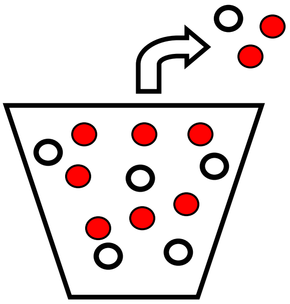
Elementi di
Calcolo delle probabilità

Corso di MATEMATICA PER L' ECONOMIA
CDL Scienze economiche

Prof. Massimiliano FERRARA
Università degli Studi "Mediterranea di Reggio Calabria

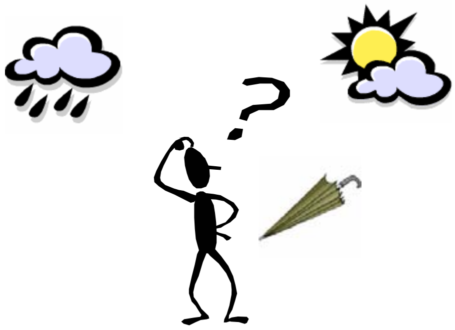
PERCHÉ SI STUDIA IL CALCOLO DELLE PROBABILITÀ?

Calcolo delle probabilità



Stato di incertezza

In cui si formano le decisioni



Esperimento casuale - prova

Un esperimento casuale è un fenomeno del mondo reale per il quale vi è più di un risultato possibile.

L'esito è incerto

- Lancio di una moneta
- Sondaggio di opinione
- Esame universitario
- Partita di calcio
- Controllo di qualità di un prodotto
- PIL
- Analisi del sangue
- etc

Evento elementare

L'evento elementare è uno dei possibili risultati dell'esperimento casuale

Spazio campione

L'insieme di tutti i possibili esiti di un esperimento definisce lo spazio campione

- Deve necessariamente verificarsi un evento elementare
- Si può verificare un solo evento elementare

Descrizione dell'esperimento

Esame universitario: { promosso, bocciato }

Partita di calcio: { vittoria, pareggio, sconfitta }

Sondaggio di opinione: { molto favorevole, favorevole, indifferente, contrario, fortemente contrario }

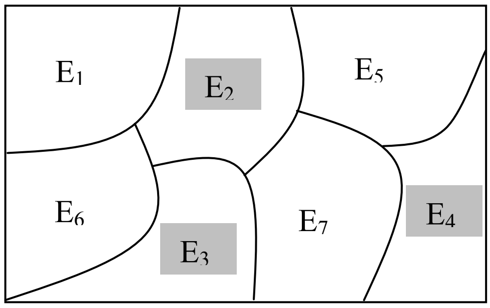
Evento

Un evento è un insieme di eventi elementari.

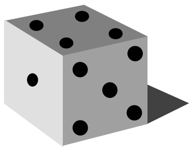
Eventi elementari: E_1, E_2,..., E_n

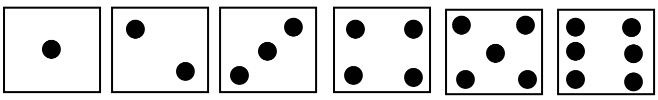
$A=\{E_2, E_3, E_4\}$

L'evento A si verifica quando l'esito dell'esperimento è uno degli eventi elementari che lo costituiscono.

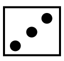


Esempio lancio di un dado

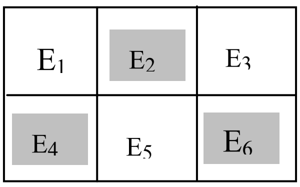




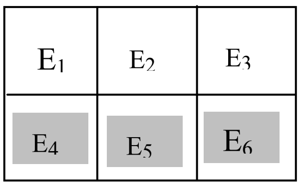
E_1 E_2 E_3 E_4 E_5 E_6

A={esce  }= E_3

$B=\{$numero di puntini pari$\}=$
$=\{E_2, E_4, E_6\}=$



$C=\{$numero di puntini $> 3\}=$
$=\{E_4, E_5, E_6\}=$



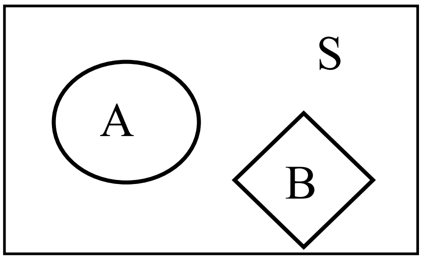
Evento impossibile

$\emptyset$, l'evento impossibile, è l'evento che non si verifica mai

Evento certo

S, l'evento certo, è l'evento che si verifica sempre

Diagrammi di Venn



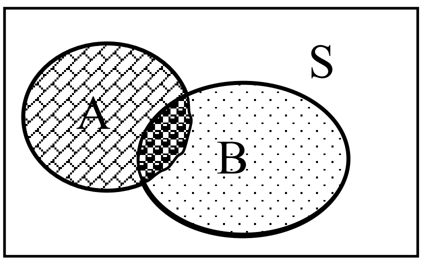
Unione di eventi

$A \cup B$

Dati due eventi A e B appartenenti ad S, l'unione $A \cup B$ è l'evento costituito da tutti gli eventi elementari che appartengono o ad A o a B o ad entrambi.

L'evento $A \cup B$ si verifica quando:

- Si verifica A ma non si verifica B
- Si verifica B ma non si verifica A
- Si verificano sia A che B



$A \cup B$

Altre operazioni sugli eventi

- Unione
- Intersezione
- Negazione

Esempio: Unione

<u>Lancio di un dado</u>

$S=\{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}$ Spazio campione

$A=\{\text{numero di puntini pari}\} = \{E_2, E_4, E_6\}$

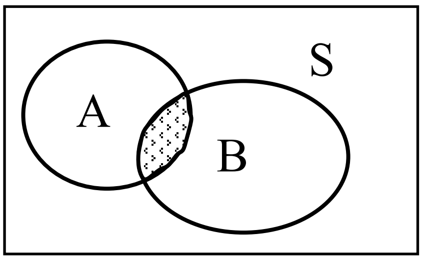
$B=\{\text{numero di puntini} > 3\} = \{E_4, E_5, E_6\}$

$A \cup B = \{E_2, E_4, E_5, E_6\}$

Intersezione di eventi

Dati due eventi A e B appartenenti ad S, l’intersezione $A \cap B$ è l’evento costituito da tutti gli eventi elementari che appartengono sia ad A che a B.

L’intersezione $A \cap B$ si verifica quando si verificano sia A che B.



$A \cap B$

Esempio: Intersezione

Lancio di un dado

$S=\{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}$

$A=\{$numero di puntini pari$\} = \{E_2, E_4, E_6\}$

$B=\{$numero di puntini $> 3\} = \{E_4, E_5, E_6\}$

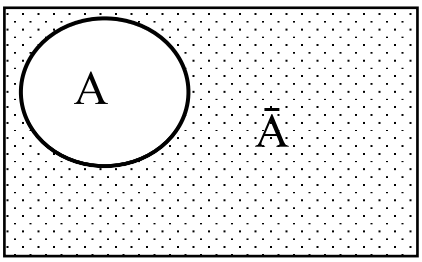
$A \cap B = \{ E_4, E_6\}$

Negazione di un evento

$\bar{A}$

Dato un evento A appartenente ad S l’insieme di tutti gli eventi elementari che appartengono ad S ma <u>non appartengono</u> ad A costituiscono la negazione di A.

La negazione di A si verifica quando A non si verifica



S

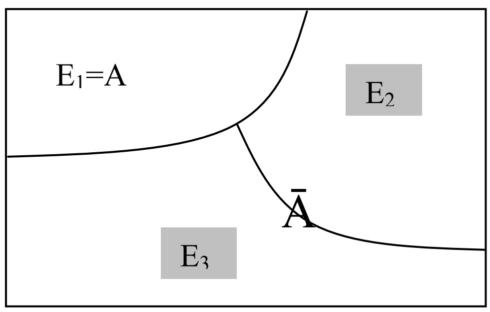
Esempio: Negazione

Partita di calcio

$S=\{E_1, E_2, E_3\}$
E_1: vittoria
E_2: pareggio
E_3: sconfitta

$A=\{$vittoria$\}= E_1$
$\bar{A}=\{$pareggio, sconfitta$\} = \{E_2, E_3\}$

S



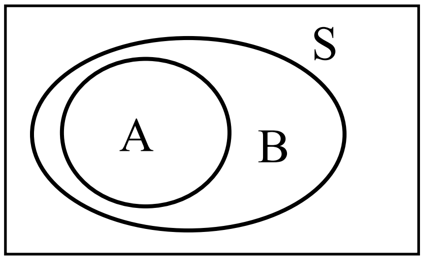
Relazioni tra eventi

- Inclusione
- Incompatibilità
- Necessarietà

Inclusione

Dati due eventi A e B appartenenti ad S, A è incluso in B se il verificarsi di A implica, necessariamente, il verificarsi di B.

$A \subseteq B$



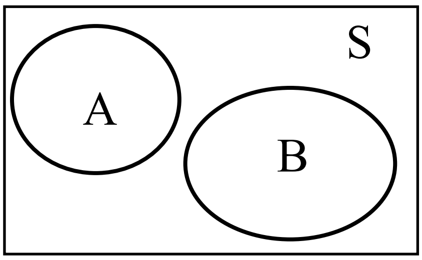
N.B.

$A \subseteq B$ e $A \supseteq B \Rightarrow A = B$

Incompatibilità

Due eventi A e B appartenenti ad S si dicono incompatibili quando non hanno eventi elementari in comune

$A \cap B = \emptyset$



N.B.

Due eventi incompatibili <u>non possono verificarsi contemporaneamente</u>.

Necessarietà

Gli eventi $A_1, A_2, \ldots, A_n$
Appartenenti ad S si dicono necessari se

$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = S$

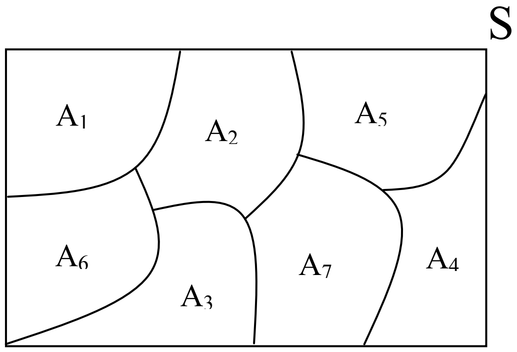
Partizione

Gli eventi

$A_1, A_2, ..., A_n$

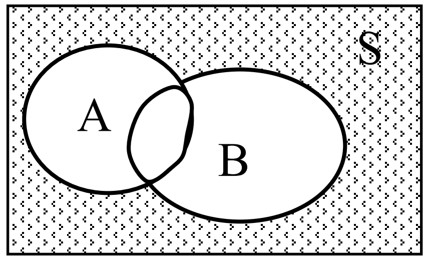
Costituiscono una partizione se

- $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = S$
- $A_i \cap A_j = \emptyset \ \forall \ i \neq j$

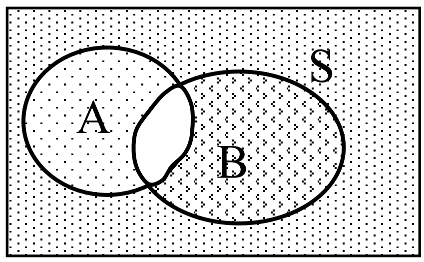


Leggi del De Morgan

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$



$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$



Probabilità

- Definizione classica
- Definizione frequentista
- Definizione soggettivista

$$\Downarrow$$

Impostazione assiomatica

Definizione classica di Probabilità

Dato un esperimento in cui
- Vi è un numero finito di risultati possibili
- Gli eventi elementari sono equiprobabili

La probabilità è definita come

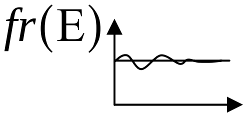
$$\frac{\#\ \text{casi favorevoli}}{\#\ \text{casi totali}}$$

Pascal (1623-1662)
Bernoulli (1713), De Moivre (1718), Laplace (1812)

Definizione frequentista di Probabilità

Dato un esperimento perfettamente ripetibile ed un evento possibile E, la probabilità di E è data dal limite della frequenza relativa con cui si verifica E al divergere del numero di ripetizioni dell’esperimento.

$$\mathrm{P}(\mathrm{E}) = \lim_{n\to\infty} fr(\mathrm{E}) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(\mathrm{E})}{n}$$



Laplace, Venn, Von Mises
(prima metà del XIX secolo)

Definizione soggettivista di Probabilità

Dato un esperimento ed un evento possibile E, la probabilità di E è il grado di fiducia che un soggetto ha nel verificarsi dell'evento E.

È la somma che un individuo è pronto a scommettere per ricevere una somma unitaria se l’evento E si verifica 0 altrimenti.

Bernoulli (1713)
Anni 20: Ramsey, De Finetti, Savage

Impostazione assiomatica

Kolmogorov 1930-40

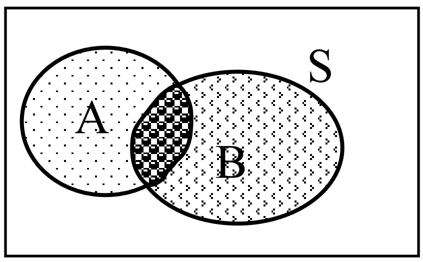
La probabilità è una funzione che soddisfa i postulati

Postulati

1. $P(\mathrm{A})\geq 0$
2. $P(\mathrm{S})=1$
3. $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}=\emptyset \Rightarrow P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=P(\mathrm{A})+P(\mathrm{B})$

Teoremi

1. $P(\bar{\mathrm{A}})=1-P(\mathrm{A})$
2. $P(\emptyset)=0$
3. $P(\mathrm{A})\leq 1$
4. $P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=P(\mathrm{A})+P(\mathrm{B})-P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$



Misura della Probabilità

$E_1, E_2, \ldots, E_n$

- $E_i \cap E_j = \varnothing$ (incompatibili)
- $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = S$ (necessarietà)
- $P(E_i)$=costante (equiprobabilità)

$A = \{E_1, E_2, \ldots, E_k\}$

$$P(A) = \frac{\#\ \text{casi favorevoli}}{\#\ \text{casi totali}}$$

$$\Downarrow$$

$$P(A) = \frac{k}{n}$$

$P(A \cap B)$

Dati due eventi A e B, dalla definizione di probabilità condizionata (dato $P(B) > 0$):

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

si ha:

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

o in alternativa (dato $P(A) > 0$) essendo:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

si ha:

$$P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A)$$

Probabilità condizionata

Dati due eventi A e B la probabilità condizionata di A dato B è:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

posto $P(B) > 0$

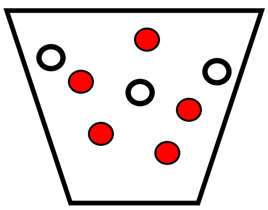
NB la probabilità condizionata soddisfa i postulati:

Infatti posto $P(C) > 0$ risulta:

1. $P(A|C) \geq 0$
2. $P(S|C) = 1$
3. $A \cap B = \varnothing \Rightarrow$
$P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C)$

e valgono quindi tutti i teoremi

Esempio: Probabilità condizionata

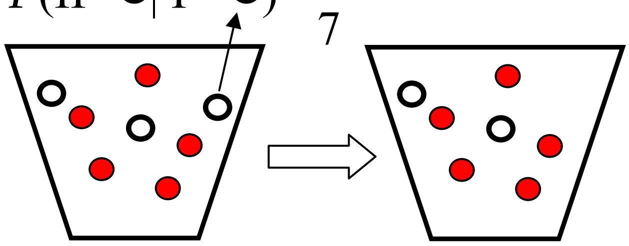


$P(○) = \frac{3}{8}$

$P(●) = \frac{5}{8}$

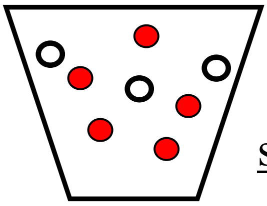
Estrazione senza rimessa:

$P(II=○|\ I=○) = \frac{2}{7}$



$P(II=●|\ I=○) = \frac{5}{7}$

Esempio: Probabilità condizionata 2



Estrazione di due palline <u>senza rimessa</u>

$$P(\circ\circ)=P(\mathrm{II}=\circ \mid \mathrm{I}=\circ)\cdot P(\mathrm{I}=\circ)=\frac{2}{7}\cdot\frac{3}{8}$$

$$P(\bullet\bullet)=P(\mathrm{II}=\bullet \mid \mathrm{I}=\bullet)\cdot P(\mathrm{I}=\bullet)=\frac{4}{7}\cdot\frac{5}{8}$$

$$P(\bullet\circ)=$$
$$=P[(\mathrm{I}=\bullet\cap\mathrm{II}=\circ)\cup(\mathrm{I}=\circ\cap\mathrm{II}=\bullet)]=$$
$$=P(\mathrm{I}=\bullet\cap\mathrm{II}=\circ)+P(\mathrm{I}=\circ\cap\mathrm{II}=\bullet)=$$
$$=\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{7}+\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}$$

Eventi indipendenti

Due eventi A e B sono indipendenti se (posto $P(\mathrm{B})>0$)

$$P(\mathrm{A}|\mathrm{B})=P(\mathrm{A})$$

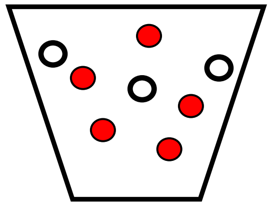
l'indipendenza è una relazione simmetrica (posti $P(\mathrm{B}),P(\mathrm{A})>0$):

$$P(\mathrm{A}|\mathrm{B})=P(\mathrm{A})\Leftrightarrow P(\mathrm{B}|\mathrm{A})=P(\mathrm{B})$$

Se (e solo se) due eventi sono indipendenti si ha:

$$P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=P(\mathrm{A})\cdot P(\mathrm{B})$$

Esempio: Probabilità condizionata 3



$$P(\circ)=\frac{3}{8}$$

$$P(\bullet)=\frac{5}{8}$$

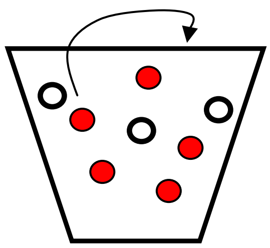
Estrazione <u>senza rimessa</u>

$$P(\mathrm{II}=\circ \mid \mathrm{I}=\circ)=\frac{2}{7}$$

$$P(\mathrm{II}=\circ \mid \mathrm{I}=\bullet)=\frac{3}{7}$$

$$P(\mathrm{II}=\circ)=$$
$$=P[(\mathrm{I}=\circ\cap\mathrm{II}=\circ)\cup(\mathrm{I}=\bullet\cap\mathrm{II}=\circ)]=$$
$$=P(\mathrm{I}=\circ\cap\mathrm{II}=\circ)+P(\mathrm{I}=\bullet\cap\mathrm{II}=\circ)=$$
$$=P(\mathrm{II}=\circ \mid \mathrm{I}=\circ)\cdot P(\mathrm{I}=\circ)+$$
$$+P(\mathrm{II}=\circ \mid \mathrm{I}=\bullet)\cdot P(\mathrm{I}=\bullet)+=$$
$$=\frac{2}{7}\cdot\frac{3}{8}+\frac{3}{7}\cdot\frac{5}{8}=\frac{21}{56}=\frac{3}{8}$$

Esempio: eventi indipendenti



Estrazione con rimessa

$$P(\circ\circ)=P(\mathrm{I}=\circ)\cdot P(\mathrm{II}=\circ)=3/8\cdot3/8$$

$$P(\bullet\bullet)=P(\mathrm{I}=\bullet)\cdot P(\mathrm{II}=\bullet)=5/8\cdot5/8$$

$$P(\bullet\circ)=$$
$$=P[(\mathrm{I}=\bullet\cap\mathrm{II}=\circ)\cup(\mathrm{I}=\circ\cap\mathrm{II}=\bullet)]=$$
$$=P(\mathrm{I}=\bullet\cap\mathrm{II}=\circ)+P(\mathrm{I}=\circ\cap\mathrm{II}=\bullet)=$$
$$=\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{8}+\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{8}$$

Teorema

Dati due eventi A e B si ha:

A e B indipendenti

$$\Downarrow$$

$\bar{\text{A}}$ e B indipendenti

A e $\bar{\text{B}}$ indipendenti

$\bar{\text{A}}$ e $\bar{\text{B}}$ indipendenti

Domanda

Eventi incompatibili (con probabilità non nulla) possono essere indipendenti? NO

Incompatibilità $\Leftrightarrow$ $P(\text{A}\cap\text{B})=\text{P}(\varnothing)=0$

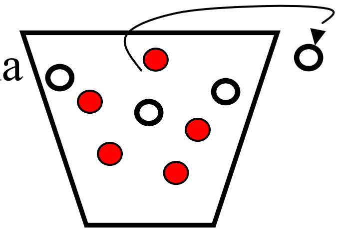
$$\Downarrow$$

$$P(\text{A}|\text{B})=\frac{P(\text{A}\cap\text{B})}{P(\text{B})}=0$$

Che può essere uguale a P(A) solo se $P(\text{A})=0$

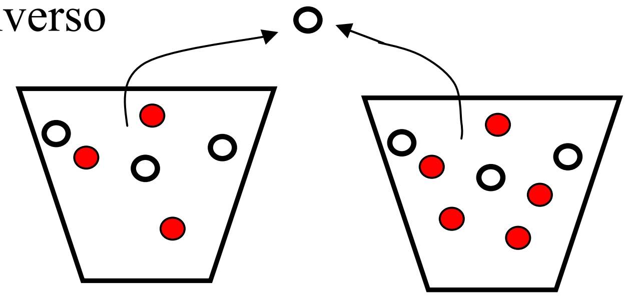
Teorema di Bayes

Problema Diretto



???

Problema inverso



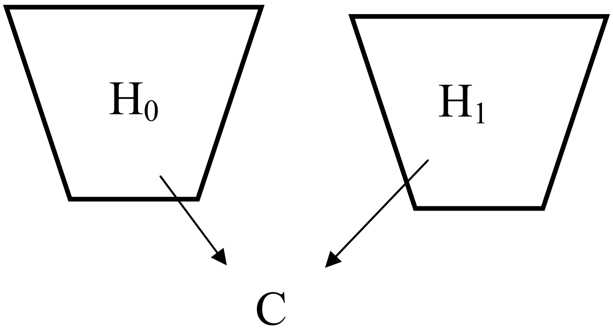
$\text{H}_0 \longleftarrow ??? \longrightarrow \text{H}_1$

$P(\text{H}_0)$ $\quad$ $P(\text{H}_1)$

$P(\circ|\text{H}_0)$ $\quad$ $P(\circ|\text{H}_1)$

$P(\text{H}_0|\circ)=?$ $\quad$ $P(\text{H}_1|\circ)=?$

Teorema di Bayes



- $\text{H}_0\cap\text{H}_1=\varnothing$ (incompatibili)
- $\text{H}_0\cup\text{H}_1=\text{S}$ (necessari)

Probabilità note:

$P(\text{H}_0)$ e $P(\text{H}_1)$ $\leftarrow$ a priori

$P(\text{C}|\text{H}_0)$ e $P(\text{C}|\text{H}_1)$ $\leftarrow$ probative

Probabilità da determinare:

$P(\text{H}_0|\text{C})$ e $P(\text{H}_1|\text{C})$ $\leftarrow$ a posteriori

Formula di Bayes

$$P(\mathrm{H}_0|\mathrm{C}) =$$

$$= \frac{P(\mathrm{H}_0)\cdot P(\mathrm{C}|\mathrm{H}_0)}{P(\mathrm{H}_0)\cdot P(C|\mathrm{H}_0) + P(\mathrm{H}_1)\cdot P(\mathrm{C}|\mathrm{H}_1)}$$

$$P(\mathrm{H}_1|\mathrm{C}) =$$

$$= \frac{P(\mathrm{H}_1)\cdot P(\mathrm{C}|\mathrm{H}_1)}{P(\mathrm{H}_0)\cdot P(\mathrm{C}|\mathrm{H}_0) + P(\mathrm{H}_1)\cdot P(\mathrm{C}|\mathrm{H}_1)}$$

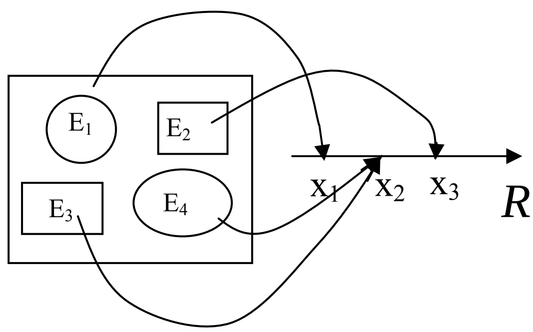
N.B.: $P(\mathrm{H}_0|\mathrm{C}) + P(\mathrm{H}_1|\mathrm{C}) = 1$

Rapporto di probabilità a posteriori

$$\frac{P(\mathrm{H}_0|\mathrm{C})}{P(\mathrm{H}_1|\mathrm{C})} = \frac{P(\mathrm{H}_0)}{P(\mathrm{H}_1)}\cdot \underbrace{\frac{P(\mathrm{C}|\mathrm{H}_0)}{P(\mathrm{C}|\mathrm{H}_1)}}_{\text{Rapporto di verosimiglianza}}$$

Variabili casuali

Una variabile casuale è una funzione definita sullo spazio campione che assume valori in *R*:

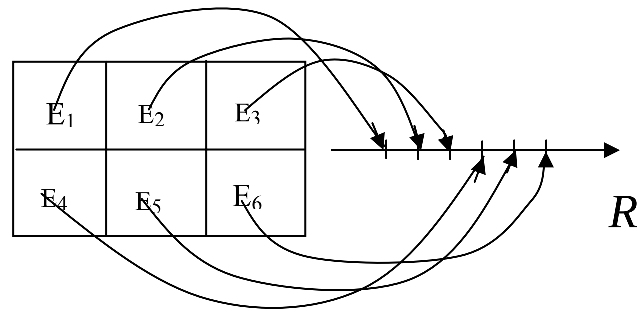


X(E): S$\rightarrow$*R*

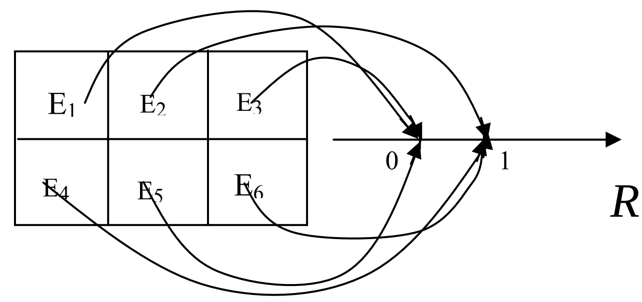
- X(E) non è necessariamente una funzione biunivoca

- Variabili casuali bivariate

Esempio: lancio di un dado



X(E)=numero di puntini



$$X(\mathrm{E}) = \begin{cases} 0: \text{ numero di puntini dispari} \\ 1: \text{ numero di puntini pari} \end{cases}$$

Tipi di variabili casuali

Discrete

Una variabile casuale X è discreta se assume valori in un insieme discreto (finito o infinito numerabile).

Es. Numero di goal, numero di incidenti, numero di promossi etc..

Continue

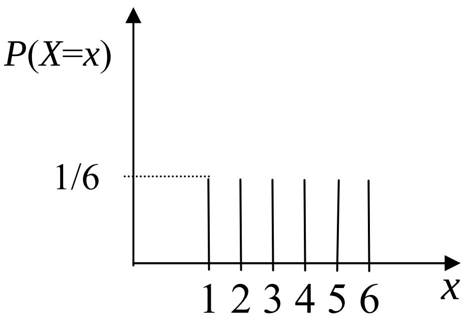
Una variabile casuale è continua se assume valori in un insieme continuo (con la potenza del continuo).

Es. Durata, peso, altezza, reddito, etc..

Es. Lancio del dado

$X=\{1,2,3,4,5,6\}$

$P(X=x)=1/6 \qquad x=1,2,3,4,5,6$



Variabili casuali discrete

X: x_1, x_2, ..., x_k.

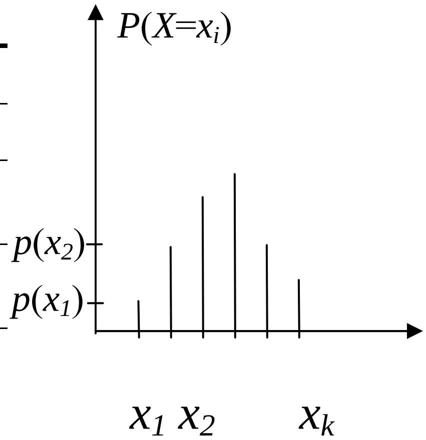
$p(x_1)$, $p(x_2)$, ..,$p(x_k)$.

$p(x_i)=P(X=x_i) \quad i=1,2,...,k$

1) $p(x_i) \geq 0 \qquad \forall\, i$

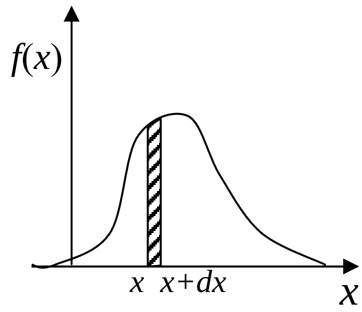
2) $\sum_{i=1}^{k} p(x_i) = 1$

X	$P(X=x_i)$
x_1	$p(x_1)$
x_2	$p(x_2)$
⋮	⋮
⋮	⋮
x_k	$p(x_k)$



Variabili casuali continue

funzione densità di probabilità



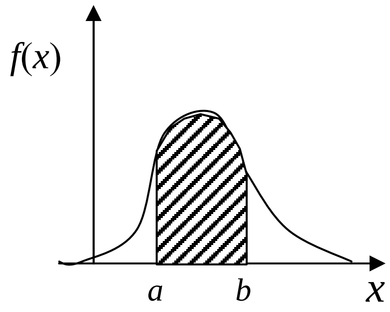
$P(x \leq X \leq x+dx)=f(x) \cdot dx$

Proprietà:

1) $f(x) \geq 0 \qquad \forall\, x$

2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot dx = 1$

Funzione densità di probabilità



$P(a \le X \le b)$=Area tratteggiata =
$= \int_a^b f(x) \cdot dx$

N.B. $P(X=x) = 0$

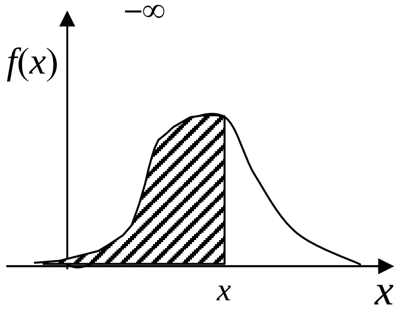
Funzione di ripartizione

$F(x) = P(X \le x)$
Variabili casuali discrete

$$F(x) = \sum_{x_i \le x} p(x_i)$$

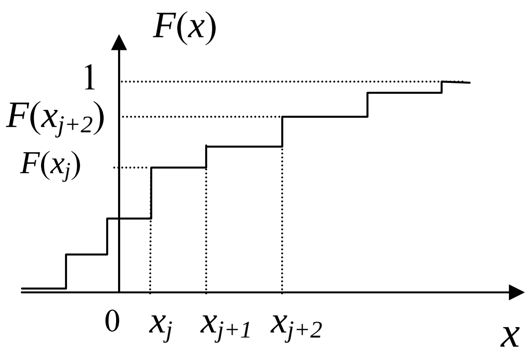
Variabili casuali continue

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u) \cdot du$$



Funzione di ripartizione

per v.c. discrete



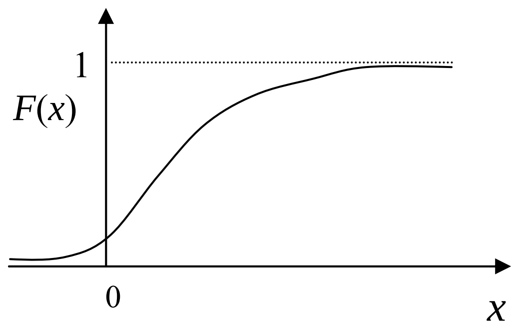
$$F(x) = \sum_{x_i \le x} p(x_i)$$

$$F(x_1) = p(x_1)$$
$$F(x_2) = p(x_1) + p(x_2)$$

$$F(x_k) = p(x_1) + p(x_2) + ... + p(x_k) = 1$$

Funzione di ripartizione

per v.c. continue



$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u) \cdot du$$

da cui: $f(x) = \dfrac{d\,F(x)}{dx}$

Proprietà
della Funzione di ripartizione

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$$

$F(x)$ è non decrescente

$F(x)$ è continua a destra

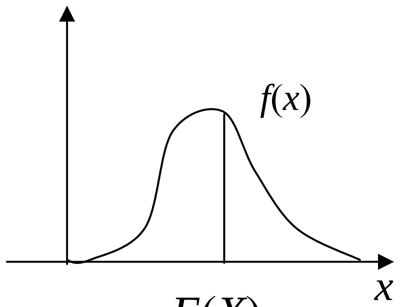
$$\left\{ \lim_{h\to 0^+} \left[F(x) - F(x-h) \right] = p(x) \right\}$$

Valore atteso di v.c.

Il valore atteso di una v.c. X si indica con E(X) ed è dato da:

$E(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot p(x_i)$
per v.c. discrete

$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) \cdot dx$
per v.c. continue



v.c. identicamente distribuite

Due v.c. X ed Y, che hanno la stessa distribuzione si dicono identicamente distribuite.

$$X \text{ e } Y \text{ i.d.} \Leftrightarrow F_X(u) = F_Y(u)$$

Come si confrontano v.c. non identicamente distribuite?

$$\Downarrow$$

Momenti

Operatore valore atteso

$$E[g(x)] = \begin{cases} \sum_{i=1}^{k} g(x_i) \cdot p(x_i) & \text{v.c.discrete} \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f(x) \cdot dx & \text{v.c.continue} \end{cases}$$

- uguale notazione per v.c. discrete e continue
- operatore lineare
  $E(a \cdot X + b) = a \cdot E(X) + b$

Momenti di una v.c.

Momento r-esimo della v.c. X:

$$\mu_r = E\left(X^r\right)$$

$$\mu_r = \begin{cases} \sum_{i=1}^{k} x_i^r \cdot p(x_i) & \text{v.c.discrete} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^r \cdot f(x) \cdot dx & \text{v.c.continue} \end{cases}$$

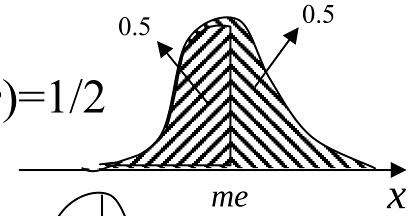
$$\mu_1 = E(X)$$

$$\mu_2 = E\left(X^2\right)$$

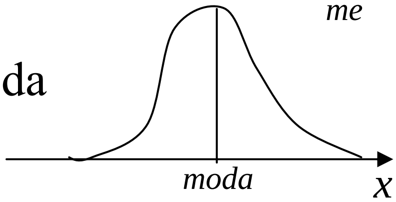
$$\vdots \qquad \vdots$$

Mediana

- me: $F(me)=1/2$



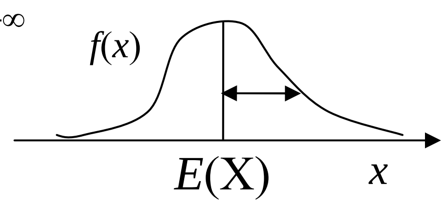
- Moda



Varianza

$$Var(X) = \bar{\mu}_2 = E\left[(X-\mu)^2\right] = \sigma^2$$

$$\sigma^2 = \begin{cases} \sum_{i=1}^{k} (x_i-\mu)^2 \cdot p(x_i) & \text{v.c.dis.} \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \cdot f(x) \cdot dx & \text{v.c.cont.} \end{cases}$$



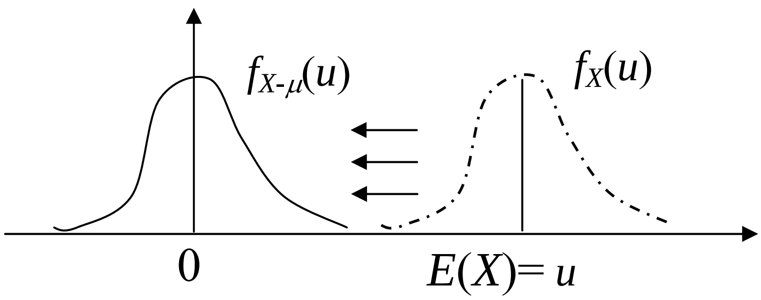
Scarto quadratico medio:

$$\sigma = \sqrt{Var(X)}$$

Momenti di una X-μ

Variabile casuale scarto $\boldsymbol{X-\mu}$

- $E(X-\mu) = E(X) - \mu = 0$



momento r-esimo di X-μ

$$\bar{\mu}_r = E\left[(X-\mu)^r\right]$$

$$\bar{\mu}_1 = E(X-\mu) = 0$$

$$\bar{\mu}_2 = E\left[(X-\mu)^2\right] = \sigma^2$$

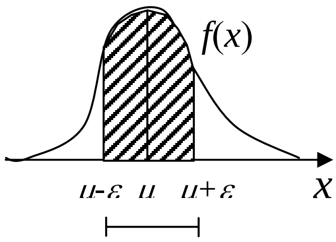
$$\bar{\mu}_3 = E\left[(X-\mu)^3\right]$$

$$\vdots$$

Proprietà della varianza

- $Var(X) = \mu_2 - \mu^2$
- $Var(a \cdot X + b) = a^2 \cdot Var(X)$
- Disuguaglianza di Chebyshev

$$P(|X-\mu| \le \varepsilon) \ge 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$



v.c. standardizzata

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

$$E(Z) = E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}\cdot E(X-\mu) =$$

$$= \frac{1}{\sigma}\cdot\left[E(X)-\mu\right] = 0$$

$$Var[Z] = E\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2\right] =$$

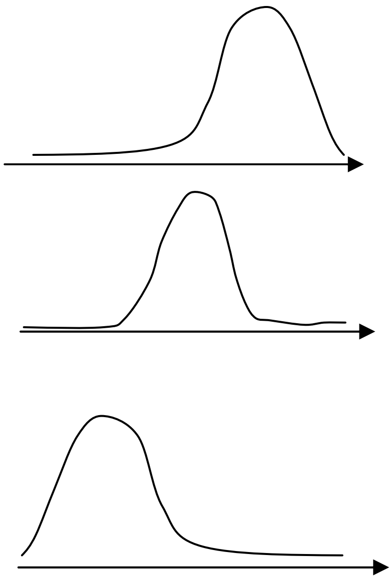
$$= \frac{1}{\sigma^2}\cdot E\left[(X-\mu)^2\right] = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1$$

Momenti della v.c. standardizzata

$$\bar{\bar{\mu}}_r = E\left(Z^r\right) = E\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^r\right]$$

- $\bar{\bar{\mu}}_1 = E(Z) = 0$
- $\bar{\bar{\mu}}_2 = E\left(Z^2\right) = Var(Z) = 1$
- $\bar{\bar{\mu}}_3 = E\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^3\right] = \beta_1$

asimmetria



$\bar{\bar{\mu}}_3 < 0$

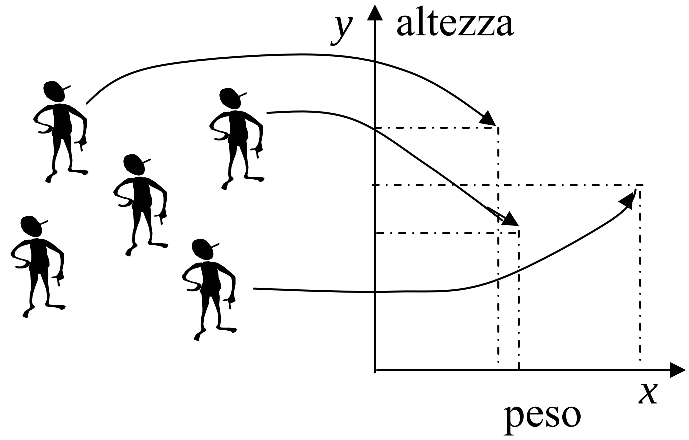
$\bar{\bar{\mu}}_3 = 0$

$\bar{\bar{\mu}}_3 > 0$

$$\gamma_2 = \bar{\bar{\mu}}_4 - 3 \rightarrow \text{curtosi}$$

v.c. doppie

Una variabile casuale doppia è una funzione (...) definita sullo spazio campione che associa ad ogni evento una coppia di valori reali (X, Y)



- Distribuzione congiunta
- Distribuzione marginale
- Distribuzione condizionata

→Discrete/continue

Distribuzioni marginali

$X \backslash Y$	$y_1\ y_2 \cdots y_h$	
x_1	$P_{11}\ P_{12} \cdots P_{1h}$	$P_{1\bullet}$
x_2	$P_{21}\ P_{22} \cdots P_{2h}$	$P_{2\bullet}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_k	$P_{k1}\ P_{k2} \cdots P_{kh}$	$P_{k\bullet}$
	$P_{\bullet 1}\ P_{\bullet 2} \cdots P_{\bullet h}$	

$$P_{ij} = P\left[(X = x_i) \cap \left(Y = y_j\right)\right]$$

$$P_{i\bullet} = P(X = x_i) =$$

$$= \sum_{j=1}^{h} P\left[(X = x_i) \cap \left(Y = y_j\right)\right] = \sum_{j=1}^{h} P_{ij}$$

v.c. doppie discrete

Distribuzioni marginali

X: x_1, x_2, .., x_k Y: y_1, y_2,..., y_h

$X \backslash Y$	$y_1\ y_2 \cdots y_h$	
x_1	$P_{11}\ P_{12} \cdots P_{1h}$	$P_{1\bullet}$
x_2	$P_{21}\ P_{22} \cdots P_{2h}$	$P_{2\bullet}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_k	$P_{k1}\ P_{k2} \cdots P_{kh}$	$P_{k\bullet}$
	$P_{\bullet 1}\ P_{\bullet 2} \cdots P_{\bullet h}$	

$$P_{ij} = P\left[(X = x_i) \cap \left(Y = y_j\right)\right]$$

1) $P_{ij} \geq 0$

2) $\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{h} P_{ij} = 1$

Distribuzioni condizionate

$$P\left(X = x_i \middle| Y = y_j\right) =$$

$$= \frac{P\left[(X = x_i) \cap \left(Y = y_j\right)\right]}{P\left(Y = y_j\right)} = \frac{P_{ij}}{P_{\bullet j}}$$

$$P\left(Y = y_j \middle| X = x_i\right) =$$

$$= \frac{P\left[\left(Y = y_j\right) \cap (X = x_i)\right]}{P(X = x_i)} = \frac{P_{ij}}{P_{i\bullet}}$$

Indipendenza stocastica

$$P\left(X = x_i \middle| Y = y_j\right) = P\left(X = x_i\right) = P_{i\bullet}$$
$$P\left(Y = y_j \middle| X = x_i\right) = P\left(Y = y_j\right) = P_{\bullet j}$$

$$\Updownarrow$$

$$P\left[\left(X = x_i\right) \cap \left(Y = y_j\right)\right] =$$
$$= P\left(X = x_i\right) \cdot P\left(Y = y_j\right)$$

$$\boxed{P_{ij} = P_{i\bullet} \cdot P_{\bullet j}}$$

$\forall \quad i=1,2,\ldots, k \qquad j=1,2, \ldots,h$

Indipendenza stocastica v.c. doppie

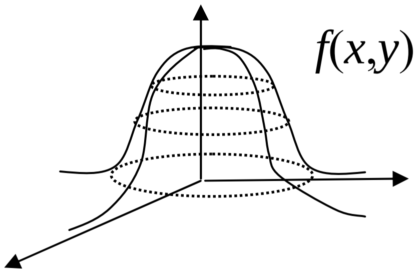
X ed Y indipendenti

$$\Updownarrow$$

$f(x,y)= f_X(x)\, f_Y(y)$

Variabili casuali doppie continue

Funzione densità di probabilità congiunta.



1) $f(x,y)\geq 0$

2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\cdot dx \cdot dy = 1$

Funzioni densità di probabilità marginali

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\cdot dy$$
$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\cdot dx$$

Momenti v.c. doppie

$\mu_{r,s}$ momento misto di ordine $r+s$

$$\mu_{r,s} = E\left(X^r \cdot Y^s\right)$$

v.c. discrete

$$\mu_{r,s} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{h} x_i^r \cdot y_j^s \cdot P_{ij}$$

v.c. continue

$$\mu_{r,s} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x^r \cdot y^s \cdot f(x,y)\cdot dx \cdot dy$$

Momenti marginali

$$\mu_{r,0} = E\left(X^r \cdot Y^0\right) = E\left(X^r\right) = \mu_{r\bullet}$$
$$\mu_{0,s} = E\left(X^0 \cdot Y^s\right) = E\left(Y^s\right) = \mu_{\bullet s}$$

Momenti in caso di indipendenza

$$\mu_{r,s} = E\left(X^r \cdot Y^s\right) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{h} x_i^r \cdot y_j^s \cdot P_{ij} =$$

$$= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{h} x_i^r \cdot y_j^s \cdot P_{i\bullet} \cdot P_{\bullet j} =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} x_i^r \cdot P_{i\bullet} \sum_{j=1}^{h} y_j^s \cdot P_{\bullet j} =$$

$$= E\left(X^r\right) \cdot E\left(Y^s\right) =$$

$$= \mu_{r\bullet} \cdot \mu_{\bullet s}$$

Valore atteso→Operatore Lineare

$$= E(a \cdot X + b \cdot Y) = a \cdot E(X) + b \cdot E(Y)$$

Dimostrazione

$$E(a \cdot X + b \cdot Y) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{h}\left(a \cdot x_i + b \cdot y_j\right) \cdot P_{ij} =$$

$$= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{h} a \cdot x_i \cdot P_{ij} + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{h} b \cdot y_j \cdot P_{ij} =$$

$$= a \cdot \sum_{i=1}^{k} x_i \sum_{j=1}^{h} P_{ij} \cdot + b \cdot \sum_{j=1}^{h} y_j \sum_{i=1}^{k} P_{ij} =$$

$$= a \cdot \sum_{i=1}^{k} x_i P_{i\bullet} \cdot + b \cdot \sum_{j=1}^{h} y_j P_{\bullet j} =$$

$$= a \cdot E(X) + b \cdot E(Y)$$

Covarianza

$$Cov(X,Y) = E\left[(X - \mu_X) \cdot (Y - \mu_Y)\right] =$$

$$= \sigma_{XY}$$

$$\boxed{\mu_{XY} = E(X \cdot Y)}$$

$$\sigma_{XY} = \mu_{XY} - \mu_X \cdot \mu_Y$$

X ed Y ind. $\Rightarrow \sigma_{XY} = 0$

$$Cov(a \cdot X + b, c \cdot Y + d) = a \cdot c \cdot \sigma_{XY}$$

Diseguaglianza di Cauchy-Schwaz:

$$\left|\sigma_{XY}\right| \le \sigma_X \cdot \sigma_Y$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \sigma_X^2 = Var(X) \\ \sigma_Y^2 = Var(Y) \end{array}}$$

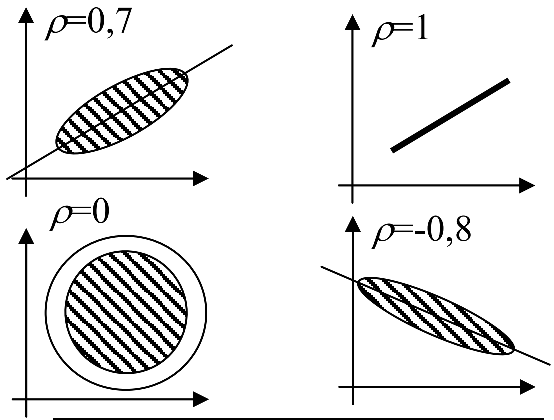
σ_{XY} rivela se esiste il segno del legame lineare

Coefficiente di correlazione

$$\rho(X,Y) = E\left[\left(\frac{X - \mu_X}{\sigma_X}\right) \cdot \left(\frac{Y - \mu_Y}{\sigma_Y}\right)\right] =$$

$$= \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$$

$\rho(X,Y)$ è un indice che misura l'intensità del legame lineare



È un indice di prevedibilità

Proprietà $\rho(X,Y)$

1) $\left|\rho(X,Y)\right| \le 1$
2) $\rho(X,Y) = \pm 1 \Rightarrow Y = a \cdot X + b$
3) $\rho(X,Y) = \rho(Y,X)$
4) $\rho(a \cdot X + b, c \cdot Y + d) = \rho(X,Y)$
5) X ed Y ind. $\Rightarrow \rho(X,Y) = 0$

Varianza di $a \cdot X + b \cdot Y$

$$Var(a \cdot X + b \cdot Y) = a^2 \cdot Var(X) + b^2 \cdot Var(Y) + 2 \cdot a \cdot b \cdot Cov(X,Y)$$

X ed Y ind

$\Downarrow$

$$Var(a \cdot X + b \cdot Y) = a^2 \cdot Var(X) + b^2 \cdot Var(Y)$$

Combinazioni lineari

$a \cdot X + b \cdot Y$

$$E(a \cdot X + b \cdot Y) = a \cdot \mu_X + b \cdot \mu_Y$$

$$Var(a \cdot X + b \cdot Y) = a^2 \cdot \sigma_X^2 + b^2 \cdot \sigma_Y^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot \sigma_{XY}$$

$X+Y$

$$E(X+Y) = \mu_X + \mu_Y$$

$$Var(X+Y) = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2 \cdot \sigma_{XY}$$

$X-Y$

$$E(X-Y) = \mu_X - \mu_Y$$

$$Var(X-Y) = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 - 2 \cdot \sigma_{XY}$$

Combinazioni lineari

$W = a_1 \cdot X_1 + a_2 \cdot X_2 + \ldots + a_n X_n$

$$E(W) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \mu_{X_i}$$

$$\boxed{\mu_{X_i} = E(X_i)}$$

$$Var(W) = Var\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sigma_{X_i}^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \neq i} a_i \cdot a_j \cdot \sigma_{X_i X_j}$$

$$\boxed{\sigma_{X_i}^2 = Var(X_i)}$$

$$\boxed{\sigma_{X_i X_j} = Cov(X_i, X_j)}$$

Se le X_i sono indipendenti

$$Var(W) = Var\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sigma_{X_i}^2$$

Variabile casuale Normale

$$X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$$

$$f\left(x; \mu, \sigma^2\right) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$-\infty < X < +\infty$$

$$\mu = E(X), \quad -\infty < \mu < +\infty$$

$$\sigma^2 = Var(X), \quad 0 < \sigma^2 < +\infty$$

Simmetrica $\quad \overline{\overline{\mu}}_3 = 0$

Unimodale

μ=mediana
μ=moda

$$\overline{\overline{\mu}}_4 = 3 \Rightarrow \text{curtosi} \quad \overline{\overline{\mu}}_4 - 3 = 0$$

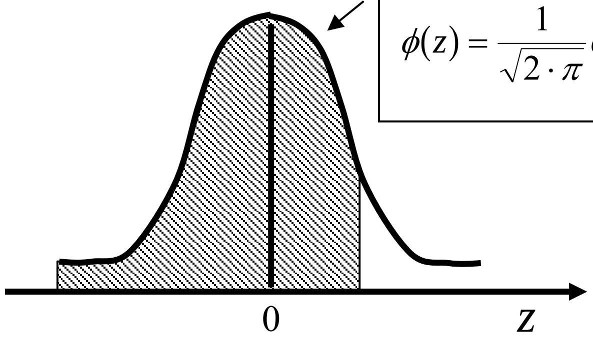
v.c. Normale Standard

$$Z \sim N(0,1)$$

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

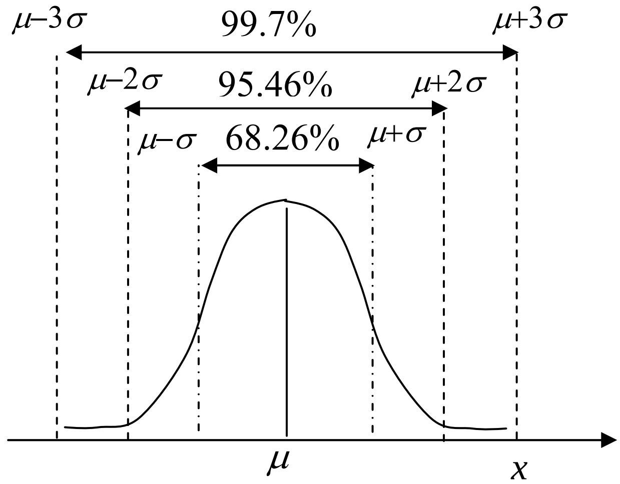
$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \phi(x) \cdot dx$$

$\Phi(z) = P(Z \le z) \Rightarrow$ **Tavole**



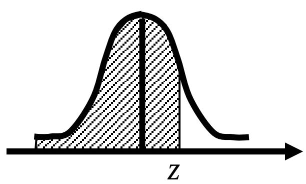
$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

v.c. Normale

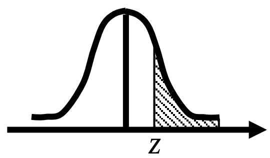


Aree *Z~N(0,1)*

$$P(Z \le z) = \Phi(z)$$

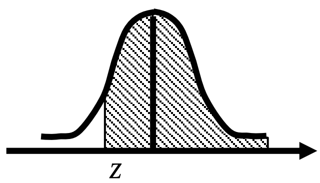


$$P(Z > z) = 1 - \Phi(z)$$



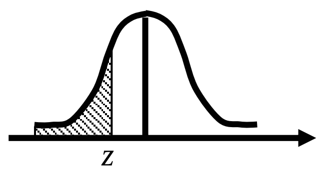
$$P(Z > z) = \Phi(|z|)$$

Z<0

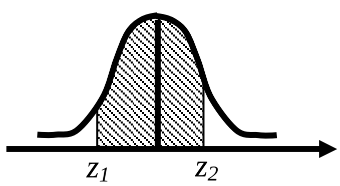


$$P(Z \le z) = 1 - \Phi(|z|)$$

Z<0



$$P(z_1 < Z \le z_2) = \\ = \Phi(z_2) - \Phi(z_1)$$



Teorema

Sia $X \sim N\left(\mu_X, \sigma_X^2\right)$

una v.c. *Y* trasformazione lineare di *X*:

$$Y = a \cdot X + b$$

è ancora una v.c. Normale di parametri

$\mu_Y = a \cdot \mu_X + b; \quad \sigma_Y^2 = a^2 \cdot \sigma_X^2$

$Y \sim N\left(a \cdot \mu_X + b, a^2 \cdot \sigma_X^2\right)$

Nota

$$\frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{1}{\sigma} X - \frac{\mu}{\sigma}$$

$$X \sim N\left(\mu_X, \sigma_X^2\right)$$

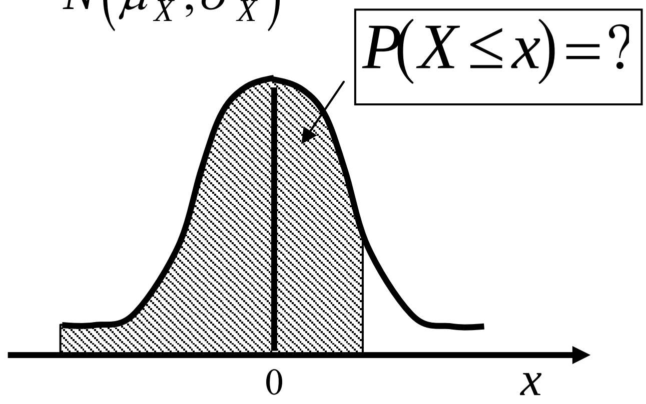
$$\Downarrow$$

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N\left(\frac{\mu_X}{\sigma} - \frac{\mu_X}{\sigma}, \frac{\sigma_X^2}{\sigma_X^2}\right) =$$

$$= N(0,1)$$

Uso tavole

$X \sim N\left(\mu_X, \sigma_X^2\right)$



$$P(X \le x) = P(X - \mu \le x - \mu) =$$

$$= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right) ==$$

$$= \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Proprietà riproduttiva della Normale

$\Rightarrow X \sim N\left(\mu_X, \sigma_X^2\right)$

$\Rightarrow Y \sim N\left(\mu_Y, \sigma_Y^2\right)$

X ed *Y* indipendenti

$W = a \cdot X + b \cdot Y$

$\Rightarrow W \sim N\left(\mu_W, \sigma_W^2\right)$

$\mu_W = a \cdot \mu_X + b \cdot \mu_Y$

$\sigma_W^2 = a^2 \cdot \sigma_X^2 + b^2 \cdot \sigma_Y^2$

Esempio: Proprietà riproduttiva

$\Rightarrow X \sim N\left(\mu_X, \sigma_X^2\right)$

$\Rightarrow Y \sim N\left(\mu_Y, \sigma_Y^2\right)$

X ed *Y* indipendenti

$$X + Y \sim N\left(\mu_X + \mu_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2\right)$$

Generalizzazione

Date le v.c. $X_1, X_2, \cdots, X_n$ dove

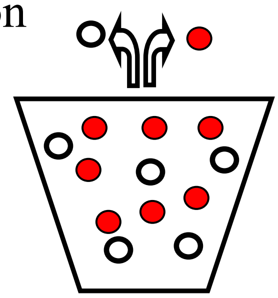
$X_i \sim N\left(\mu, \sigma^2\right) \quad \forall i$

se tali v.c. sono indipendenti

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(n \cdot \mu_X, n \cdot \sigma_X^2\right)$$

v.c. Indicatore/Bernulliana

Esperimento con risultato dicotomico



$$X = I(\mathrm{S}) = \begin{cases} 1 \leftrightarrow \mathrm{S} \\ 0 \leftrightarrow \mathrm{I} \end{cases}$$

$X \sim B(1,p)$ $\boxed{\text{v.c. Bernoulliana}}$

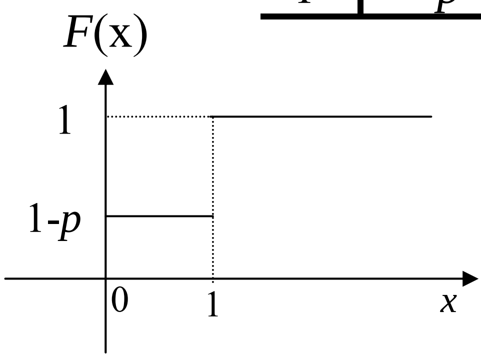
X	$P(X)$
0	1-p=q
1	p

p=P(S)
q=P(I)

v.c. Indicatore/Bernulliana

$X \sim B(1,p)$

X	$P(X)$
0	1-p=q
1	p



$$\mu = E(X) = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p$$

$$E\left(X^2\right) = 0^2 \cdot (1-p) + 1^2 \cdot p = p$$

$$Var(X) = E\left(X^2\right) - \left[E(X)\right]^2 =$$

$$= p - p^2 = p \cdot (1-p)$$

v.c. Binomiale

1) n prove indipendenti
2) risultato dicotomico
3) probabilità p costante

X: numero di successi (in n prove)

$X \sim B(n,p)$

$$\overbrace{SSSSS}^{x} \qquad \overbrace{IIIIIII}^{n-x}$$

$$p^x \qquad (1-p)^{n-x}$$

$$P(X=x) = \binom{n}{x} p^x \cdot (1-p)^{n-x}$$

v.c. Binomiale *B*(*n*,*p*)

X=0,1,....,n

$$P(X=x) = \binom{n}{x} p^x \cdot (1-p)^{n-x}$$

$Y_1, Y_2, \ldots\ldots, Y_n$ indipendenti

$Y_i = B(1,p)$ $\qquad X = \sum_{i=1}^{n} Y_i$

$$E(X) = E(Y_1 + Y_2 + \ldots\ldots + Y_n) =$$

$$= E(Y_1) + E(Y_2) + \ldots + E(Y_n) = n \cdot p$$

$$Var(X) = Var(Y_1 + Y_2 + \ldots\ldots + Y_n) =$$

$$= Var(Y_1) + \ldots + Var(Y_n) =$$

$$= n \cdot p \cdot (1-p)$$

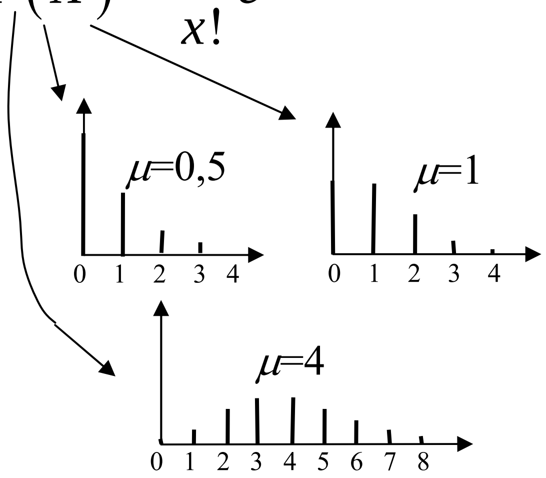
v.c. Poisson

$X \sim \mathrm{P}(\mu)$

X=0,1,2,3...

X intero $0 \le X < +\infty$

$$P(X) = \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu}$$

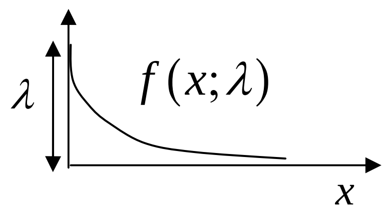


$$E(X) = Var(X) = \mu$$

v.c. Esponenziale Negativa

$X \sim Exp(\lambda)$

- $X \ge 0$
- $f(x;\lambda) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} \quad \lambda > 0$



- $F(x) = 1 - e^{-\lambda \cdot x}$
- $E(x) = \dfrac{1}{\lambda}$

$\Rightarrow Var(x) = \dfrac{1}{\lambda^2}$

Processo di Poisson

Processo di conteggio

- Le v.c. che contano il numero di eventi in intervalli disgiunti sono indipendenti

- La probabilità che si verifichi un evento in un intervallo piccolo è proporzionale all'ampiezza dell'intervallo
- La probabilità che si verifichi più di un evento in un intervallo piccolo è trascurabile

$X \rightarrow$numero di eventi in $(0,t)$

$X \sim P(\mu)$ con $\mu=\lambda \cdot t$

$\mu=$ numero medio di eventi in $(0,t)$

$\lambda=$ numero medio di eventi in un Δt unitario

Momenti della media

$X_1, X_2, \cdots, X_n$

Indipendenti

- $E(X_i) = \mu$
- $Var(X_i) = \sigma^2 < +\infty$

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$\Rightarrow E(\bar{X}_n) = \mu$$

$$\Rightarrow Var(\bar{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Momenti della media

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i =$$

$$= \frac{1}{n}X_1 + \frac{1}{n}X_2 + \ldots\ldots + \frac{1}{n}X_n$$

$$E\left(\overline{X}_n\right) = \frac{1}{n}E(X_1) + \ldots\ldots + \frac{1}{n}E(X_n) =$$

$$= \frac{1}{n}\mu + \ldots\ldots + \frac{1}{n}\mu = \frac{1}{n}\cdot n\cdot\mu = \mu$$

$$Var\left(\overline{X}_n\right) = \frac{1}{n^2}Var(X_1) + \ldots\ldots + \frac{1}{n^2}Var(X_n) =$$

$$= \frac{1}{n^2}\sigma^2 + \ldots\ldots + \frac{1}{n^2}\sigma^2 = \frac{1}{n^2}\cdot n\cdot\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

Teorema del limite centrale

$X_1, X_2, \cdots, X_n$

- Indipendenti
- $E(X_i) = \mu \quad \forall i$
- $Var(X_i) = \sigma^2 < +\infty \quad \forall i$

def. $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

$$\boxed{\begin{array}{l} E\left(\overline{X}_n\right) = \mu \\ Var\left(\overline{X}_n\right) = \dfrac{\sigma^2}{n} \end{array}}$$

$$Z_n = \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

$$\Downarrow$$

$$Z_n \overset{n\to\infty}{\sim} N(0,1)$$

Teorema di De Moivre Laplace

$X \sim B(n, p)$

$$\boxed{\begin{array}{l} E(X) = n\cdot p \\ Var(X) = n\cdot p\cdot(1-p) \end{array}}$$

$$Z_n = \frac{X - n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}}$$

$$\Downarrow$$

$$Z_n \overset{n\to\infty}{\sim} N(0,1)$$