

Università degli Studi di Firenze

Facoltà di Ingegneria

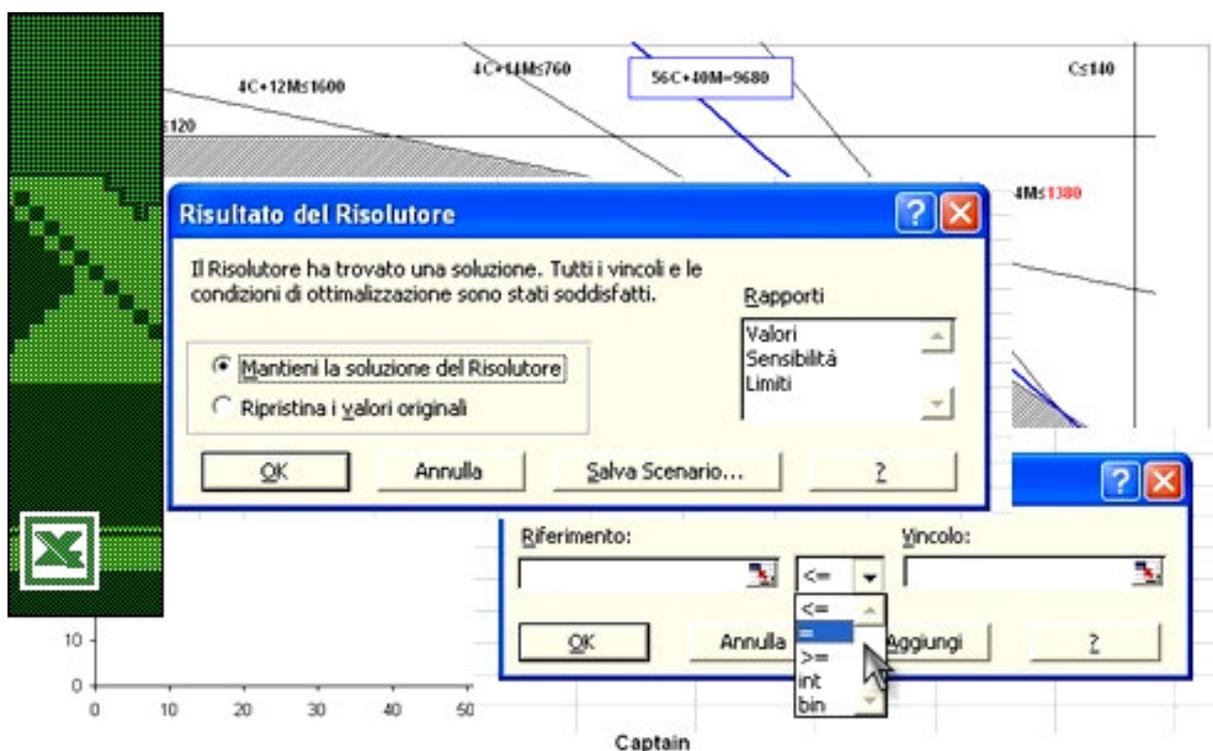
C.d.L.S. Ingegneria dell'Ambiente e del Territorio

A.A. 2004-2005



Corso di Ricerca Operativa

Introduzione all'ottimizzazione con il Risolutore di Excel©



Docente

Prof.ssa M.G. Tecchi

Studenti

Bellacci Lorenzo

Carubini Giano

1. INTRODUZIONE

I modelli d'ottimizzazione lineare specificano la relazione tra le **variabili di decisione** ed i **parametri**, computando una misura rappresentativa da ottimizzare ed altre variabili conseguenti. I **vincoli** pongono invece limitazioni allo spazio delle possibili decisioni; i valori ammissibili delle variabili di decisione sono determinati tramite una serie di **vincoli di disuguaglianza**. Quindi dobbiamo scegliere i valori delle variabili di decisione in modo tale da soddisfare i vincoli di disuguaglianza e nello stesso tempo massimizzare (ad esempio nel caso di profitti) o minimizzare (ad esempio nel caso di costi) il risultato.

La funzione **Risolitore** presente nel software Microsoft Excel © è una applicazione capace di ottimizzare un problema vincolato permettendo di maneggiare un vasto numero di variabili e di disequazioni di vincolo.

In tal sede ci interesseremo dell'ottimizzazione di **modelli lineari vincolati** (detti anche di Programmazione Lineare o PL) ed a tal scopo cercheremo di: esporre alcune tecniche per la formulazione di modelli PL, dare alcuni consigli per facilitare l'applicazione della funzione Risolitore, fornire conoscenze per utilizzare nel modo più efficiente possibile tale funzione.

Per descrivere l'utilizzo del risolutore faremo riferimento ad un modello decisionale per l'OAK Products, Inc. ditta produttrice di sedie. Ci sono 2 tipologie di sedie nella linea prodotti: *Captain* e *Mate*; la ditta, per proteggersi da improvvisi cali di domanda per uno dei 2 modelli ha fatto sì che alcuni pezzi siano intercambiabili tra di essi. Supponiamo che i manager dell'OAK Products siano in possesso di previsioni economiche secondo le quali la settimana seguente sia possibile vendere tante sedie quante la ditta è in grado di produrne. I manager devono quindi scegliere quante sedie produrre per ciascuno dei 2 modelli in modo tale da apportare il massimo profitto alla ditta.

Per prendere tale decisione verranno considerate le seguenti ipotesi:

1. le sedie vengono prodotte e vendute nella stessa settimana ed i guadagni unitari per i modelli Captain e Mate sono rispettivamente 56€ e 40€;
2. assemblare la sedia richiede innesti lunghi, innesti corti, gambe ed uno dei due tipi di sedili che sono disponibili in quantità limitate e che non possono essere incrementate;

3. per la settimana in esame la disponibilità di magazzino di innesti lunghi e corti è rispettivamente 1280 e 1600 unità. Ogni modello Captain usa 8 innesti lunghi e 4 corti, mentre ogni modello Mate ne usa 4 lunghi e 12 corti;
4. per la settimana in esame la disponibilità di magazzino delle gambe è di 760 unità, ogni sedia prodotta richiede 4 unità;
5. per la settimana in esame la disponibilità di magazzino di sedili pesanti e leggeri è rispettivamente di 140 e 210 unità. Ogni modello Captain utilizza un sedile pesante mentre il modello Mate utilizza quello leggero;
6. per motivi manageriali il numero di sedie prodotte per ogni tipo non può scendere sotto le 100 unità.

Date queste considerazioni i manager della OAK Products devono cercare di determinare il mix ottimale di prodotti, chiamato anche piano di **produzione ottimale**. In tabella 1 riassumiamo le ipotesi di lavoro.

Tabella 1. Schema riassuntivo delle ipotesi di lavoro

Componente	Captain	Mate	Totale
<i>Innesto lungo</i>	8	4	1280
<i>Innesto corto</i>	4	12	1600
<i>Gambe</i>	4	4	760
<i>Sedile pesante</i>	1	0	140
<i>Sedile leggero</i>	0	1	120

2. ASSEGNAZIONE DEI VINCOLI

Il primo passo verso la formulazione del modello sarà l'identificazione dei vincoli, che possono essere pensati come restrizioni allo spazio delle possibili decisioni. Per esempio le decisioni che un manager deve prendere potrebbero essere vincolate dall'ammontare di capitale e dalle leggi statali.

Tornando al nostro esempio, abbiamo constatato che per ogni componente della sedia esiste una limitazione sull'ammontare delle scorte di magazzino. Queste limitazioni sono vincoli alla produzione totale di sedie; se prendiamo come riferimento il numero di innesti lunghi richiesto potremmo, per un particolare piano di produzione impostare la seguente equazione:

$$8C + 4M = \text{numero totale di innesti lunghi}$$

dove C ed M sono rispettivamente il numero di modelli Captain e Mate prodotti. Queste due variabili vengono dette **variabili di decisione** perché sono quantità controllabili da chi esegue il piano di produzione; in questo caso il mix delle due variabili C ed M costituisce **l'insieme delle decisioni**. Nel modello analizzato sono accettabili solo le decisioni non negative (le decisioni che contemplano la produzione di un numero negativo di sedie non hanno senso fisico) che soddisfano tutti i vincoli e sono dette **decisioni ammissibili**.

L'equazione precedentemente scritta dovrà essere modificata in modo da rispettare la condizione sul numero di innesti lunghi disponibili:

$$8C + 4M \leq 1280$$

in cui il simbolo " \leq " viene detto vincolo di disuguaglianza, mentre l'espressione dipendente da C ed M viene detta funzione di vincolo.

Se proviamo ad impostare l'equazione di vincolo relativa al numero di gambe per ogni sedia (ricordiamo che ogni sedia richiede 4 gambe e che le scorte di magazzino dispongono di 760 gambe), risulterà:

$$4C + 4M \leq 760$$

Analogamente a quanto esposto sopra, è necessario impostare le equazioni di vincolo per ognuna delle tre rimanenti componenti (innesti corti, sedili pesanti e sedili leggeri); inoltre, non avendo senso fisico produrre un numero negativo di sedie, aggiungeremo al modello due ulteriori condizioni (**condizioni di non negatività**):

$$C \geq 0 \quad e \quad M \geq 0$$

Riassumendo l'insieme dei vincoli e delle condizioni di non negatività per il modello relativo al piano di produzione è il seguente:

$$\begin{aligned} 8C + 4M &\leq 1280 \\ 4C + 12M &\leq 1600 \\ C + M &\geq 100 \\ 4C + 4M &\leq 760 \\ C &\leq 140 \\ M &\leq 120 \\ C \geq 0 \quad e \quad M &\geq 0 \end{aligned}$$

3. LA FUNZIONE OBIETTIVO

Ogni modello di programmazione lineare ha, oltre ad una serie di vincoli, anche un obiettivo specifico rappresentato da una funzione dipendente dalle variabili di decisione, chiamata **funzione obiettivo**.

Nel nostro esempio i manager della OAK Products vogliono massimizzare il profitto della settimana seguente tramite la vendita di sedie Captain e Mate. Il profitto totale, sapendo che il guadagno unitario per ogni Captain è 56€ e per ogni Mate è 40€, assume la seguente espressione:

$$\Pi = 56C + 40M \quad , \Pi = \text{profitto totale}$$

Di tutte le infinite soluzioni ammissibili (cioè che rispettano tutti i vincoli) quella che porta al massimo profitto per l'impresa viene chiamata **soluzione ottimale** e la decisione che conduce a tale risultato viene detta **decisione ottimale**.

Poiché il profitto totale è funzione delle due variabili di decisione C ed M, lo scopo del modello sarà quello di massimizzare la seguente funzione obiettivo:

$$\text{Max } 56C + 40M$$

nel rispetto dei vincoli di disuguaglianza e di non negatività.

Riportando la descrizione di una situazione reale in un modello simbolico completo di funzione obiettivo e vincoli otteniamo ciò che viene chiamato **modello simbolico di PL**:

$$\begin{array}{l} \text{Max } 56C + 40M \\ \\ 8C + 4M \leq 1280 \\ 4C + 12M \leq 1600 \\ C + M \geq 100 \\ 4C + 4M \leq 760 \\ C \leq 140 \\ M \leq 120 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Funzione} \\ \text{obiettivo} \\ \\ \\ \text{Vincoli di} \\ \text{disuguaglianza} \end{array} \right\}$$

$$C \geq 0 \quad e \quad M \geq 0$$

Vincoli di non
negatività

Si noti che tutte le funzioni presenti nel modello sono funzioni lineari.

Un'importante considerazione può essere fatta sul problema della **non integralità della soluzione**. Così com'è strutturato, il modello può restituire quantità frazionarie di sedie prodotte, che ovviamente non sono significative allo scopo preposto. In casi come questo possiamo far ricorso a quattro possibili accorgimenti:

1. aggiungere una condizione di integralità al modello che forzi una o più variabili di decisione ad assumere valori interi (**modello intero di ottimizzazione**);
2. risolvere il modello PL ed arrotondare all'intero più vicino. Questo sistema può talvolta portare a soluzioni non ammissibili o non ottimali;
3. considerare una successione continua di settimane di produzione in modo da utilizzare la parte decimale della soluzione come elemento arrotondante per le settimane successive (ad esempio se ogni settimana produco 70.3 modelli Mate, in realtà metto sul mercato solo 70 unità mentre le componenti che costituiscono i $3/10$ di una unità vengono messi in magazzino; alla quarta settimana di produzione potrò immettere sul mercato 70 unità Mate più l'unità derivante dall'accumulo delle scorte di magazzino);
4. considerare il modello risultante esclusivamente come una guida alle decisioni di produzione. In questo caso la soluzione del modello PL fornisce un punto di partenza per le considerazioni manageriali.

4. PANORAMICA SUL RISOLUTORE

Il Risolutore, che fa parte del gruppo **Strumenti** di Excel (Figura 1), è un pacchetto aggiuntivo che ottimizza modelli vincolati, come ad esempio modelli di programmazione lineare. Per fare ciò utilizza un algoritmo di programmazione matematica che consente di trovare efficientemente la decisione ottima per un dato modello.

Per i modelli PL il Risolutore usa il **Metodo del Simplex**; ciò richiede che il foglio elettronico di lavoro sia impostato in una forma appropriata (come verrà trattato in seguito). Il metodo del Simplex può ottimizzare sia problemi lineari che non lineari. In tal sede analizzeremo solo i problemi lineari, quindi sia la funzione obiettivo che i vincoli di disuguaglianza dovranno essere espressi in forma lineare (ricordiamo che l'uso di funzioni **IF**, **ABS** di Excel implica la non linearità del modello).

Il Risolutore è composto essenzialmente da 2 programmi: il primo è un Excel Visual Basic che codifica il modello inserito nel foglio per essere utilizzabile dal secondo programma, che invece è costituito da un modulo separato da Excel che effettua l'ottimizzazione e restituisce la soluzione; questa verrà infine tradotta sul foglio di lavoro dal primo programma.

L'uso del Risolutore verrà schematizzato in vari passi (vedi Figura 2), mentre ci rifaremo alla Figura 3 per riassumere le differenze di nomenclatura usate nel modello PL e nel Risolutore.

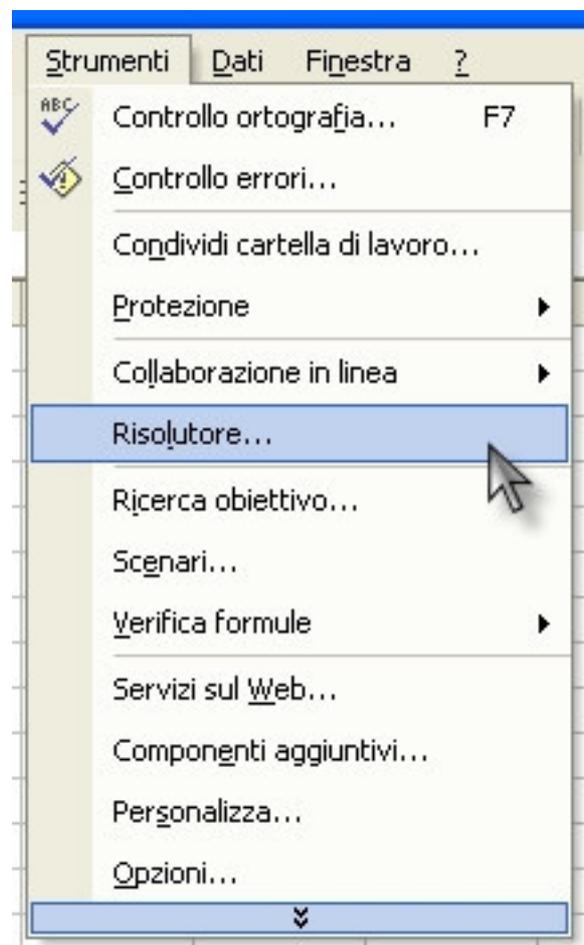
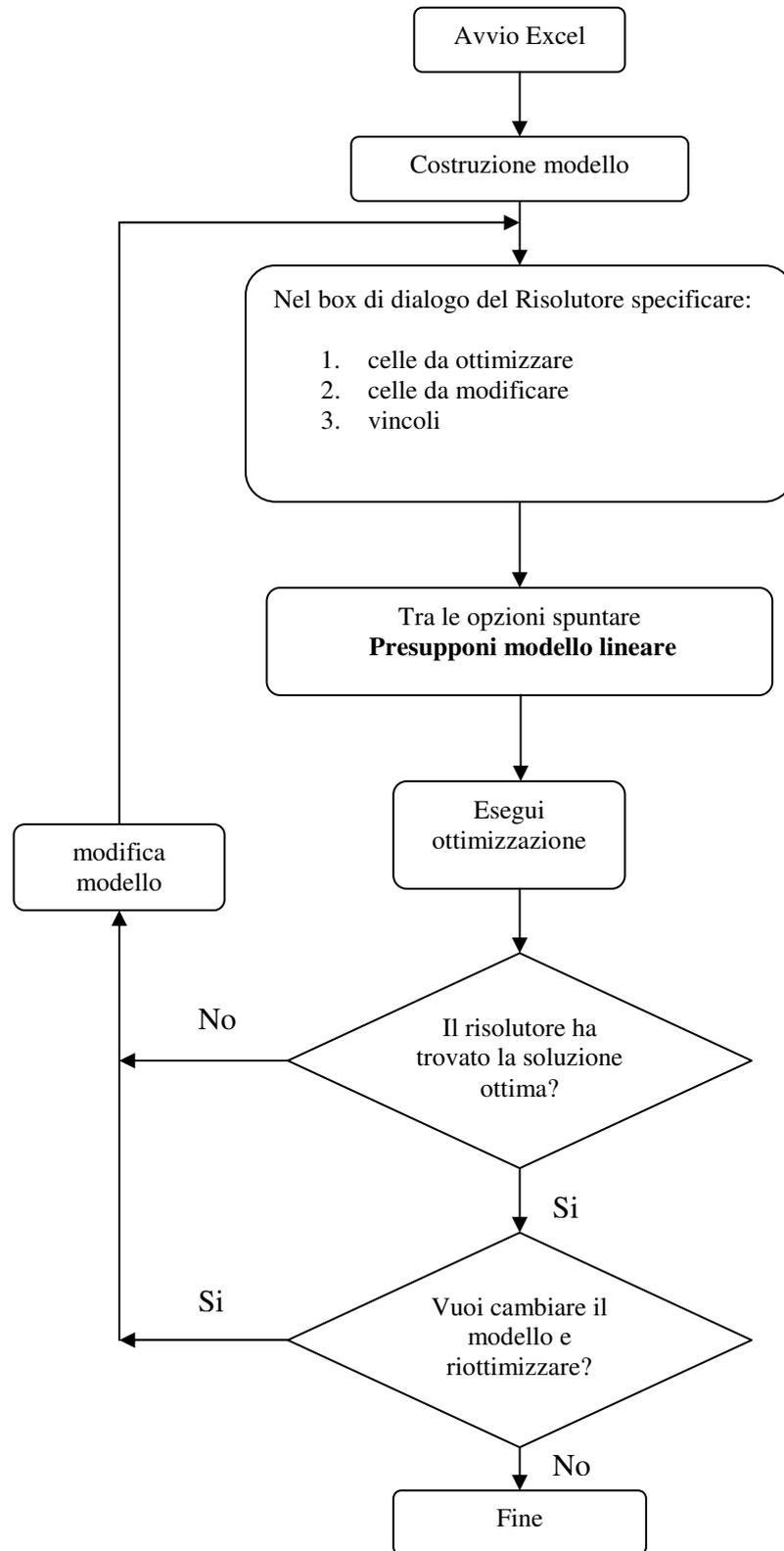


Figura 1. Menù strumenti:
Risolutore

Figura 2. Diagramma di flusso del Risolvente



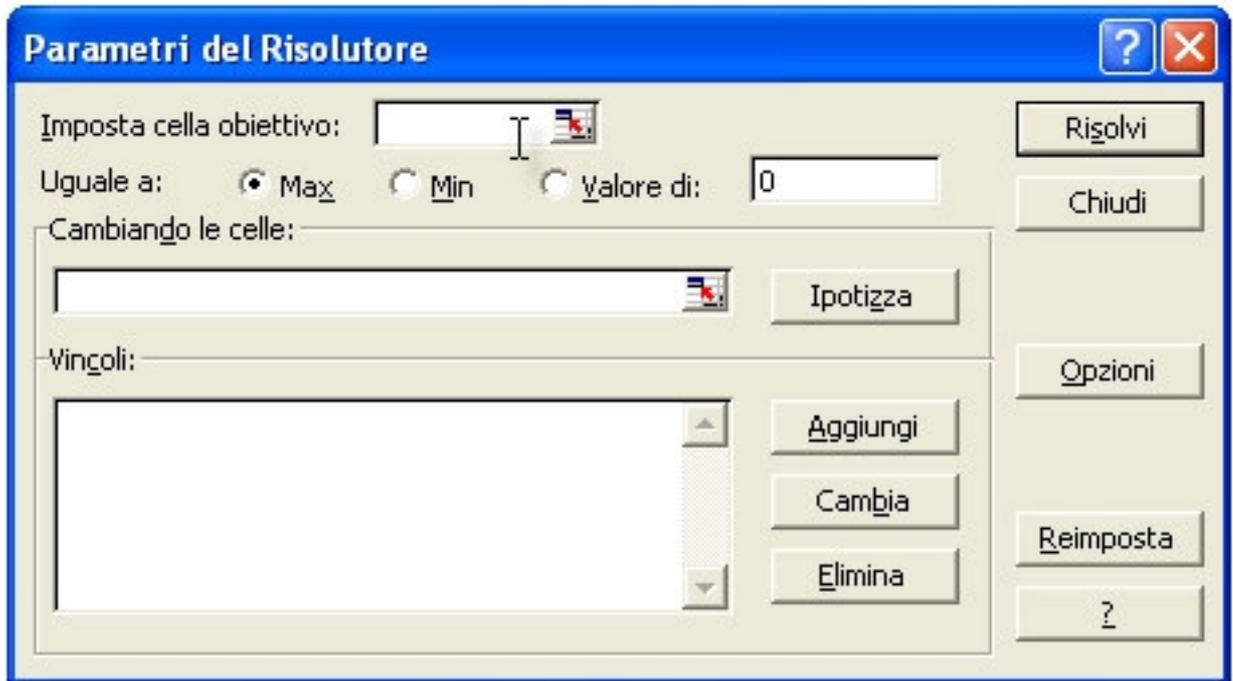


Figura 3. Finestra di comando Risolutore

Tabella 2. Terminologia del Risolutore

Terminologia PL	Terminologie Risolutore
Funzione obiettivo	Imposta cella obiettivo
Variabili di decisione	Cambiando le celle
Vincoli	Vincoli
Funzioni di vincolo	Vincoli

Come già accennato in precedenza, potremmo trovarci in situazioni per cui soluzioni ottimali negative non hanno senso fisico; il Risolutore di Excel permette di inserire il vincolo di non negatività (trattato in seguito).

Per una migliore comprensione del Risolutore riprendiamo l'esempio dell'OAK Products e descriviamo i passi che portano all'ottimizzazione del modello.

4.1. Creazione di un foglio di lavoro

La Figura 4, che mostra il foglio di lavoro utilizzato per il modello OAK Products, è stato costruito inserendo alcune celle che contengono etichette chiarificatrici in modo da rendere agevole l'utilizzo del Risolvente.

La parte evidenziata in giallo in Figura 4 rappresenta la funzione obiettivo, con il **Guadagno unitario** che è un dato del problema e la **Quantità** di sedie che rappresenta la variabile di decisione; in verde sono invece evidenziati i vincoli di disuguaglianza.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Modello OAK Product							
2	Modello	Captain	Mate					
3	Guadagno unitario	56 €	40 €	Profitto				
4	Quantità			0				
5		Componenti richiesti per ogni sedia		Utilizzo complessivo		Disponibilità di magazzino	Rimanenze	
6	Innesti lunghi	8	4	0	≤	1280	1280	
7	Innesti corti	4	12	0	≤	1600	1600	
8	Gambe	4	4	0	≤	760	760	
9	Sedili pesanti	1	0	0	≤	140	140	
10	Sedili leggeri	0	1	0	≤	120	120	
11								
12	Totale sedie prodotte			0	≥	100		
13								
14								

Figura 4. Modello PL di OAK Products

Le celle Excel etichettate come **Utilizzo Complessivo** e **Rimanenze** sono caratterizzate da formule che determineranno valori numerici in funzione del valore assunto dalle variabili di decisione. In particolare il controllo effettuato sui valori delle Rimanenze permette di stabilire se la soluzione trovata dal risolvente è ammissibile o meno: nel caso in esame soluzioni con rimanenze negative non sarebbero accettabili.

4.2. Ottimizzazione del modello

La finestra di dialogo del Risolvente (vedi Figura 3) è composta da diversi campi da compilare con le celle del foglio di lavoro. Il primo campo (**Imposta cella obiettivo**) richiede le celle da ottimizzare; nel nostro caso verrà inserita la cella relativa al profitto totale (**D4** in Figura 4).

Il campo successivo (**Uguale a:**) permette di definire il tipo di ottimizzazione: massimizzazione (**Max**), minimizzazione (**Min**) oppure far sì che la cella obiettivo diventi uguale ad un valore scelto (**Valore di:**). Nell'esempio proposto, l'obiettivo è quello di massimizzare il profitto, quindi verrà scelta l'opzione **Max**.

Il campo **Cambiando le celle** permette di specificare le variabili di decisione; è possibile scegliere l'opzione **Ipotizza** come scorciatoia all'inserimento delle variabili di decisione, anche se spesso questa scelta fornisce ipotesi errate. Nel nostro esempio le variabili di decisione sono le quantità prodotte relative ad ogni modello di sedia (celle **B4** e **C4**).

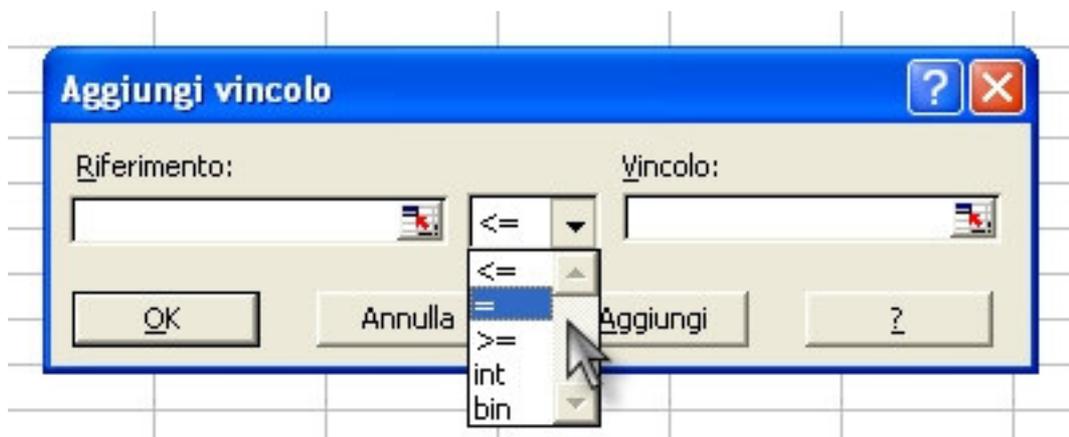


Figura 5. Finestra di dialogo dei vincoli

Andiamo quindi ad inserire i vincoli nell'omonimo campo; cliccando il tasto **Aggiungi** possiamo inserire nel box di sinistra (**Riferimento:**, come da Figura 5) le celle relative alle espressioni dei primi termini delle equazioni di vincolo (celle da **D6** a **D12** in Figura 4). Il campo centrale permette di scegliere il segno del vincolo; nel box di destra (**Vincolo:**, come da Figura 5) si inserisce il secondo termine che rappresenta il **termine noto** (celle da

F6 a F12 in Figura 4). Qualora il foglio di lavoro sia stato impostato in forma appropriata, con un'unica finestra di selezione si potrà inserire tutto il sistema di vincoli del modello; in caso contrario andranno selezionate ed inserite singolarmente.

Infine, se stiamo lavorando con un modello PL con relazioni strettamente lineari, dobbiamo entrare nel box di dialogo delle **Opzioni** (vedi Figura 6) e spuntare l'opzione **Presupponi modello lineare**.



Figura 6. Finestra di dialogo delle opzioni del Risolvente

All'interno del menù **Opzioni** (vedi Figura 6), si individuano alcuni comandi per modificare e migliorare la risoluzione del modello:

- **Tempo massimo:** limita il tempo a disposizione per il processo risolutivo. Nonostante sia possibile immettere un valore massimo di 32.767, il valore predefinito 100 (secondi) è adeguato per la maggior parte dei piccoli problemi.

- **Iterazioni:** limita il tempo a disposizione del processo risolutivo agendo sul numero di operazioni intermedie. Anche se è possibile immettere un valore massimo di 32.767, il valore predefinito 100 è adeguato per la maggior parte dei piccoli problemi.
- **Approssimazione:** controlla la precisione delle soluzioni utilizzando il numero immesso dall'utente per determinare se il valore di una cella impostata per il vincolo soddisfa un obiettivo o un limite superiore o inferiore. È necessario indicare la precisione con un numero frazionario compreso fra 0 e 1. Una precisione maggiore è ottenibile specificando un maggior numero di cifre decimali. Il numero 0,0001 ad esempio consente una precisione maggiore rispetto a 0,01.
- **Tolleranza:** la percentuale per la quale la cella obiettivo di una soluzione che soddisfa i vincoli interi può differire dal valore ottimale ed essere considerata comunque accettabile. È possibile utilizzare questa opzione solo per i problemi con vincoli interi. Una maggiore tolleranza tende a velocizzare il processo risolutivo.
- **Convergenza:** quando la variazione relativa del valore della cella obiettivo è minore del numero specificato nella casella **Convergenza** per le ultime cinque iterazioni, il processo si arresta. È possibile utilizzare la convergenza solo in problemi non lineari ed è necessario che sia indicata da un numero frazionario compreso fra 0 e 1. Un numero con più cifre decimali indica una convergenza più stretta. Il numero 0,0001 ad esempio consente una variazione relativa minore di 0,01. Più piccolo è il valore di convergenza, maggiore sarà il tempo necessario per raggiungere una soluzione.
- **Presupponi modello lineare:** selezionare per velocizzare il processo risolutivo quando tutte le relazioni dell'esempio sono lineari e si desidera risolvere un problema di ottimizzazione lineare.
- **Mostra il risultato delle iterazioni:** selezionare per interrompere il Risolvente e visualizzare i risultati a ogni iterazione.

- **Usa scala automatica:** selezionare per utilizzare la scala automatica quando la differenza fra i valori di input e di output è molto grande. Quando ad esempio si massimizza la percentuale dei profitti relativi a investimenti di milioni di lire.

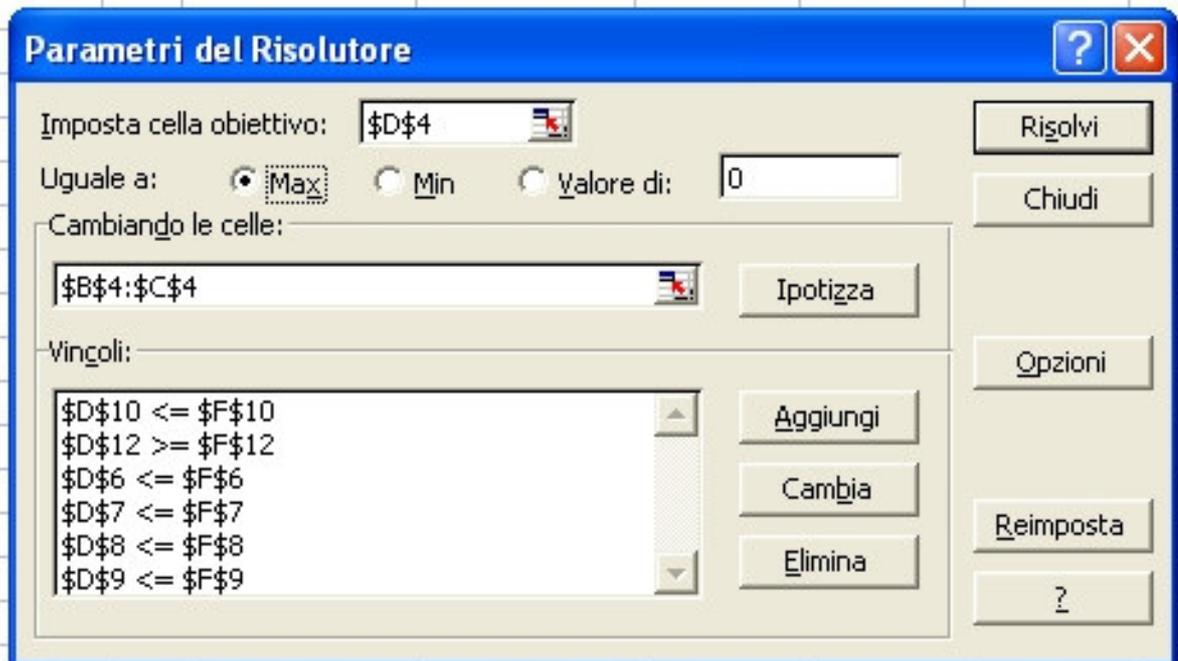


Figura 7. Finestra del Risolutore compilata per l'esempio dell'OAK Products

- **Presupponi non negativo:** indica al Risolvente di considerare 0 come limite inferiore di tutte le celle variabili per le quali non è stato impostato un limite inferiore nella casella **Vincolo** della finestra di dialogo **Aggiungi vincolo**.
- **Stime:** specifica l'approccio utilizzato per ottenere le stime iniziali delle variabili di base in ciascuna ricerca monodimensionale. **Tangente** utilizza l'estrapolazione lineare da un vettore tangente. **Quadratica** utilizza l'estrapolazione quadratica, che consente di migliorare i risultati nei problemi assolutamente non lineari.
- **Derivate:** specifica la differenziazione utilizzata per la stima di derivate parziali delle funzioni dei vincoli e dell'obiettivo. **Diretta** utilizzata per molti problemi in cui i valori del vincolo cambiano piuttosto lentamente. **Centrale** utilizzata per problemi in cui i vincoli cambiano rapidamente, specialmente in prossimità dei limiti. Sebbene questa opzione richieda una maggiore quantità di calcoli, è indicata nel caso in cui un messaggio informa che non è possibile migliorare la soluzione.
- **Ricerca:** specifica l'algoritmo utilizzato a ogni iterazione per determinare la direzione di ricerca. **Newton** utilizza un metodo quasi Newton che solitamente richiede più memoria ma meno iterazioni rispetto al metodo dei gradienti coniugati. **Gradienti coniugati** richiede meno memoria del metodo Newton ma solitamente un maggior numero di iterazioni per raggiungere un dato livello di precisione. Utilizzare questa opzione quando si desidera risolvere problemi di grosse dimensioni e si teme di non disporre di memoria sufficiente oppure quando la sequenza delle iterazioni appare particolarmente lenta.
- **Carica modello:** Visualizza la finestra di dialogo Carica modello, in cui è possibile specificare il riferimento al modello che si desidera caricare.
- **Salva modello:** Visualizza la finestra di dialogo Salva modello, in cui è possibile specificare la posizione in cui si desidera salvare il modello. Scegliere questo pulsante solo quando si desidera salvare più di un modello nello stesso foglio di lavoro, poiché il primo modello viene salvato automaticamente.

Al termine della compilazione, la finestra del risolutore nel caso esaminato avrà la forma riportata in Figura 7. Cliccando sul tasto **Risolvi**, il programma inizia a cercare la soluzione ottimale attraversando varie soluzioni intermedie. Non è detto che il Risolutore finisca il procedimento di computazione restituendo la soluzione ottimale; in Figura 8 abbiamo modificato una disequazione di vincolo rendendo negativo il limite superiore sulla quantità di innesti lunghi. In questo caso il Risolutore non riesce a trovare una soluzione fattibile ed è quindi necessario riscrivere in forma corretta il foglio Excel.

	A	B	C	D	E	F	G
1		Modello OAK Product					
2	Modello	Captain	Mate				
3	Guadagno unitario	56	40	Profitto			
4	Quantità	0	0	0			
5		Componenti richiesti per ogni sedia		Utilizzo complessivo		Disponibilità di magazzino	Rimanenze
6	Innesti lunghi	8	4	0	∞	-1280	-1280
7	Innesti corti	4	12	0	∞	1600	1600
8	Gambe	4	4	0	∞	760	760

Risultato del Risolutore ? X

Il Risolutore non è in grado di trovare una soluzione fattibile.

Mantieni la soluzione del Risolutore

Ripristina i valori originali

Rapporti

Valori
 Sensibilità
 Limiti

OK
Annulla
Salva Scenario...
?

Figura 8. Il Risolutore non è in grado di trovare una soluzione ammissibile

In particolare quando i calcoli raggiungono l'obiettivo prefissato la finestra di dialogo si presenta come in Figura 9.



Figura 9. Il Risolvente ha trovato la soluzione ottimale

Qualora i calcoli vengano completati con successo, è possibile “mantenere la soluzione del Risolvente” oppure “ripristinare i valori originali” (vedi Figura 9).

Di seguito riportiamo come si presenta il foglio di lavoro una volta computata la soluzione ottimale:

N25		fx					
	A	B	C	D	E	F	G
1		Modello OAK Product					
2	Modello	Captain	Mate				
3	Guadagno unitario	56	40	Profitto			
4	Quantità	130	60	9680			
5		Componenti richiesti per ogni sedia		Utilizzo complessivo		Disponibilità di magazzino	Rimanenze
6	Innesti lunghi	8	4	1280	≤	1280	0
7	Innesti corti	4	12	1240	≤	1600	360
8	Gambe	4	4	760	≤	760	0
9	Sedili pesanti	1	0	130	≤	140	10
10	Sedili leggeri	0	1	60	≤	120	60
11							
12	Totale sedie prodotte	1	1	190	≥	100	90
13							

Figura 10. Il risultato che massimizza il profitto

Vi è inoltre la possibilità di ottenere 3 rapporti relativi al conseguimento della soluzione (**Valori, Sensibilità, Limiti**), ognuno dei quali viene visualizzato in un nuovo foglio di lavoro all'interno dello stesso file Excel.

- **Rapporto valori:** elenca la cella obiettivo e le celle variabili con i relativi valori originali e finali, i vincoli e le informazioni sui vincoli (vedi Figura 11).
- **Sensibilità:** fornisce informazioni sul grado di sensibilità della soluzione a piccole variazioni della formula nella casella **Imposta cella obiettivo** nella finestra di dialogo **Parametri del Risolitore** o dei vincoli. Il rapporto non viene generato per modelli contenenti vincoli interi. Per modelli lineari, il rapporto include costi ridotti, prezzi ombra, coefficienti oggettivi (con incrementi e decrementi consentiti) e vincoli a destra (vedi Figura 12).
- **Limiti:** elenca la cella obiettivo e le celle variabili con i rispettivi valori, i limiti inferiore e superiore e i valori obiettivo. Il rapporto non viene generato per modelli contenenti vincoli interi. Il limite inferiore è il più piccolo valore che la cella variabile può assumere fissati i valori di tutte le altre celle variabili e nel rispetto dei vincoli. Il limite superiore è il valore più grande (vedi Figura 13).

	A	B	C	D	E	F	G		
1			Microsoft Excel 10.0 Rapporto valori						
2			Foglio di lavoro: [Foglio_risolvente.xls]Foglio1						
3			Data di creazione: 10/06/2005 16.00.03						
4									
5									
6			Cella obiettivo [Max]						
7			Cella		Valori originali	Valore finale			
8			\$D\$4 Quantità Profitto		9690	9690			
9									
10									
11			Cella variabili						
12			Cella		Valori originali	Valore finale			
13			\$B\$4 Quantità Captain		130	130			
14			\$C\$4 Quantità Mate		60	60			
15									
16									
17			Vincoli						
18			Cella		Nome	Valore della cella	Formula	Stato	Tolleranza
19			\$D\$6	Innesti lunghi	Utilizzo complessivo	1280	\$D\$6<=\$F\$6	Vincolante	0
20			\$D\$7	Innesti corti	Utilizzo complessivo	1240	\$D\$7<=\$F\$7	Non vincolante	360
21			\$D\$8	Gambe	Utilizzo complessivo	760	\$D\$8<=\$F\$8	Vincolante	0
22			\$D\$9	Sedili pesanti	Utilizzo complessivo	130	\$D\$9<=\$F\$9	Non vincolante	10
23			\$D\$10	Sedili leggeri	Utilizzo complessivo	60	\$D\$10<=\$F\$10	Non vincolante	60
24			\$D\$12	Totale sedie prodotte	Utilizzo complessivo	190	\$D\$12<=\$F\$12	Non vincolante	90

Figura 11. Rapporto Valori

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Microsoft Excel 10.0 Rapporto sensibilità							
2	Foglio di lavoro: [foglio_risolutore.xls]Foglio1							
3	Data di creazione: 29/06/2005 16.08.04							
4								
5								
6	Celle variabili							
7				Valore ridotto	oggettivo	consentito	consentito	
8	Cella	Nome		finale	Costo	Coefficiente	Incremento	Decremento
9	\$B\$4	Quantità Captain		130	0	56	24	16
10	\$C\$4	Quantità Mate		60	0	40	16	12
11								
12	Vincoli							
13				Valore ombra	Vincolo	consentito	consentito	
14	Cella	Nome		finale	Prezzo	a destra	Incremento	Decremento
15	\$D\$6	Innesti lunghi Utilizzo complessivo		1280	4	1280	40	180
16	\$D\$7	Innesti corti Utilizzo complessivo		1240	0	1600	1E+30	360
17	\$D\$8	Gambe Utilizzo complessivo		760	6	760	72	40
18	\$D\$9	Sedili pesanti Utilizzo complessivo		130	0	140	1E+30	10
19	\$D\$10	Sedili leggeri Utilizzo complessivo		60	0	120	1E+30	60
20	\$D\$12	Totale sedie prodotte Utilizzo complessivo		190	0	100	90	1E+30

Figura 13. Rapporto Sensibilità

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	
1	Microsoft Excel 10.0 Rapporto limiti										
2	Foglio di lavoro: [foglio_risolutore.xls]Rapporto limiti 1										
3	Data di creazione: 10/06/2005 16.01.15										
4											
5											
6	Obiettivo										
7	Cella	Nome	Valore								
8	\$D\$4	Quantità Profitto	9680								
9											
10											
11	Variabile			Limite		Risultato		Limite		Risultato	
12	Cella	Nome	Valore	inferiore	obiettivo	superiore	obiettivo				
13	\$B\$4	Quantità Captain	130	40	4640	130	9680				
14	\$C\$4	Quantità Mate	60	0	7280	60	9680				
15											

Figura 13. Rapporto Limiti

Merita particolare attenzione l'analisi dei risultati in colonna G (vedi Figura 10), cioè i valori delle rimanenze di magazzino una volta che tutte le sedie sono state prodotte con profitto massimo. Se la rimanenza per un qualsiasi componente scende a 0, allora il vincolo

relativo è chiamato “**di legame**”. Questo è l'elemento che previene un eventuale aumento di profitto a discapito dell'attendibilità del modello, ovvero evita che le rimanenze scendano sotto 0. I vincoli di legame sono estremamente interessanti per stendere piani di produzione; tali vincoli infatti agiscono da “colli di bottiglia” per l'intera produzione e quindi per i guadagni dell'impresa.

5. ANALISI DI SENSITIVITÀ

Ottimizzato in modello, ciò che otteniamo è una soluzione che in molti casi reali è solo un punto di partenza per un'analisi più approfondita; infatti il modello non è altro che una semplificazione della realtà, che risultando molto complessa (ad esempio a causa di fattori di natura etica, politica...) non può essere completamente implementata su un foglio di lavoro. È dunque necessario verificare che il modello ben si adatti all'incertezza spesso intrinseca alle situazioni reali. Attraverso l'**Analisi di Sensitività** (chiamata da Excel **Rapporto di Sensibilità**) è possibile calcolare gli effetti che il cambiamento di una variabile esogena (cioè esterna al modello) ha su una endogena, e fornisce quindi importanti informazioni aggiuntive sull'adeguamento del modello al mondo reale.

Una volta calcolata la soluzione ottima con il Risolitore, è necessario porsi i seguenti quesiti: quanto è "sensibile" (o "sensitiva") una soluzione ottima alle eventuali imprecisioni dei dati? Nel caso in cui si abbia una stima dei parametri del modello, cosa succede alla soluzione ottima se tale stima viene variata del 5%, 10%, 15%...? La soluzione ottimale o il valore della sua funzione obiettivo cambiano totalmente o rimangono più o meno invariate? Le risposte a queste domande aiuteranno ad individuare le linee guida per modificare ed adattare il modello alle esigenze del mondo reale.

In termini matematici l'analisi di sensitività è una derivata parziale in cui tutte le variabili sono mantenute costanti tranne una.

Prima di entrare nello specifico riprendiamo l'esempio semplificato dell'OAK Products, ricordando che lo scopo di questo modello è quello di consigliare il target di produzione. Supponiamo ad esempio che il prezzo di 56€ per le Captain e 40€ per le Mate sia stato fissato in base a stime economiche impostate su variabili soggette a cambiamenti. Supponiamo anche che a causa dei tempi di programmazione del piano di produzione sia necessario eseguire l'ottimizzazione del modello prima di ottenere i valori esatti. Dobbiamo quindi essere in possesso di idee abbastanza solide sul *range* all'interno del quale staranno i valori veri, per poter affermare che i prezzi calcolati sono la miglior stima ottenibile. L'incertezza potrebbe riguardare anche una o più equazioni di vincolo (sia nel primo termine che nei termini noti), il numero delle variabili o il numero di vincoli.

5.1. Variazione dei coefficienti della funzione obiettivo

Supponiamo che vengano variati i coefficienti della funzione obiettivo (FO) e nella fattispecie dell'esempio dell'OAK Products, si vari il prezzo del modello Mate da 40€ a 48€. Ci si potrebbe quindi aspettare un cambiamento nella soluzione ottimale dovuta ad un aumento di produzione del modello Mate, data la sua maggiore redditività. In realtà non si ha alcuna variazione dei valori ottimali di C ed M, mentre si registra un aumento del profitto ottimale da 9680€ a 10160€. Incrementiamo ulteriormente la redditività delle Mate portandola a 80€; differentemente dal caso precedente non abbiamo la sola variazione del profitto ottimale ma anche diverse soluzioni ottimali: C=85 M=105.

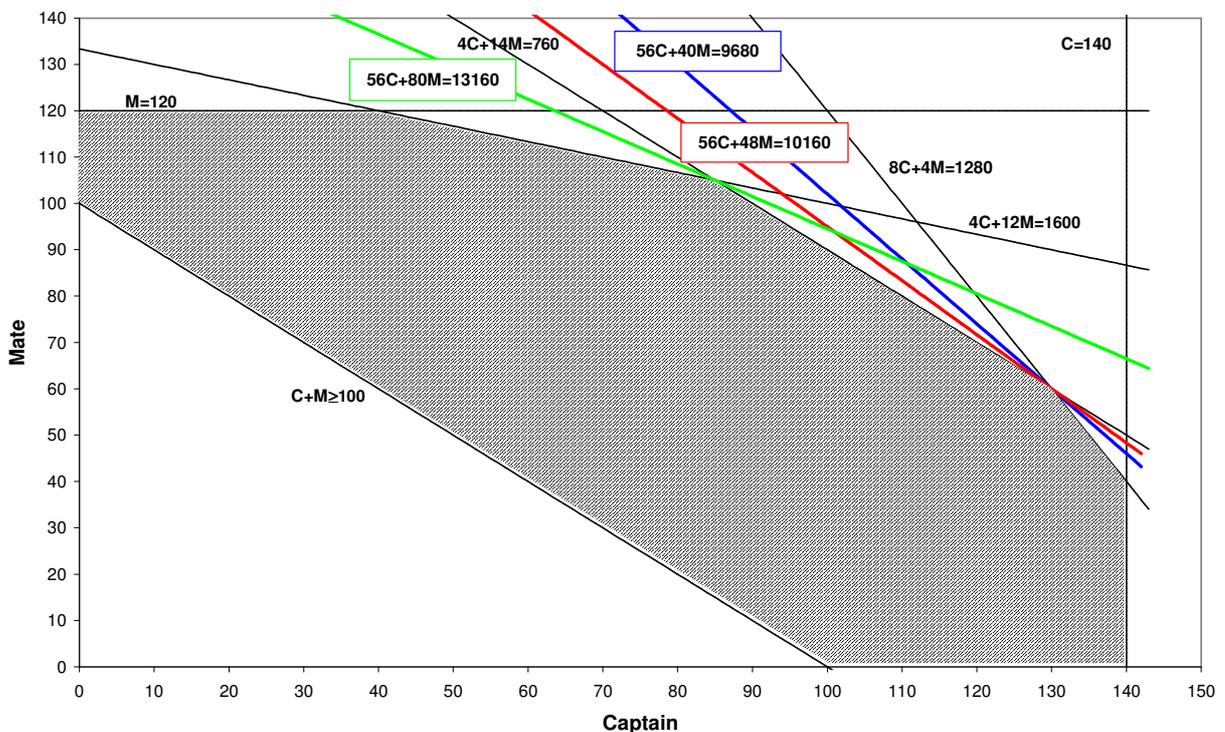


Figura 14. Risoluzione grafica del problema PL OAK Products con 3 diverse linee di isoprofitto

Interpretando graficamente ciò che fin qui abbiamo descritto, si realizza che le variazioni nella FO portano ad una variazione di pendenza della **linea di isoprofitto** (pendenza = $\frac{\text{coeff. } M}{\text{coeff. } C}$), che nel primo caso (linea **blu**) mantiene invariato lo “spigolo”

ottimale a differenza del secondo (linea **rossa**) caso in cui otteniamo una nuova soluzione ottimale (v. Figura 14).

Utilizzando la chiarezza visiva del metodo grafico, cerchiamo di capire come interpretare le informazioni fornite dall'Analisi di Sensitività.

Il **Rapporto di Sensibilità** viene visualizzato in un foglio separato all'interno dello stesso file Excel (v. Figura 12) ed è suddiviso in 2 campi: **Celle Variabili** relativo alla FO e **Vincoli**; le prime cinque colonne riassumono i coefficienti del modello, le soluzioni ottimali trovate ed i **prezzi ombra** (ovvero la variazione del valore ottimo della FO in relazione della variazione unitaria del termine noto associato al prezzo ombra. I prezzi ombra sono sempre associati alle variabili di legame).

Le ultime due colonne contengono rispettivamente gli **Incrementi** ed i **Decrementi Consentiti**, ovvero di quanto possono essere aumentati o diminuiti i coefficienti della FO, mantenendo costanti tutti gli altri dati del modello, affinché la soluzione ottimale rimanga invariata. In Figura 14, infatti, il passaggio da un profitto unitario di 40€ ad uno di 48€ non comporta variazioni nella soluzione ottimale poiché per il modello Mate è "consentito" un incremento di 16€; portando invece la redditività unitaria ad 80€ la soluzione ottimale cambia poiché l'incremento per il profitto unitario del modello Mate aumenta di 40€ rispetto al valore iniziale (v. Figura 12). Qualora tale valore uguagliasse quello del modello Captain (v. linea **verde** in Figura 14), la linea di isoprofitto sarebbe parallela a quella del vincolo sulle gambe ed in tal caso si avrebbero 2 soluzioni ottimali; inoltre tutti i punti appartenenti alla retta di vincolo e compresi tra i due spigoli ottimali sono anch'essi ottimali.

Da un punto di vista numerico si possono riscontrare i seguenti casi:

- $\frac{\text{coeff. } M}{\text{coeff. } C} < 1 \rightarrow$ la variazione del coefficiente non è sufficiente per cambiare la soluzione ottimale;
- $\frac{\text{coeff. } M}{\text{coeff. } C} > 1 \rightarrow$ la variazione del coefficiente è sufficiente per cambiare la soluzione ottimale;

- $\frac{\text{coeff. } M}{\text{coeff. } C} = 1 \rightarrow$ la variazione del coefficiente produce crea soluzioni ottimali alternative;

Infine possiamo così riassumere i concetti espressi in questo paragrafo:

1. le colonne **Incremento Consentito** e **Decremento Consentito** nella sezione **Celle Variabili del Rapporto di Sensibilità** ci dicono quanto i coefficienti della variabile di decisione nella FO possono essere aumentati o diminuiti senza cambiare la soluzione ottimale (assumendo fissati gli altri dati). Ovviamente il profitto totale non rimane invariato in questo *range* poiché viene influenzato dalla variazione dei coefficienti;
2. quando un coefficiente viene variato in quantità minore di quella consentita, la soluzione ottimale corrente rimane l'unica soluzione del modello;
3. quando un particolare coefficiente viene incrementato esattamente della quantità consentita esisterà una soluzione ottimale alternativa il cui valore ottimo sarà maggiore del precedente nel caso dei problemi di massimizzazione e minore nel caso di problemi di minimizzazione;
4. quando un particolare coefficiente viene diminuito esattamente della quantità consentita esisterà una soluzione ottimale alternativa il cui valore ottimo sarà minore del precedente nel caso dei problemi di massimizzazione e maggiore nel caso di problemi di minimizzazione.

5.2. Variazione dei termini noti

Focalizziamo adesso la nostra attenzione sui termini alla destra delle disequazioni di vincolo (ovvero sui **termini noti**). In generale, incrementare (/diminuire) il termine noto di una disequazione con vincolo \geq (\leq) rende più difficile soddisfare tale condizione (**restrizione del vincolo**). Al contrario, il processo che consiste nel decremento (/incremento) del termine noto di una disequazione con vincolo \geq (\leq) è detto **attenuazione di vincolo** e rende più facile soddisfare le condizioni.

Si può quindi affermare che la restrizione di vincolo diminuisce la regione ammissibile delle soluzioni o la lascia invariata mentre l'attenuazione di vincolo espande la regione ammissibile o la lascia invariata. Questi risultati sono in generale veri indipendentemente dalla dimensione del modello.

Facendo riferimento alla variazione di più vincoli contemporaneamente, se ciò avviene nella stessa "direzione" (o restrizione, o attenuazione) la regione ammissibile varia con i criteri precedentemente descritti; se invece non vi è omogeneità, non si può a priori stabilire l'effetto prodotto sulla regione ammissibile. Restringere troppo un vincolo può produrre inammissibilità.

Per il modello OAK Products consideriamo in primo luogo la situazione in cui fissiamo tutti i termini noti ad eccezione di quello relativo ai **innesti lunghi**. Cosa succede se al posto di avere 1280 innesti lunghi disponibili in magazzino, ne avessimo 1281? Quale sarebbe l'effetto sul valore ottimo?

Per ciò che è stato detto in precedenza, un aumento del termine noto associato ad un vincolo di \leq renderebbe più facile soddisfare le condizioni imposte. Ci aspettiamo quindi che il valore ottimo non diminuisca; potrebbe invece aumentare, e se fosse così, di quanto aumenterebbe?

La nuova soluzione così ottenuta restituisce i valori ottimi di $C=130.25$, $M=59.75$ ed il valore ottimale di 9684€; è molto importante notare che l'incremento del valore ottimale della FO è di 4€, cioè esattamente pari al prezzo ombra associato agli innesti lunghi. Come si può notare da Figura 15, la variazione della regione ammissibile subisce un incremento pressoché irrilevante.

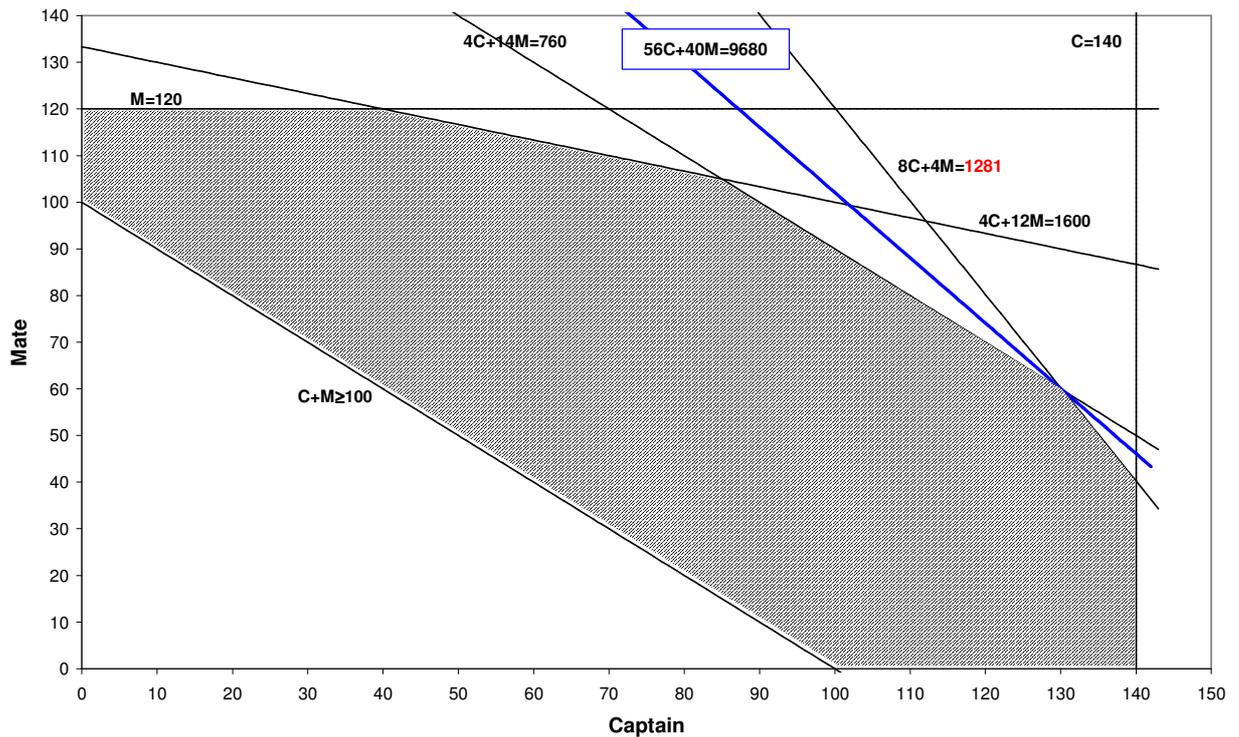


Figura 15. Risoluzione grafica con variazione del termine noto degli innesti lunghi di una unità

Proviamo adesso ad impostare lo stesso termine noto al valore di 1320; si ottiene una soluzione ottimale per $C=140$, $M=50$ e quindi un profitto ottimale di 9840€; si può notare da Figura 16 che le tre rette di vincolo relative a innesti lunghi, gambe e sedili pesanti si incontrano in un punto ed essendo nulle le relative rimanenze di magazzino siamo in presenza di tre condizioni di legame. Quando i vincoli di legame sono in numero maggiore delle variabili, la soluzione del problema PL è detta **degenerare**. In questo caso la regione ammissibile subisce una variazione non trascurabile evidenziata dal triangolo in rosso in Figura 16.

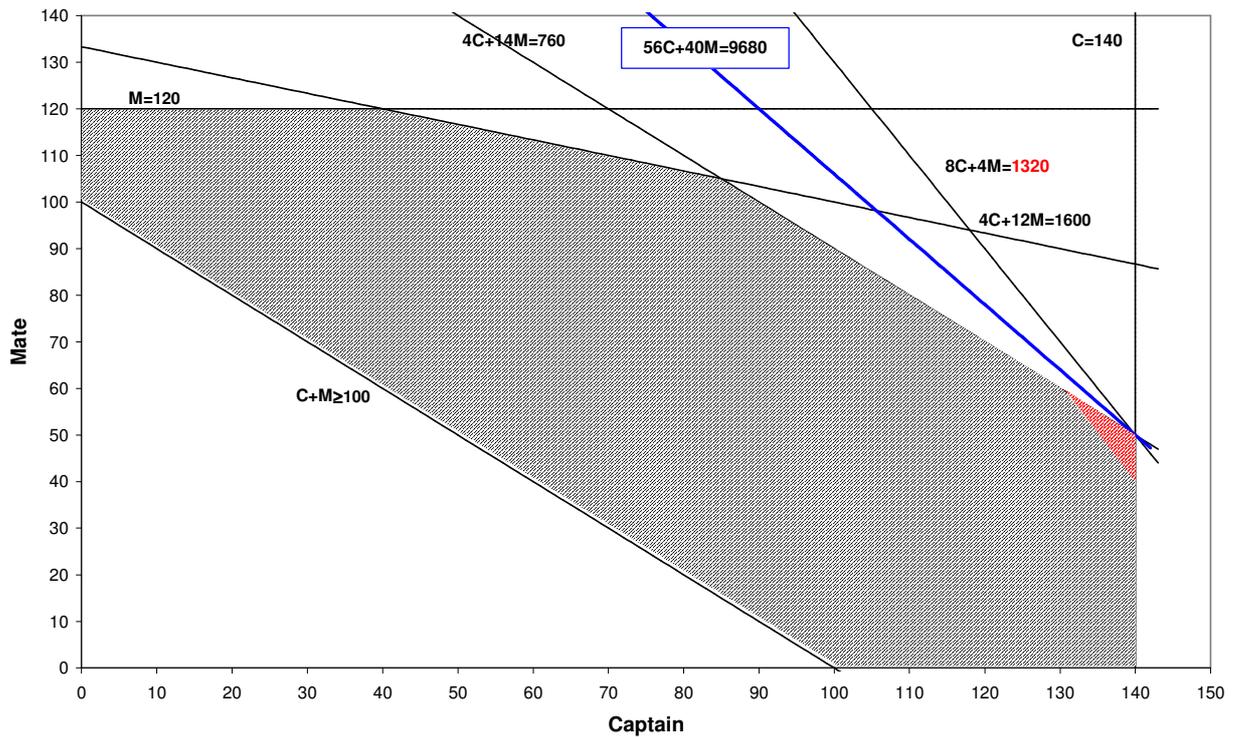


Figura 16. Risoluzione grafica con valore del termine noto degli innesti lunghi di 1320

Una soluzione degenere comporta anomalie nell'interpretazione dell'Analisi di Sensitività; infatti, come si può notare in Figura 17, il prezzo ombra relativo agli innesti lunghi è uguale a zero (nonostante questi sia un vincolo di legame) ed i valori praticamente infiniti degli incrementi/decrementi consentiti lasciano invariata la soluzione ottimale, pur modificando sostanzialmente la regione ammissibile.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Microsoft Excel 10.0 Rapporto sensibilità							
2	Foglio di lavoro: [foglio_risolitore.xls]Foglio1							
3	Data di creazione: 29/06/2005 11.09.17							
4								
5								
6	Celle variabili							
7				Valore ridotto	oggettivo	consentito	consentito	
8	Cella	Nome		finale	Costo	Coefficiente	Incremento	Decremento
9	\$B\$4	Quantità Captain		140	0	56	1E+30	16
10	\$C\$4	Quantità Mate		50	0	40	16	40
11								
12	Vincoli							
13				Valore ombra	Vincolo	consentito	consentito	
14	Cella	Nome		finale	Prezzo	a destra	Incremento	Decremento
15	\$D\$6	Innesti lunghi Utilizzo complessivo		1320	0	1320	1E+30	0
16	\$D\$7	Innesti corti Utilizzo complessivo		1160	0	1600	1E+30	440
17	\$D\$8	Gambe Utilizzo complessivo		760	10	760	0	200
18	\$D\$9	Sedili pesanti Utilizzo complessivo		140	16	140	0	55
19	\$D\$10	Sedili leggeri Utilizzo complessivo		50	0	120	1E+30	70
20	\$D\$12	Totale sedie prodotte Utilizzo complessivo		190	0	100	90	1E+30

Figura 17. Rapporto di sensibilità nel caso di soluzione degenere

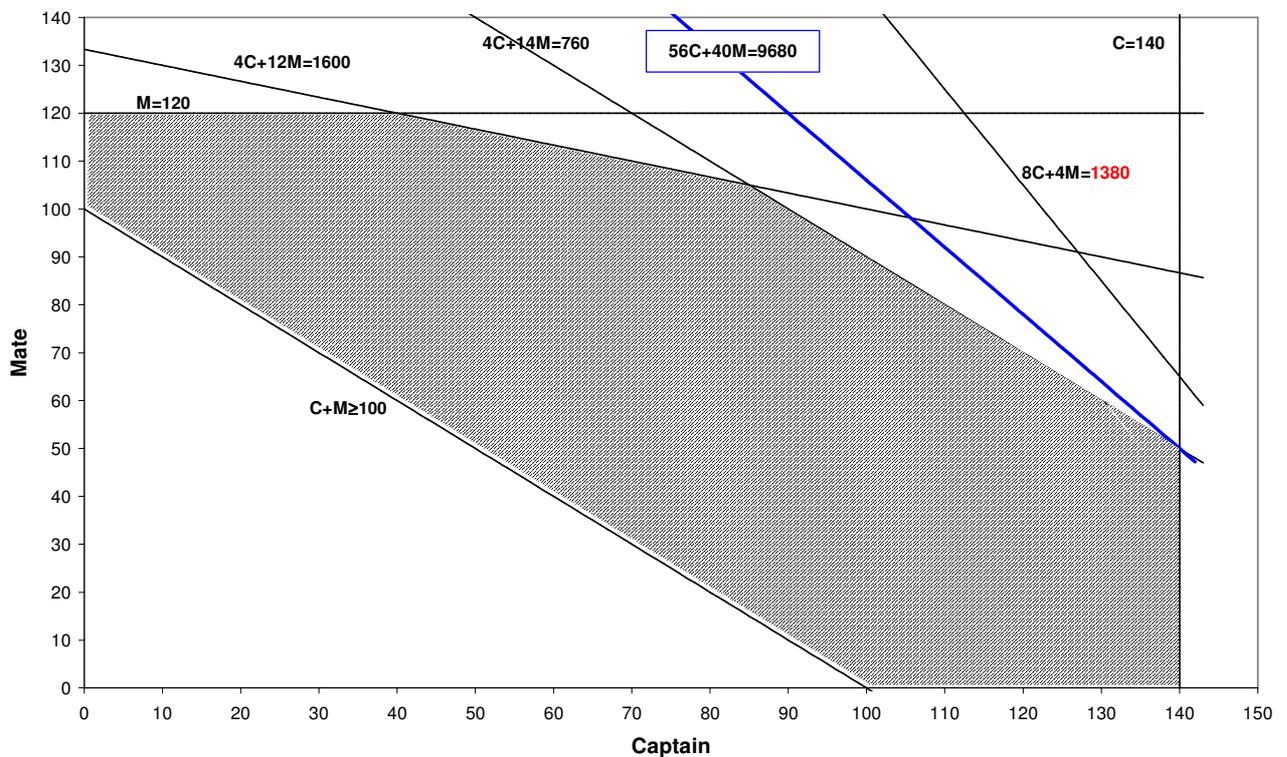


Figura 17. Risoluzione grafica nel caso di equazione di vincolo ridondante

Quando il valore viene spinto oltre 1320 il vincolo di magazzino degli innesti lunghi non concorre più alla determinazione della regione ammissibile ed è quindi detto **ridondante** (vedi Figura 18).

Riassumendo il rapporto di sensitività di Excel ci dice che:

- quando il termine noto sugli innesti lunghi è 1280 il prezzo ombra è costante ed uguale a 4 finché gli innesti lunghi non vengono aumentati di 40 o diminuiti di 180. Quindi per un valore di innesti lunghi compreso tra 1100 e 1320 la variazione di profitto ottimo è di 4€/innesto lungo;
- quando il termine noto è 1320 il prezzo ombra rimane 4 ma il decremento ammissibile è zero, cioè una variazione del termine noto porta ad una variazione del profitto ottimale di 4€/innesto lungo solo nel caso di decremento, mentre non si ha variazione nel caso di ulteriori aumenti del termine noto;
- quando il termine noto è 1380 il vincolo è ridondante e qualsiasi aumento non provoca variazione nel profitto ottimo; una diminuzione minore o uguale a 50 ci ricondurrebbe ai due casi precedenti.

I difetti del Rapporto di Sensibilità sono invece i seguenti:

- da informazioni sulla sensitività per perturbazioni di parametri solo nelle immediate vicinanze della soluzione, e solo cambiando un parametro alla volta;
- restituisce solo la sensitività degli effetti che le variazioni apportano al valore ottimo;
- non da informazioni sulla sensitività derivata da cambiamenti dei coefficienti “tecnici”, ovvero quelli che vanno a moltiplicare le variabili di decisione nelle disequazioni di vincolo.

6. BIBLIOGRAFIA

Microsoft Corporation (2002) *Guida in linea di Microsoft Excel*, Microsoft Excel 2002

Microsoft Corporation (2003) *Introduzione all'ottimizzazione con il Risolitore di Excel*,
Microsoft Office Online

(<http://office.microsoft.com/it-it/assistance/HA011245951040.aspx>)

Microsoft Corporation (2003) *Determinare il mix di prodotti ottimale con il Risolitore*,
Microsoft Office Online

(<http://office.microsoft.com/it-it/assistance/HA011245961040.aspx>)

Moore J.H., Weatherford L.R. (2001) *Decision Modeling with Microsoft Excel*, Pearson
Education

INDICE

1. Introduzione.....	1
2. Assegnazione dei vincoli.....	3
3. La funzione obiettivo.....	5
4. Panoramica sul risolutore.....	7
4.1. Creazione di un foglio di lavoro.....	10
4.2. Ottimizzazione del modello.....	11
5. Analisi di sensitività.....	22
5.1. Variazione dei coefficienti della funzione obiettivo	23
5.2. Variazione dei termini noti.....	25
6. Bibliografia.....	31