistema configurata dal vincolo.

Variabili Slack: Esempio

Si consideri un vincolo

$$4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 \leqslant 30000$$

a sinistra: numero totale di ore occorrenti per montare dei mobili. A destra: il numero totale di ore.

Si aggiunge la variabile slack x_5

$$4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 + x_5 = 30000$$

x_5 rappresenta il numero di ore di montaggio di cui il produttore dispone ma che non utilizza.

Variabili Slack: Esempio

Si consideri un vincolo

$$4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 \leqslant 30000$$

a sinistra: numero totale di ore occorrenti per montare dei mobili. A destra: il numero totale di ore.

Si aggiunge la variabile slack x_5

$$4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 + x_5 = 30000$$

x_5 rappresenta il numero di ore di montaggio di cui il produttore dispone ma che non utilizza.

Variabili Slack: Esempio

Si consideri un vincolo

$$4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 \leqslant 30000$$

a sinistra: numero totale di ore occorrenti per montare dei mobili. A destra: il numero totale di ore.

Si aggiunge la variabile slack x_5

$$4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 + x_5 = 30000$$

x_5 rappresenta il numero di ore di montaggio di cui il produttore dispone ma che non utilizza.

Variabili Surplus

Un vincolo lineare della forma $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_k \geqslant b_i$ può essere convertito in eguaglianza sottraendo una nuova variabile, non negativa, dal membro sinistro della disuguaglianza. Questa è uguale alla differenza fra il membro destro e quello sinistro: *variabile surplus*.

Rappresenta l'eccedenza di input che si verifica in quella fase del sistema configurata dal vincolo.

Variabili Surplus: Esempio

Si consideri un vincolo

$$4x_1 + 6x_2 + x_3 \geqslant 54$$

a sinistra: produzione congiunta di minerale di qualità superiore di tre miniere. A destra: quantità minima richiesta per soddisfare il contratto.

Si sottrae la variabile surplus x_4

$$4x_1 + 6x_2 + x_3 - x_4 = 54$$

x_4 rappresenta la quantità di minerale di qualità superiore estratta che eccede quella occorrente per rispettare il contratto.

Variabili Surplus: Esempio

Si consideri un vincolo

$$4x_1 + 6x_2 + x_3 \geqslant 54$$

a sinistra: produzione congiunta di minerale di qualità superiore di tre miniere. A destra: quantità minima richiesta per soddisfare il contratto.

Si sottrae la variabile surplus x_4

$$4x_1 + 6x_2 + x_3 - x_4 = 54$$

x_4 rappresenta la quantità di minerale di qualità superiore estratta che eccede quella occorrente per rispettare il contratto.

Variabili Surplus: Esempio

Si consideri un vincolo

$$4x_1 + 6x_2 + x_3 \geqslant 54$$

a sinistra: produzione congiunta di minerale di qualità superiore di tre miniere. A destra: quantità minima richiesta per soddisfare il contratto.

Si sottrae la variabile surplus x_4

$$4x_1 + 6x_2 + x_3 - x_4 = 54$$

x_4 rappresenta la quantità di minerale di qualità superiore estratta che eccede quella occorrente per rispettare il contratto.

Un insieme di vettori di m dimensioni $\{\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_n\}$ è *linearmente dipendente* se esistono delle costanti $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, tali che

$$\alpha_1 \mathbf{P}_1 + \alpha_2 \mathbf{P}_2 + \cdots + \alpha_n \mathbf{P}_n = \mathbf{0}$$

PL: Teoria delle soluzioni

Un vettore ad m dimensioni $\mathbf{P}$, è una *combinazione convessa* dei vettori ad m dimensioni, $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_n$, se esistono delle costanti non negative $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, la cui somma è 1, tali che sia

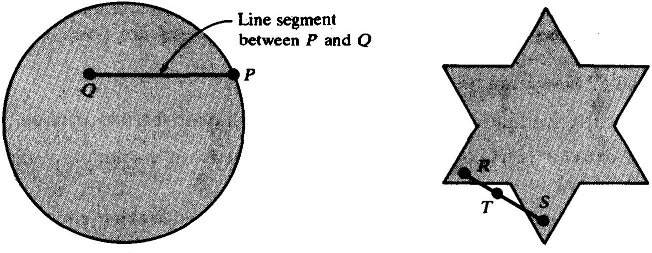
$$\mathbf{P} = \beta_1 \mathbf{P}_1 + \beta_2 \mathbf{P}_2 + \cdots + \beta_n \mathbf{P}_n$$

Es. $[5/3, 5/6]^T$ è una combinazione convessa dei vettori $[1, 1]^T$, $[3, 0]^T$, $[1, 2]^T$ poiché

$$\begin{bmatrix} 5/3 \\ 5/6 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

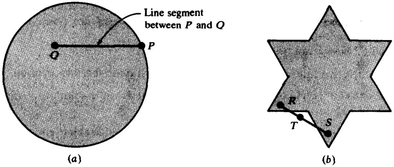
Dati due vettori ad m dimensioni $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, l'insieme di tutte le combinazioni convesse di $\mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}_2$ è il *segmento congiungente* i due vettori.

PL: Teoria delle Soluzioni

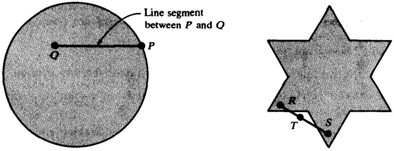


(a) (b)

Il cerchio (a) è un insieme convesso dato che il segmento congiungente una qualsiasi coppia dei suoi punti (vettori a 2 dimensioni) giace interamente dentro il cerchio. La figura (b) non è convessa: benché R ed S giacciano all'interno, esistono alcuni punti, ad es. T, che non sono compresi nella stella pur appartenendo al segmento congiungente R ed S.



Un punto P è un *punto estremo* di un insieme convesso se non può essere espresso come una combinazione convessa di altri due vettori dell'insieme: un punto estremo non giace sul segmento congiungente qualsiasi altra coppia di vettori dell'insieme.



(a) (b)

Teorema 1 Qualsiasi vettore compreso in un insieme convesso e limitato con un numero finito di punti estremi, può essere espresso come una combinazione convessa dei punti estremi.

Teorema 2 Lo spazio soluzione di un insieme di equazioni lineari simultanee è un insieme convesso avente un numero finito di punti estremi.

PL: Teoria delle Soluzioni

Sia $\mathcal{S}$ l'insieme di tutte le soluzioni ammissibili del PL nella forma canonica: ossia $\mathcal{S}$ è l'insieme di tutti i vettori $\mathbf{X}$ che soddisfano $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ e $\mathbf{X} \geqslant 0.$ Dal teorema 2 e dalle proprietà degli insiemi convessi, allora $\mathcal{S}$ è un insieme convesso avente un numero finito di punti estremi.

PL: Soluzioni basiche ammissibili

$\mathbf{A}^{m \times n}$= matrice dei coefficienti. L'equazione della matrice dei vincoli $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ diviene

$$x_1 \mathbf{A}_1 + x_2 \mathbf{A}_2 + \cdots x_n \mathbf{A}_n = \mathbf{B} \tag{1}$$

Si vogliono trovare soluzioni non negative per le variabili $x_1, \dots x_n$. Supporremo che $m \leqslant n$ e che il rango di $\mathbf{A}$ sia m.

Una *soluzione basica ammissibile* della (1) si ottiene ponendo $n - m$ variabili x uguali a zero, trovando una soluzione non negativa per le restanti variabili x, purché gli m vettori $\mathbf{A}$ corrispondenti alle x che non siano stati uguagliati a zero, siano linearmente indipendenti.

PL: Soluzioni basiche ammissibili

$\mathbf{A}^{m \times n}$= matrice dei coefficienti. L'equazione della matrice dei vincoli $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ diviene

$$x_1\mathbf{A}_1 + x_2\mathbf{A}_2 + \cdots x_n\mathbf{A}_n = \mathbf{B} \tag{1}$$

Si vogliono trovare soluzioni non negative per le variabili $x_1, \ldots x_n$. Supporremo che $m \leqslant n$ e che il rango di $\mathbf{A}$ sia m.

Una *soluzione basica ammissibile* della (1) si ottiene ponendo $n - m$ variabili x uguali a zero, trovando una soluzione non negativa per le restanti variabili x, purché gli m vettori $\mathbf{A}$ corrispondenti alle x che non siano stati uguagliati a zero, siano linearmente indipendenti.

PL: Soluzioni basiche ammissibili

$\mathbf{A}^{m \times n}$= matrice dei coefficienti. L'equazione della matrice dei vincoli $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ diviene

$$x_1\mathbf{A}_1 + x_2\mathbf{A}_2 + \cdots x_n\mathbf{A}_n = \mathbf{B} \tag{1}$$

Si vogliono trovare soluzioni non negative per le variabili $x_1, \ldots x_n$. Supporremo che $m \leqslant n$ e che il rango di $\mathbf{A}$ sia m.

Una *soluzione basica ammissibile* della (1) si ottiene ponendo $n - m$ variabili x uguali a zero, trovando una soluzione non negativa per le restanti variabili x, purché gli m vettori $\mathbf{A}$ corrispondenti alle x che non siano stati uguagliati a zero, siano linearmente indipendenti.

PL: Soluzioni basiche ammissibili

Le variabili x che non sono state inizialmente uguagliate a 0 sono chiamate *variabili basiche*.

- Se una o più variabili basiche risultano nulle, la soluzione basica è *degenerata*
- Se tutte le variabili basiche sono positive, la soluzione basica ammissibile è *non degenerata*

PL: Soluzioni basiche ammissibili

Le variabili x che non sono state inizialmente uguagliate a 0 sono chiamate *variabili basiche*.

- Se una o più variabili basiche risultano nulle, la soluzione basica è *degenerata*
- Se tutte le variabili basiche sono positive, la soluzione basica ammissibile è *non degenerata*

Osservazione 1 La funzione obiettivo raggiunge il suo ottimo in corrispondenza di una soluzione basica ammissibile

Osservazione 2 i punti estremi di $\mathcal{S}$ sono precisamente le soluzioni basiche ammissibili.

Si può risolvere il PL in forma canonica cercando fra le soluzioni basiche ammissibili, quella (quelle) che ottimizzano l'obiettivo. Un procedimento efficiente è il *metodo del simplesso*

Osservazione 1 La funzione obiettivo raggiunge il suo ottimo in corrispondenza di una soluzione basica ammissibile

Osservazione 2 i punti estremi di $\mathcal{S}$ sono precisamente le soluzioni basiche ammissibili.

Si può risolvere il PL in forma canonica cercando fra le soluzioni basiche ammissibili, quella (quelle) che ottimizzano l'obiettivo. Un procedimento efficiente è il *metodo del simplesso*