

# ***CALCOLO COMBINATORIO***

## ***Principio fondamentale del calcolo combinatorio***

**Se un evento  $E_1$  si può presentare in  $n_1$  modi e un secondo evento  $E_2$  si può manifestare in  $n_2$  modi, allora l'evento composto  $E_1 \wedge E_2$  si può presentare in  $n_1 \cdot n_2$  modi.**

# *CALCOLO COMBINATORIO*

- | ORDINE/<br>RIPETIZIONE | ORDINE<br>si                                | ORDINE<br>no                                |
|------------------------|---|---|
| RIPETIZIONE<br>No      | <b>DISPOSIZIONI<br/>SEMPLICI</b>            | <b>COMBINAZIONI<br/>SEMPLICI</b>            |
| RIPETIZIONE<br>si      | <b>DISPOSIZIONI<br/>CON<br/>RIPETIZIONI</b> | <b>COMBINAZIONI<br/>CON<br/>RIPETIZIONI</b> |

# ***CALCOLO COMBINATORIO***



$$D_{n,k} = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - k + 1)$$

# ***CALCOLO COMBINATORIO***

- Si consideri una gara di Formula 1 alla quale partecipano 22 concorrenti. Calcolare il numero totale dei possibili podi (primo, secondo e terzo classificato).*

| 1°        | 2°        | 3°        |
|-----------|-----------|-----------|
| <b>22</b> | <b>21</b> | <b>20</b> |

$$D_{22,3} = 22 \cdot 21 \cdot 20 = 9240$$

# ***CALCOLO COMBINATORIO***

- **Le permutazioni semplici (k=n)**

$$D_{n,n} = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 1$$

- $P_n = n!$

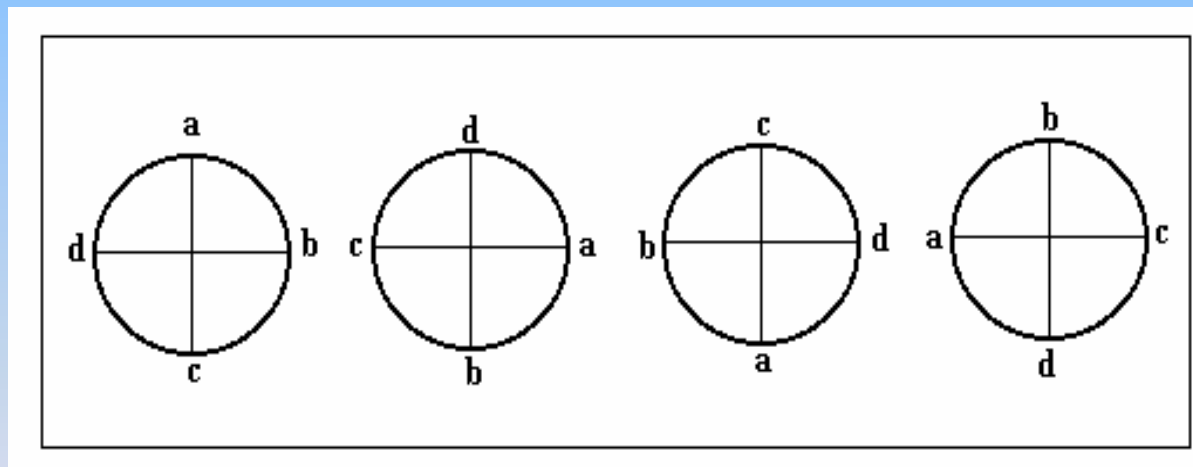
- **Si noti che:**

$$0! = 1$$

$$n! = n \cdot (n - 1)!$$

# ***CALCOLO COMBINATORIO***

- **Le permutazioni circolari**



$$R_n = P_{n-1} = (n-1)!$$

# *CALCOLO COMBINATORIO*

- **Le disposizioni con ripetizione**

|       |       |     |            |
|-------|-------|-----|------------|
| $1^a$ | $2^a$ |     | $k$ -esima |
| $n$   | $n$   | ... | $n$        |

$$D_{n,k}^r = n^k$$

# ***CALCOLO COMBINATORIO***

- **Determinare il numero delle colonne del totocalcio che possono essere giocate.**

$$D_{3,14}^r = 3^{14} = 4.782.969$$



# ***CALCOLO COMBINATORIO***

- **Le permutazioni con ripetizione**

$$k_1 + k_2 + \dots + k_r = k$$

$$k_1, k_2, \dots, k_r \geq 1$$

$$P_{k_1, k_2, \dots, k_r}^r = \frac{k!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_r!}$$

# ***CALCOLO COMBINATORIO***

- **Calcolare quante colonne del totocalcio possono essere formate imponendo che sette caselle siano occupate dal simbolo 1, sei caselle dal simbolo 2 e una casella dal simbolo X .**

$$\frac{14!}{7! \cdot 6! \cdot 1!} = 24024$$

# ***CALCOLO COMBINATORIO***

- **Le combinazioni semplici**
- Si considerino 4 lettere a,b,c,d e si costruiscano le 24 disposizioni semplici di 3 lettere:
  - *a,b,c*                      *a,b,d*                      *b,c,d*                      *c,d,a*
  - *a,c,b*                      *a,d,b*                      *b,d,c*                      *c,a,d*
  - *b,a,c*                      *b,a,d*                      *c,b,d*                      *d,c,a*
  - *b,c,a*                      *b,d,a*                      *c,d,b*                      *d,a,c*
  - *c,a,b*                      *d,a,b*                      *d,b,c*                      *a,c,d*
  - *c,b,a*                      *d,b,a*                      *d,c,b*                      *a,d,c*
- Le combinazioni semplici sono  $24:6=4$

# ***CALCOLO COMBINATORIO***

Numero combinazioni=Disposizioni:Permutazioni

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{P_k}$$

$$C_{n,k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-(k-1))}{k!}$$

$$C_{n,k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-(k-1)) \cdot (n-k) \cdot (n-(k+1)) \cdot \dots \cdot 1}{k!(n-k) \cdot (n-(k+1)) \cdot \dots \cdot 1} =$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

# *CALCOLO COMBINATORIO*

- Esempio: Calcolare il numero delle quintine che possono uscire su una ruota nel gioco del Lotto

$$C_{90,5} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{5!} = 43.949.268$$

# ***CALCOLO COMBINATORIO***

- Proprietà

- 1) 
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

- 2) 
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

# ***CALCOLO COMBINATORIO***

- Lo sviluppo della potenza  $n$ -esima del binomio  $(a + b)$

$$(a+b)^n = C_{n,0} \cdot a^n b^0 + C_{n,1} \cdot a^{n-1} b + \dots + C_{n,n} \cdot a^0 b^n =$$

$$= \sum_{k=0}^n C_{n,k} \cdot a^{n-k} b^k$$

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} b^k$$

# ***CALCOLO COMBINATORIO***

- **Es.1**

- **Calcolare il coefficiente di  $a^4 b^6$  nello sviluppo di  $(a+b)^{10}$ .**
- **$k=6$  quindi il coefficiente è  $\binom{10}{6} = 210$  che è anche il coefficiente**
- **di  $a^6 b^4$ , per la proprietà 1) del coefficiente binomiale.**

- **Es.2**

- **Calcolare il coefficiente di  $a^4 b^6$  nello sviluppo di  $(a+b)^{12}$ .**
- **ancora  $k=6$ , ma il grado del monomio non è 12 e quindi ...**



# ***CALCOLO COMBINATORIO***

- **ESERCIZIO 1**

La user\_id e la password per l'accesso ad un PC sono composte come segue:

LLNNLL

NNLNLNNL

(L= lettera dell'alfabeto italiano, N = numero, ossia cifra da 0-9 )

Calcolare quanti sono le diverse combinazioni user\_id , password che possono essere create.

- **ESERCIZIO 2**

Si distribuiscano 52 carte tra 4 giocatori.

Determinare il numero complessivo di possibili distribuzioni.

Determinare quante possibilità ha il primo giocatore di avere 4 assi nelle 13 carte.

# ***CALCOLO COMBINATORIO***

- ESERCIZIO 3

Si determini il numero di parole (anche senza significato) composte da 3 lettere che si possono formare con l'alfabeto inglese.

- ESERCIZIO 4

Determinare il numero delle sestine che possono essere giocate al *Superenalotto* con numeri solo dispari. Quante di queste contengono solo multipli di 5?

- ESERCIZIO 5

Assumiamo come misura della probabilità di un evento il rapporto tra il numero di casi favorevoli e il numero dei casi possibili.

Calcolare la probabilità di spingere (con gli occhi bendati) un tasto numerico in una tastiera di un PC che contiene 26 tasti alfabetici, 10 tasti numerici e 52 tasti di servizio.

E se vengono contemporaneamente le 5 dita di una mano che valore assume la probabilità di spingere 1 tasto numerico?

# ***CALCOLO COMBINATORIO***

- ESERCIZIO 6
- Si considerino 5 azionisti di una società per azioni, ciascuno con il 20% delle azioni. Determinare il numero totale di coalizioni che garantiscono la maggioranza nella società.
  
- ESERCIZIO 7
- In una carrozza ferroviaria ci sono 44 poltrone orientate equamente (in termini di numero) nei due possibili versi di marcia del treno. 34 passeggeri si siedono occupando prima tutti i posti orientati come il verso di marcia e poi sedendosi negli altri. Determinare il numero di sistemazioni dei passeggeri nella carrozza.
- Se i 34 passeggeri sono suddivisi in 22 donne e 12 uomini calcolare il numero complessivo di sistemazioni nell'ipotesi che le donne si seggano solo nelle poltrone orientate come il verso di marcia.
- ESERCIZIO 8
- Determinare il numero delle sigle che possono essere costruite nell'ipotesi che siano presenti 3 cifre diverse e 4 lettere (scelte dall'alfabeto italiano) diverse e che i numeri e le lettere siano comunque mescolate tra loro. Determinare il numero delle sigle che possono essere costruite imponendo che esse abbiano la struttura 2 lettere, 3 cifre, 2 lettere.
- ESERCIZIO 9
- Determinare il numero delle colonne del Totocalcio che contengono 8 pronostici uguali a 1 mentre gli altri 6 possono essere 0 o 2 (risolvere l'esercizio ipotizzando che le 8 partite per le quali si pronostica la vittoria della squadra di casa siano fissate oppure no).