Autovalori e Autovettori

Un Esempio di Economia Industriale

Università Mediterranea di Reggio Calabria
Decisions Lab

Il Modello

- Un bene prodotto con due differenti qualità;
- due imprese: *leader* (L) che vende a prezzo p_l e *follower* (F) che vende a prezzo p_f;
- $p_l > p_f$
- L è considerata più prestigiosa di F.

Problema

Come varia nel tempo il peso delle due imprese nel mercato?

Il Modello

- Un bene prodotto con due differenti qualità;
- due imprese: *leader* (L) che vende a prezzo p_l e *follower* (F) che vende a prezzo p_f;
- $p_l > p_f$
- L è considerata più prestigiosa di F.

Problema

Come varia nel tempo il peso delle due imprese nel mercato?

Il Modello: dinamiche

- Il fatturato di L cresce esponenzialmente del 10% l'anno se non vi sono perdite di clienti, in proporzione al fatturato di F;
- Assunzione: vi è una perdita di clienti tale che L perde il 20% del fatturato in proporzione ad F (clienti vanno da L a F);
- F ha un fatturato che cresce del 5% in maniera autonoma. Riceve una ulteriore spinta (al 4%) della crescita del fatturato di L (beneficio "parassitario").

Il Modello: il sistema

Si indichi L con 1 ed F con 2. Diciamo che $x_s(t)$, con $s = \{1, 2\}$, è il fatturato delle due imprese nel periodo t. Si ha così

$$x_1(t) = (1 + 10\%)x_1(t-1) - 20\%x_2(t)$$
$$x_2(t) = 4\%x_1(t-1) + (1 + 5\%)x_2(t-1)$$

Il Modello: il sistema

Sostituendo $x_2(t)$ nella prima equazione, si ottiene una coppia di relazioni di ricorrenza che esprimono i due fatturati del periodo t in funzione dei due fatturati del periodo $(t-1)$:

$$x_1(t) = 1,092x_1(t-1) - 0,21x_2(t-1)$$
$$x_2(t) = 0,04x_1(t-1) + 1,05x_2(t-1)$$

Il Modello: Matrici

...che possono essere scritte in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,092 & -0,21 \\ 0,04 & 1,05 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t-1) \\ x_2(t-1) \end{bmatrix} \tag{1}$$

Ci si chiede se esistono coefficienti di crescita bilanciata λ tali che, pur nel rispetto del sistema di equazioni, si abbia

$$x_1(t) = \lambda x_1(t-1)$$
$$x_2(t) = \lambda x_2(t-1)$$

cioè con un tasso di crescita $\lambda - 1$ per entrambe le imprese.

Il Modello: Matrici

...che possono essere scritte in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,092 & -0,21 \\ 0,04 & 1,05 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t-1) \\ x_2(t-1) \end{bmatrix} \tag{1}$$

Ci si chiede se esistono coefficienti di crescita bilanciata λ tali che, pur nel rispetto del sistema di equazioni, si abbia

$$x_1(t) = \lambda x_1(t-1)$$
$$x_2(t) = \lambda x_2(t-1)$$

cioè con un tasso di crescita $\lambda - 1$ per entrambe le imprese.

Ci si chiede dunque, se possa aversi per qualche λ

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\lambda x_1 \\ \lambda x_2\end{bmatrix}}_{\text{fatturati in } t+i} = \begin{bmatrix}1,092 & -0,21 \\ 0,04 & 1,05\end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2\end{bmatrix}}_{\text{fatturati in } t} \tag{2}$$

Soluzioni

- Una soluzione banale: $x_1 = x_2 = 0$. Significherebbe che se le due imprese non vendessero niente, si potrebbe loro attribuire qualsiasi tasso di crescita comune delle vendite: in ogni caso non venderebbero nulla
- Interessa invece cercare $\lambda = 0$ per cui valga l'equazione lineare (2) con fatturati x_s non nulli (si ricordi l'indipendenza lineare).

Soluzioni

- Una soluzione banale: $x_1 = x_2 = 0$. Significherebbe che se le due imprese non vendessero niente, si potrebbe loro attribuire qualsiasi tasso di crescita comune delle vendite: in ogni caso non venderebbero nulla
- Interessa invece cercare $\lambda = 0$ per cui valga l'equazione lineare (2) con fatturati x_s non nulli (si ricordi l'indipendenza lineare).

Autovalori

Il sistema può essere scritto:

$$\begin{bmatrix} 1,092-\lambda & -0,21 \\ 0,04 & 1,05-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Che per definizione di Autovalori, ha senso se

$$\det \begin{pmatrix} 1,092-\lambda & -0,21 \\ 0,04 & 1,05-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

Cioè

$$(1,092-\lambda)(1,05-\lambda) + 0,21 \times 0,04 = 0.$$

Autovalori

Il sistema può essere scritto:

$$\begin{bmatrix} 1,092-\lambda & -0,21 \\ 0,04 & 1,05-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Che per definizione di Autovalori, ha senso se

$$\det \begin{pmatrix} 1,092-\lambda & -0,21 \\ 0,04 & 1,05-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

Cioè

$$(1,092-\lambda)(1,05-\lambda) + 0,21 \times 0,04 = 0.$$

Il Modello: Autovalori

L'equazione caratteristica

$$(1,092-\lambda)(1,05-\lambda)+0,21\times 0,04=0.$$

non ha soluzioni reali, non vi è così nessuna possibilità di sviluppo bilanciato per il mercato. Le radici complesse possono però darci molte informazioni. Queste sono

$$\lambda_{1,2}=1,071\pm 0,089i$$

Modello Generale

In generale, il modello fin qui utilizzato (equazione (1)) è definito come segue

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+g_1-mc & -m(1+g_2) \\ c & 1+g_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t-1) \\ x_2(t-1) \end{bmatrix}$$

- g_s tassi autonomi di crescita delle due aziende;
- m percentuale di perdita clienti del leader verso il follower
- c beneficio “parassitario”che F ritrae dalla crescita di fatturato di L.

Nell'esempio numerico analizzato si ha che:

$$\begin{cases} g_1 = 10\% \\ g_2 = 5\% \\ m = 20\% \\ c = 4\% \end{cases}$$

Soluzione

Si riduce l'effetto emorragico portando il relativo parametro da 20% a 1%, facendo crescere l'effetto "parassitario", portando il relativo parametro da 4% a 5%. I nuovi valori sono così

$$\begin{cases} g_1 = 10\% \\ g_2 = 5\% \\ m = 1\% \\ c = 5\% \end{cases}$$

Soluzione

La matrice dei coefficienti da rimpiazzare alla matrice nella equazione (2) diviene

$$\begin{bmatrix} 1,0995 & -0,0105 \\ 0,05 & 1,05 \end{bmatrix}$$

Con determinante

$$\det \begin{pmatrix} 1,0995 - \lambda & -0,0105 \\ 0,05 & 1,05 - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

Con soluzioni reali $\lambda_1 = 1,084$, $\lambda_2 = 1,065$.

Soluzione

La matrice dei coefficienti da rimpiazzare alla matrice nella equazione (2) diviene

$$\begin{bmatrix} 1,0995 & -0,0105 \\ 0,05 & 1,05 \end{bmatrix}$$

Con determinante

$$\det \begin{pmatrix} 1,0995-\lambda & -0,0105 \\ 0,05 & 1,05-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

Con soluzioni reali $\lambda_1 = 1,084$, $\lambda_2 = 1,065$.

Le soluzioni $\lambda_1 = 1,084$, $\lambda_2 = 1,065$ segnalano la possibilità di crescita armonica dei fatturati sia al tasso $8,4\%$ che al tasso $6,5\%$ per fatturati positivi $x_s > 0$.

Soluzione: Autovettori

Si cerchino adesso quali siano i vettori x associati a ciascun autovalore.

λ_1: Per il primo autovalore $\lambda_1 = 1,084$, le due componenti di x sono legate dalla equazione

$$(1,0995 - 1,084)x_1 - 0,0105x_2 = 0 \Rrightarrow \frac{x_2}{x_1} = 1,466$$

λ_2: mentre per il secondo autovalore $\lambda_2 = 1,065$

$$(1,0995 - 1,065)x_1 - 0,0105x_2 = 0 \Rrightarrow \frac{x_2}{x_1} = 3,248$$

Soluzione: Autovettori

Si cerchino adesso quali siano i vettori x associati a ciascun autovalore.

λ_1: Per il primo autovalore $\lambda_1 = 1,084$, le due componenti di x sono legate dalla equazione

$$(1,0995 - 1,084)x_1 - 0,0105x_2 = 0 \Rrightarrow \frac{x_2}{x_1} = 1,466$$

λ_2: mentre per il secondo autovalore $\lambda_2 = 1,065$

$$(1,0995 - 1,065)x_1 - 0,0105x_2 = 0 \Rrightarrow \frac{x_2}{x_1} = 3,248$$

Discussione del risultato

λ_1: Il leader è divenuto follower, in termini di fatturato, con vendite che superano quelle del competitor del $46,6\%$;

λ_2: il leader ha quota di mercato ridotta a $1/(1+3,248) = 23,5\%$.