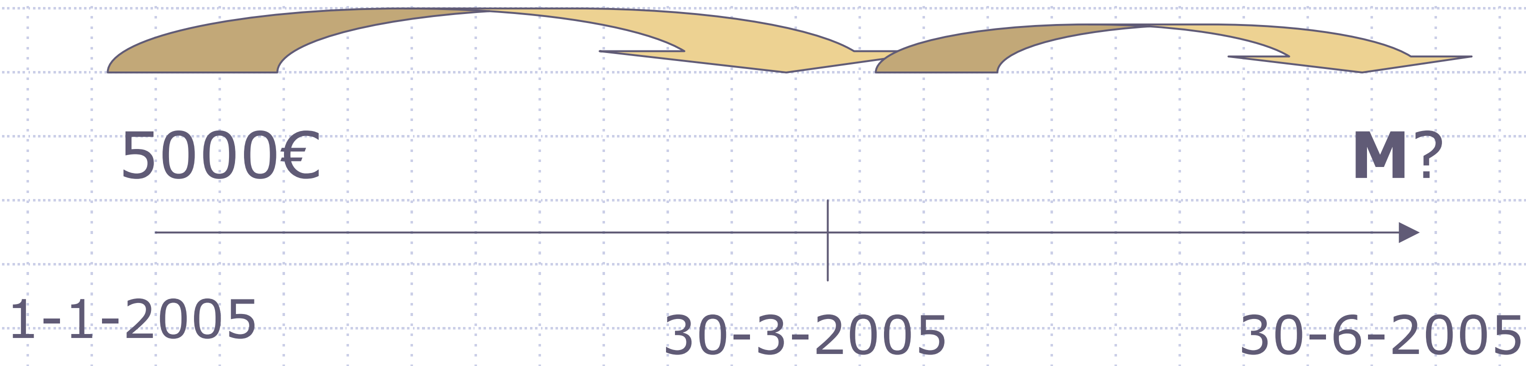
Regime finanziario della capitalizzazione composta

A differenza del regime di capitalizzazione a interesse semplice, il quale prescrive che l'interesse sia sempre direttamente proporzionale al capitale iniziale e al tempo, il *regime di capitalizzazione a interesse composto* si caratterizza per il fatto che, al termine di ogni periodo, il capitale impiegato incorpora gli interessi maturati, in modo che anche questi ultimi producano interessi nei periodi seguenti.

In altre parole, l'interesse che si forma in ogni istante è ora proporzionale al montante accumulato a quel tempo.

Esempio

Consideriamo la capitalizzazione raffigurata schematicamente nel grafico ad un tasso di interesse dell'1,5% trimestrale



Esempio

Al termine del primo periodo il montante vale

$$M(1) = C + Ci = C\,(1 + i)$$

e l'intero importo si considera investimento iniziale per il secondo periodo, cosicché risulta

$$M(2) = M(1) + iM(1) = M(1)\,(1 + i) =$$

$$= C\,(1 + i)\,(1 + i) = C(1 + i)^2$$

Nell'esempio allora

$M=5000*(1+0,015)^2=5151,12$

Regime finanziario della capitalizzazione composta

In generale, ripetendo il procedimento fino all'n-esimo periodo

$$M(n) = M(n-1) + iM(n-1) =$$

$$= M(n-1)\cdot(1+i) = C(1+i)^{n-1}(1+i) = C(1+i)^n$$

l'interesse in regime di capitalizzazione composta per un numero intero n di periodi vale

$$I(n) = M(n) - C = C(1+i)^n - C =$$

$$= C\,[(1+i)^n - 1]$$

Si noti dall'ultima espressione che l'interesse è qui ancora direttamente proporzionale al capitale iniziale ma non più direttamente proporzionale al tempo (la relazione non è lineare).

Capitalizzazione composta per tempi non interi

Nella capitalizzazione semplice il problema dei tempi non interi era facilmente risolto esprimendo il tempo come frazione di periodo. Ciò era permesso dalla linearità dell'interesse rispetto al tempo

Questo non è più possibile nella capitalizzazione composta e al riguardo si possono utilizzare due approcci differenti ("convenzioni").

Sia t la durata della capitalizzazione: indichiamo con n la sua parte intera e con f la sua parte frazionaria, in modo che risulti $t=n+f$ (ovviamente $0 \le f < 1$)

Capitalizzazione composta per tempi non interi

Convenzione lineare

Il montante al tempo $t=n+f$ non intero si ottiene aggiungendo al montante calcolato per gli n periodi interi in regime a interesse composto, l'interesse in regime semplice maturato su tale montante per la frazione di periodo residua.

Si avrà quindi

$$M(t) = C\,(1+i)^n + if\,[C\,(1+i)^n] =$$

$$\mathbf{= C\,(1+i)^n\,(1+if\,)}$$

$$\mathbf{I(t) = C\,[(1+i)^n(1+if) - 1]}$$

Capitalizzazione composta per tempi non interi

Convenzione esponenziale

Il montante al tempo $t=n+f$ non intero si calcola mediante la formula

$$M(t) = C(1+i)^t$$

ottenuta estendendo ai tempi t reali quella ricavata per tempi interi. Infatti si può anche scrivere

$$M(t) = C\,(1+i)^n(1+i)^f = C\,(1+i)^t$$

$$I(t) = C\,[(1+i)^t - 1]$$

Forza di interesse nel regime a capitalizzazione composta

Il montante in convenzione esponenziale si può anche scrivere

$$M = C(1+i)^t = Ce^{\delta t}$$

dove $\delta = \ln(1+i)$ è detto *forza di interesse*

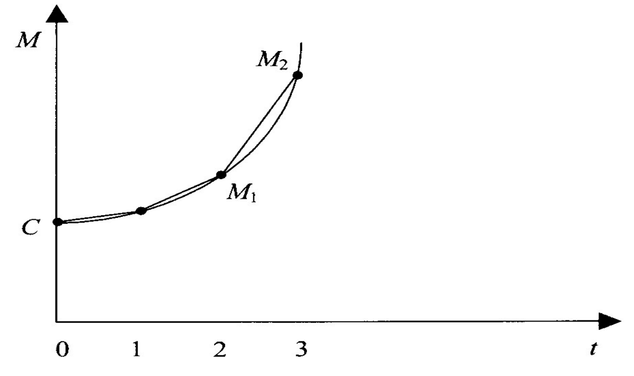
Capitalizzazione composta per tempi non interi

Nei tempi non interi, è verificata la seguente disuguaglianza:

$$C\,(1 + i)^n\,(1 + if\,) > C\,(1 + i)^n\,(1 + i)^f.$$

Perciò, a parità di tempo e di tasso, il montante calcolato mediante la convenzione lineare è superiore al montante in convenzione esponenziale per durate non intere.

Grafico di $M_1 = (1 + i)^t$ e $M_2 = (1 + i)^t (1 + if)$



Esempio

C = 5 000€; i= 1,5 % trimestrale

Data iniziale:1/1/2005;

Data finale: 31/5/2005 ;

$t = 1 + 2/3$ di periodo

Nella convenzione lineare:

$M = C(1+i)^n\,(1 + if\,)$

M = 5000€(1 + 0,015) (1 + 0,015*2/3) = 5125,75€

Nella convenzione esponenziale:

$M = C(1+i)^{n+f}$

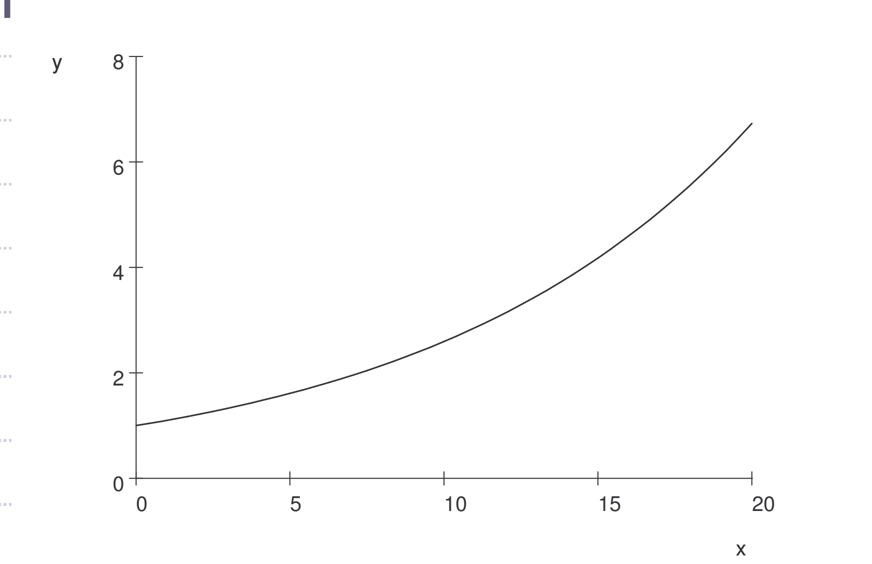
M = 5000€ $(1 + 0{,}015)^{5/3}$ = 5125,62€

Fattore di montante a interesse composto

Dalla relazione $M(t) = C\ (1 + i)^t$, ponendo $C=1$, si ottiene l'espressione del fattore di montante del regime di capitalizzazione a interesse composto

$$f(t) = (1 + i)^t$$

il cui grafico è riportato qui sotto (si tratta di una parte di curva esponenziale di intercetta 1)



Tassi equivalenti

Come si confrontano tassi riferiti a durate diverse?

Quale è la corrispondenza tra tassi di interesse in regime di capitalizzazione semplice e composta?

La risposta si trova tramite il confronto dei montanti che essi generano. Da cui la definizione:

Due tassi d'interesse si dicono *equivalenti* se producono, ad una data futura t e a parità di capitale impiegato, lo stesso montante, ovvero gli stessi interessi.

Relazione tra tassi equivalenti in regimi differenti

Per trovare la relazione matematica sussistente fra due tassi unitari i e y relativi rispettivamente al regime a interesse semplice e a quello composto, occorre uguagliare i montanti che essi producono a uno specifico tempo t:

$$M(t) = C(1+it) = C(1+y)^t$$

Noto uno dei due tassi, l'altro ad esso equivalente si può calcolare immediatamente esplicitando la relazione ora scritta.

$$i = \frac{1}{t}[(1+y)^t - 1] \qquad y = \sqrt[t]{(1+it)} - 1$$

Relazione tra tassi equivalenti in capitalizzazione semplice

Per fissare le idee sia i il tasso annuo e i_k il tasso espresso in ragione di $1/k$ di anno (per un tasso semestrale sarà $k = 2$).

Una durata di capitalizzazione pari a t anni corrisponderà a $t_k = kt$ periodi (ad es. 3 anni = 6 semestri). Uguagliando i montanti

$$M(t) = C(1 + i\,t) = C(1 + i_k\,kt)$$

da cui

$$i = k\,i_k$$

Tale relazione di equivalenza non dipende dal tempo in cui si impone l'uguaglianza dei montanti.

Relazione tra tassi equivalenti in capitalizzazione composta

Analogamente al caso precedente, e con le stesse notazioni, calcoliamo la relazione tra tassi equivalenti nel regime a interesse composto, uguagliando i montanti al tempo t

$$M(t) = C(1+i)^t = C(1+i_k)^{kt}$$

da cui

$$i = (1+i_k)^k - 1$$

e

$$i_k = \sqrt[k]{(1+i)} - 1$$

Esempio

- **Capitalizzazione semplice:** Il tasso trimestrale 1,5% (i_4) equivale al tasso mensile $i_{12} = 0,5\%$, al tasso semestrale $i_2 = 3\%$ e al tasso annuo 6%.
- **Capitalizzazione composta:** Il tasso annuo equivalente al tasso trimestrale $i_4 = 1,5\%$ è $i = (1 + 0,015)^4 - 1 = 0,06136 = 6,136\%$.

Tasso annuo nominale convertibile k volte all'anno j_k

Nella capitalizzazione composta talvolta si preferisce, per comodità, enunciare il *tasso annuo nominale convertibile k volte l'anno*, così definito:

$$j_k = k\, i_k$$

dove i_k è il tasso di periodo.

j_k è un tasso annuo fittizio, poiché è definito come se fosse equivalente a i_k nel regime a interesse semplice. Non ha, quindi, alcun significato finanziario e perciò nei calcoli occorre sempre riferirsi a i_k.

Il tasso annuo i, detto anche *tasso effettivo*, è maggiore del tasso annuo nominale convertibile j_k, ossia $i > j_k$.

Esempio

j_4 = 6% (tasso annuo nominale convertibile quattro volte l'anno) corrisponde a un tasso trimestrale

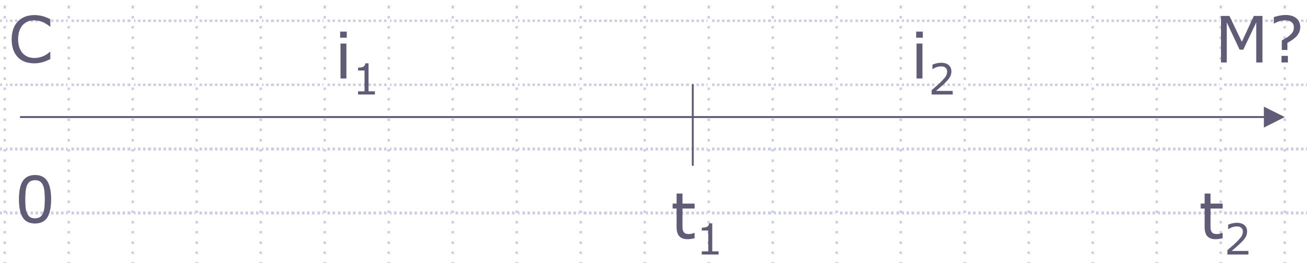
$i_4 = j_4 / 4 = 6\%/4 = 1{,}5\%$

ma il tasso annuo equivalente, come abbiamo visto nell'esempio precedente, è 6,136%.

Tassi variabili nel tempo

Nella pratica accade molto spesso che la capitalizzazione venga regolata, anziché da un unico tasso costante nel tempo, da una sequenza di tassi di interesse diversi, ciascuno applicabile a un determinato lasso temporale.

Vediamo come si possano adeguare i regimi di capitalizzazione semplice e capitalizzazione composta a questa circostanza, nel rispetto della formulazione generale di ciascun regime.



Tassi variabili nel tempo : capitalizzazione semplice

Nel primo periodo gli interessi prodotti, dovendo essere proporzionali al capitale iniziale e alla durata della prima parte di capitalizzazione, in cui è in vigore il tasso i_1, varranno

$$I_1 = C\, i_1\, t_1$$

mentre gli interessi prodotti nella seconda parte varranno

$$I_2 = \mathrm{C}\, i_2\, (t_2 - t_1)$$

Pertanto il montante in t_2, come somma di capitale e interessi maturati sarà dato da

$$M(t_2) = C\,(1 + i_1\, t_1 + i_2\,(t_2 - t_1))$$

Tassi variabili nel tempo : capitalizzazione semplice

E’ ovvia l’estensione della formula al caso in cui i valori diversi dei tassi di capitalizzazione siano più di due.

La formula ora esposta concretizza il presupposto finanziario del regime di capitalizzazione a interesse semplice, e cioè che gli interessi si rendono disponibili solo alla fine della capitalizzazione, e quindi non producono altri interessi.

Esempio

Un capitale di 5 000€ viene impiegato in capitalizzazione semplice al tasso trimestrale 1,5% per un trimestre, e successivamente per tre trimestri al tasso trimestrale 2%.

Il montante raggiunto alla fine (dopo un anno) risulta

$M(4) = 5\ 000€\ (1 + 1 \cdot 0{,}015 + 3 \cdot 0{,}02) = 5\ 375€$

Tassi variabili nel tempo : capitalizzazione composta

Al tempo t_1 sarà costituito un montante pari a

$$M(t_1)=C(1+i_1)^{t_1}$$

e poiché il regime a interesse composto prevede che l'intero montante sia fruttifero di interessi, alla fine della capitalizzazione sarà accumulato il montante

$$M(t_2)=C(1+i_1)^{t_1}(1+i_2)^{(t_2-t_1)}$$

e così via se il tasso dovesse assumere altri valori successivi.

Esempio

Un capitale di 5 000€ viene impiegato in capitalizzazione composta al tasso trimestrale 1,5% per un trimestre, e successivamente per tre trimestri al tasso trimestrale 2%.

Il montante raggiunto alla fine (dopo un anno) risulta

$M(4) = 5\,000€\,(1 + 0{,}015)(1 + 0{,}02)^3 = 5\,385€$

Tassi variabili nel tempo: capitalizzazione continua

Al tempo t_1 sarà costituito un montante pari a

$$M(t_1)=Ce^{\delta_1 t_1}$$

e

$$M(t_2)=Ce^{\delta_1 t_1}e^{\delta_2(t_2-t_1)}=Ce^{\delta_1 t_1+\delta_2(t_2-t_1)}$$

Tassi medi

Una particolare tipologia di tassi equivalenti è costituita dai *tassi medi*.

Nelle capitalizzazioni a tassi di interesse non costanti nel tempo, vi è l'esigenza di sintetizzare con un unico numero il risultato economico raggiunto.

A questo scopo risponde il *tasso medio*, che è quel tasso costante "equivalente" alla sequenza dei tassi variabili nel senso che consente di ottenere lo stesso montante.

Tassi medi: capitalizzazione semplice

Uguagliando i montanti, il tasso medio $\underline{i}$ sarà tale da soddisfare l'uguaglianza

$$M(t_2) = C\,(1 + i_1\, t_1 + i_2\,(t_2 - t_1)) = C\,(1 + \underline{i}\, t_2)$$

da cui

$$\underline{i} = i_1 \frac{t_1}{t_2} + i_2 \frac{t_2 - t_1}{t_2}$$

Si noti che il tasso medio risulta una media aritmetica dei tassi che intervengono nella capitalizzazione, ponderata con le durate di applicabilità dei tassi stessi.

Tassi medi: capitalizzazione composta

Uguagliando i montanti, il tasso medio $\underline{i}$ sarà tale da soddisfare l'uguaglianza

$$M(t_2)= C\,(1+ i_1)^{t_1}(1+ i_2)^{t_2-t_1} = C\,(1+\underline{i})^{t_2}$$

da cui

$$1+\underline{i} = \sqrt[t_2]{(1+i_1)^{t_1}(1+i_2)^{t_2-t_1}}$$

Si noti che il fattore di montante medio risulta una media geometrica dei fattori di montante che intervengono nella capitalizzazione, ponderata con le durate di applicabilità dei tassi stessi.

Tassi medi: capitalizzazione continua

Uguagliando i montanti, il tasso medio $\underline{i}$ sarà tale da soddisfare l'uguaglianza

$$M(t_2) = Ce^{\delta_1 t_1} e^{\delta_2 (t_2 - t_1)} = Ce^{\underline{\delta} t_2}$$

da cui

$$\underline{\delta} = \frac{\delta_1 t_1 + \delta(t_2 - t_1)}{t_2}$$

Si noti che la forza di interesse media risulta una media aritmetica delle forze di interesse che intervengono nella capitalizzazione, ponderata con le durate di applicabilità delle stesse.