Matematica Finanziaria

Lezione 3

Regime finanziario di capitalizzazione a interessi anticipati

Ponendo:

C = Capitale iniziale

M = Capitale disponibile in t (capitale finale)

I= Interesse

d = tasso di sconto della legge coniugata di attualizzazione

Si ha

$$f(t) = \frac{1}{1-dt}$$

$$M = \frac{C}{1-dt}$$

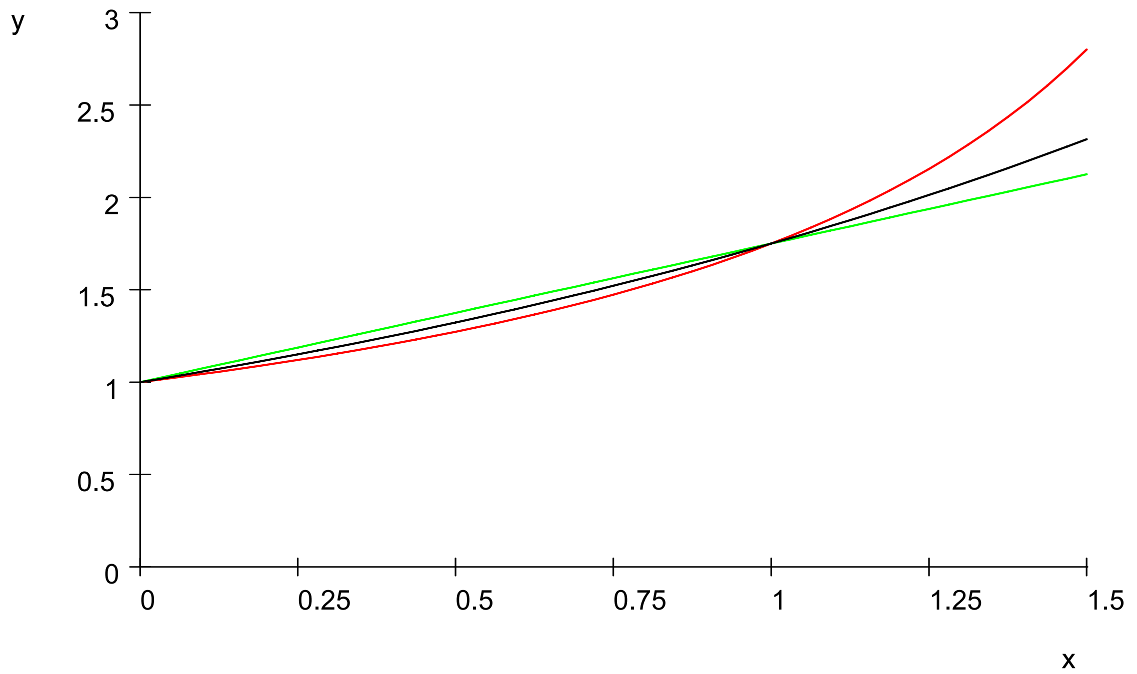
$$I = M - C = C\frac{dt}{1-dt}$$

Regime finanziario di capitalizzazione a interessi anticipati

La legge di sconto coniugata al regime ad interessi anticipati è detta “a sconto commerciale”

Confronto fra i fattori di montante nei tre regimi

Nel grafico riportiamo le curve che descrivono i fattori di montante propri dei tre regimi finanziari che abbiamo analizzato in dettaglio: **semplice**, composto, interessi anticipati.



Confronto fra i fattori di montante nei tre regimi

Le tre curve si intersecano in due soli pti di coord. risp. $(0, 1)$ e $(1, 1 + i)$. Infatti tutti i fattori di montante valgono 1 all'epoca di valutazione; inoltre, per la definizione di tasso unitario di interesse, il fattore di montante all'epoca $t = 1$ vale $1 + i$ per qualsiasi regime finanziario di capitalizzazione.

Si noti che a parità di tasso d'interesse i, per $0 < t < 1$, il montante ad interesse semplice risulta maggiore del montante a interesse composto, che a sua volta è maggiore di quello ad interesse anticipato, mentre le disuguaglianze si invertono per $t > 1$.

Forza di interesse

I regimi finanziari posso anche essere descritti analizzando in che modo si manifesta l'accrescimento del montante nel tempo, ovvero il processo di formazione dell'interesse.

Si consideri infatti l'interesse $I(t, t + \Delta t)$ prodotto dalla capitalizzazione nell'intervallo di tempo $(t, t + \Delta t)$, cioè:

$$I(t, t + \Delta t) = M(t + \Delta t) - M(t).$$

Consideriamo questa capitalizzazione, di durata Δt, "isolata" dal contesto. Il tasso d'interesse di questa sarà allora:

$$i(t, t + \Delta t) = \frac{M(t + \Delta t) - M(t)}{M(t)} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{f(t)}$$

Forza di interesse

Definiamo ***intensità d'interesse*** il rapporto

$$\frac{i(t,\,t+\Delta t)}{\Delta t}=\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}\cdot\frac{1}{f(t)}$$

Se $f(t)$ è differenziabile, calcolando il limite per $\Delta t \to 0$ dell'intensità d'interesse, si ottiene:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{i(t,t+\Delta t)}{\Delta t}=\frac{f'(t)}{f(t)}$$

Forza di interesse

Si definisce ***intensità istantanea d'interesse*** o ***forza d'interesse*** la funzione:

$$\delta(t) = \frac{f'(t)}{f(t)}$$

La forza d'interesse individua in modo univoco la legge di capitalizzazione corrispondente.

Forza di interesse nel regime a capitalizzazione semplice

Ricordando la definizione di forza di interesse, nel regime della capitalizzazione semplice si ha

$$\delta(t) = \frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{i}{1+it}$$

che risulta essere dipendente dal tempo.

Forza di interesse nel regime a capitalizzazione composta

Ricordando la definizione di forza di interesse, nel regime della capitalizzazione composta si ha

$$\delta(t) = \frac{f'(t)}{f(t)} = ln(1+i)$$

che risulta essere costante.

Forza di interesse nel regime di capitalizzazione a interessi anticipati

Ricordando la definizione di forza di interesse, nel regime della capitalizzazione a interessi anticipati si ha

$$\delta(t) = \frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{d}{1-dt}$$

che risulta essere dipendente da t.

Dalla forza di interesse al regime finanziario

Dalla definizione

$$\delta(t) = \frac{f'(t)}{f(t)}$$

integrando ambo i membri sull'intervallo [0, *t*] segue:

$$\int_0^t \delta(s)ds = \int_0^t \frac{f'(s)}{f(s)}ds$$

da cui

$$\int_0^t \delta(s)ds = [ln f(s)]_0^t =$$

$$= ln \frac{f(t)}{f(0)} = ln f(t)$$

e infine

$$f(t) = e^{\int_0^t \delta(s)ds}$$

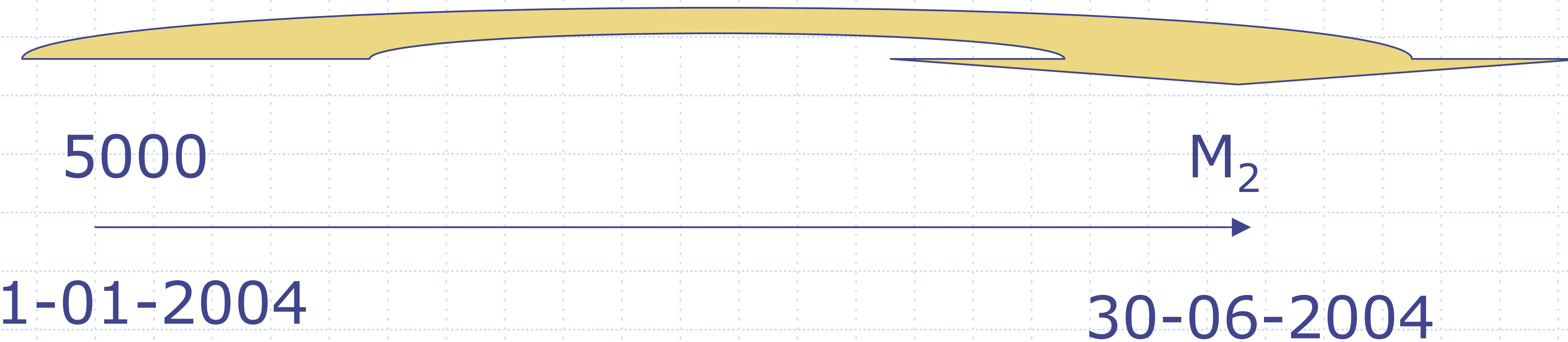
Scindibilità

Consideriamo la possibilità di interrompere anticipatamente l'operazione di investimento e immediatamente riprenderla, e valutiamo gli effetti finanziari di questa strategia, confrontandone il montante finale con quello che si potrebbe conseguire procedendo senza interruzioni.

Le alternative sono schematizzabili ad esempio nel modo seguente:

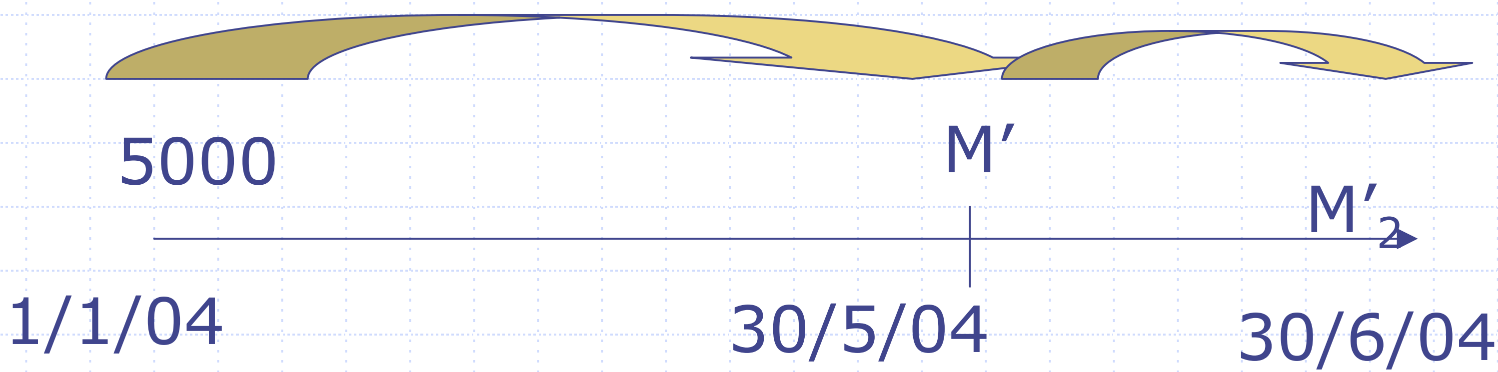
Scindibilità

Investire Euro 5000 a t_0 = 1/1/2004 e incassare M_2 al tempo t = 30/6/2004.



Scindibilità

Interrompere l’op. fin. in t_1 = 30/5/2004 e sempre in t_1 reimpiegare il montante allora disponibile fino a t = 30/6/2004



Scindibilità

A priori, non è certo che i montanti a scadenza abbiano valori uguali; le leggi finanziarie per le quali ciò accade s dicono ***scindibili.***

Una legge si dice ***scindibile*** se il montante di un capitale *C*, impiegato fino a t ad un tasso assegnato i, non varia se l'impiego viene interrotto in t_1, con $0 < t_1 <$ e il montante ottenuto in t_1 viene immediatamente reimpiegato alle stesse condizioni per il tempo rimanent $t - t_1$, ossia se $f(t)$ soddisfa la seguente relazione:

$$\mathbf{f(t) = f(t_1)\, f(t - t_1) \text{ con } 0 \leq t_1 \leq t}$$

Scindibilità

Teorema: Una legge finanziaria è scindibile se e solo se
è esponenziale.

Dimostrazione: Sia $0< t_1<t$

ond. suff. ***Da $f(t)=e^{kt}$ $(k>0)$ segue $f(t_1)\, f(t-t_1)=$ $e^{kt1}\, e^{k(t-t1)} = e^{kt} = f(t)$.***

ond nec. ***Da $f(t_1)\, f(t-t_1)=f(t)$ passando ai ogaritmi di ambo i membri, si ha:***

$n[f(t_1)\, f(t-t_1)]=\ln f(t)$ e derivando rispetto a t egue:

$D_t[\ln f(t_1) + \ln f(t-t_1)]=D_t[\ln f(t)]$

$$0+\frac{f'(t-t_1)}{f(t-t_1)}=\frac{f'(t)}{f(t)}$$

$$0+\frac{f'(t-t_1)}{f(t-t_1)}=\frac{f'(t)}{f(t)}$$

lotiamo che il rapporto a primo membro è ostante al variare di t_1, perciò si può crivere:

$$\frac{f'(t)}{f(t)}=k \quad (cost.)$$

Integrando ambo i membri:

$$\int_0^t \frac{f'(s)}{f(s)}ds=\int_0^t kds$$

Da cui, *ln f*(t)=*kt*, ossia *f*(t)=e^{kt}.

Corollario

Una legge è scindibile se e solo se la forza d’interesse ad essa associata non dipende dal tempo.

Scindibilità della capitalizzazione semplice

Sia C=5000, t=6 mesi, tasso trim. 1,5% con eventuale interruzione dopo 5 mesi

- t = 6 mesi = 2 trimestri: $M(2)$ = 5150€
- t_1=5 mesi=5/3 di trimestre: M'= 5125€; reimpiegando immediatamente questo importo, il montante in t = 2 è $M'(2) = M' [1+i(t-t_1)]$ =5150,62€

Seguendo le due modalità non si ottiene lo stesso montante: infatti, in caso di reimpiego si ottiene un montante maggiore. Pertanto la legge di capitalizzazione interesse semplice non è scindibile.

NB: dipende dal fatto che la forza di interesse dipende da t

Scindibilità della capitalizzazione composta

Sia C=5000, t=6 mesi, tasso trim. 1,5% con eventuale interruzione dopo 5 mesi:

- t =6 mesi=2 trimestri: $M(2)$ = 5151,12
- t_1=5 mesi=5/3 di trimestre M'=5125,62 reimpiegando immediatamente questo importo, il montante in t = 2 è

$$M''(2) = M' [1+i]^{1/3} = 5151,12$$

Quindi, poiché $M(2) = M''(2)$, in caso di reimpiego si ottiene lo stesso montante.

Ciò avviene perché la legge di capitalizzazione a interesse composto è scindibile.

NB: dipende dal fatto che la forza di interesse è costante

Scindibilità della capitalizzazione a interessi anticipati

Poniamo C=5000, t=6 mesi, in questo caso d=i/(1+i)=1,48% con eventuale interruzione dopo 5 mesi:

- t = 6 mesi=2 trimestri:$M(2)$ = 5.152,28
- t_1=5 mesi=5/3 di trimestre M'=5126,45 reimpiegando immediatamente questo importo, il montante in t = 2 è

$$M'(2) = M' /(1\text{-}d/3) = 5151{,}87\ €$$

Quindi, poiché $M'(2) < M(2)$, in caso di reimpiego si ottiene un montante minore: la legge di capitalizzazione a interesse anticipato non è scindibile.

NB: dipende dal fatto che la forza di interesse dipende da t