Matematica Finanziaria

Lezione 1

Lezione 1

- Operazioni finanziarie
- Montante, interesse, sconto
- Leggi di capitalizzazione
- Tassi di interesse e tassi di sconto
- Regime di capitalizzazione a interesse semplice

Operazione finanziaria

Qualsiasi operazione che dia origine allo scambio tra somme di denaro riferite ad epoche diverse.

- *<u>Semplice</u>:* Scambio tra due importi a due epoche diverse. *Esempio*: rimborso di un prestito in un'unica scadenza
- *<u>Complessa</u>:* Scambio tra più importi a scadenze diverse. *Esempio*: rimborso graduale di un prestito

Interesse e sconto

L'operazione finanziaria semplice prevede la disponibilità di una somma C (capitale iniziale, *capitale*) all'epoca t_1 in alternativa alla disponibilità di una somma M (capitale finale, *montante*) all'epoca t_2.

In genere si parla di interesse o di sconto a seconda che la somma "nota" sia rispettivamente C o M.

Interesse

01-06-2005 $\longrightarrow$ 01-09-2005

C=5000€ M

Si impiegano 5000 euro il primo giugno 2005 per ritirare il montante M disponibile dopo 3 mesi, il primo settembre. Si rinuncia alla disponibilità immediata del capitale a fronte di un corrispettivo che si manifesta nelle disponibilità futura di un capitale maggiore: il montante.

Tale corrispettivo, il prezzo *richiesto* per posticipare la disponibilità di un capitale, si chiama ***interesse***

$$I=M-C$$

Sconto

01-06-2005 → 01-09-2005

Va C=5000

Il primo settembre 2005 si avrà la disponibilità di un capitale di 5000 €. Se ne desidera la disponibilità immediata a fronte di un corrispettivo che si manifesta nell'ottenimento di una somma, detta *valore attuale*, inferiore al capitale futuro. Tale corrispettivo, il prezzo *pagato* per anticipare la disponibilità di un capitale, si chiama ***sconto***

$$S=C-Va$$

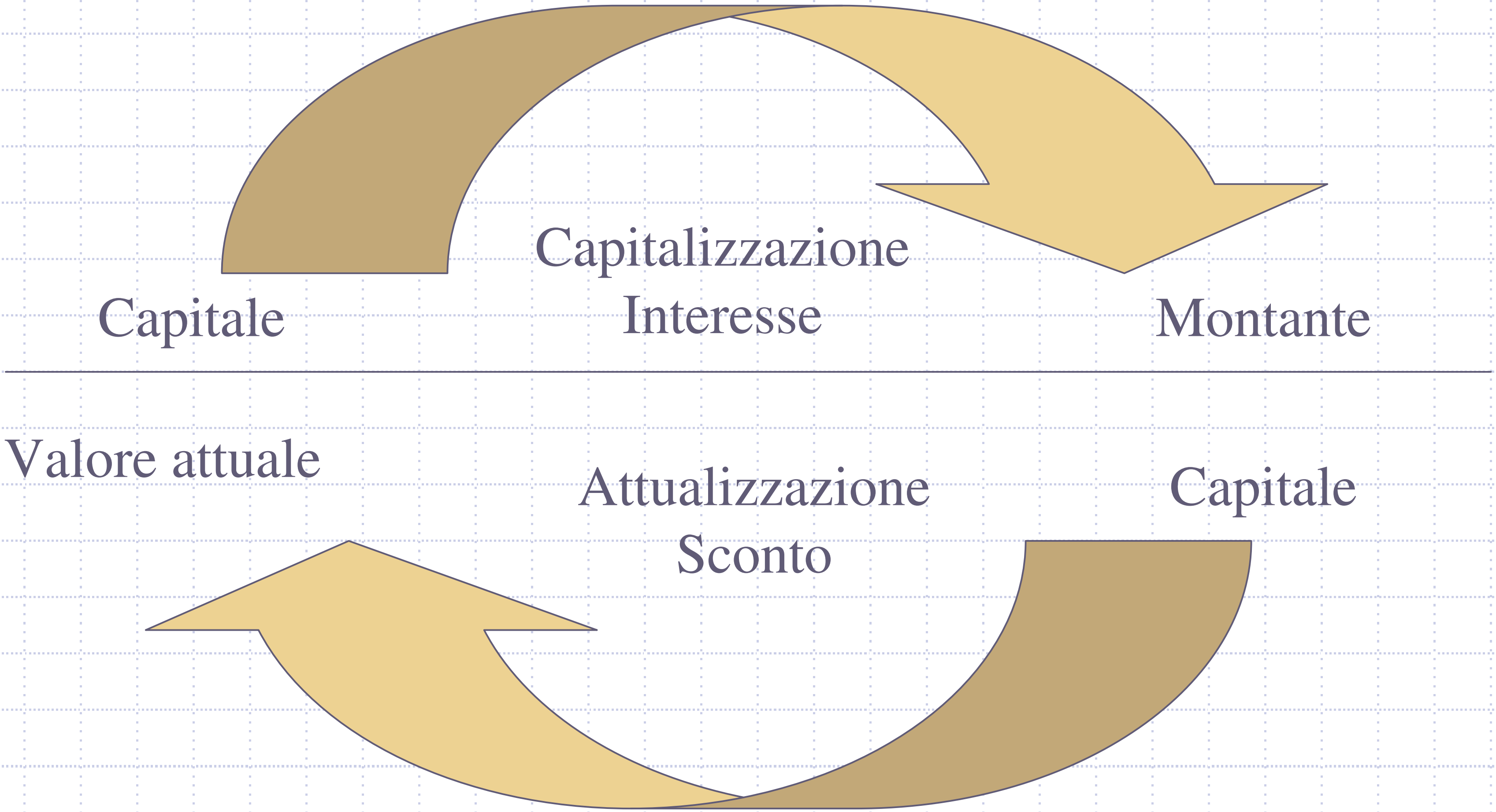
Interesse e sconto

Si noti la diversa terminologia utilizzata nello sconto rispetto all'interesse. Ciò è dovuto alla consuetudine di chiamare *capitale la somma della quale si è titolari, oggi o nel futuro*.

Convenendo invece di chiamare sempre capitale la somma che precede e montante la somma che segue nell'asse del tempo, si ha

$$I=S=M-C$$

Capitalizzazione e attualizzazione



Leggi (o regimi) finanziari

Si chiama *legge finanziaria* o *regime finanziario* una qualsiasi funzione che mette in relazione due somme disponibili a due epoche diverse.

- *Legge finanziaria di capitalizzazione:* $M=F(C,t)$, esprime il montante (somma futura) in funzione del capitale iniziale e delle durata.
- *Legge finanziaria di attualizzazione:* $Va=G(C,t)$ (che può essere scritta $C=G(M,t)$), esprime il capitale iniziale, o valore attuale, in funzione del capitale finale e della durata.

Leggi di capitalizzazione

Postulati.

- $F(C, t)$ definita per $C \geq 0$, $t \geq 0$
- $F(0,t)=0$
- $F(C,0)=C$
- $0 < C_1 \leq C_2 \quad ==> F(C_1, t) \leq F(C_2, t)$
- $t_1 \leq t_2 => F(C, t_1) \leq F(C, t_2)$
- $F(C,t) = C\,F(1, t)$

Fattore di montante

Definiamo **fattore di montante** la funzione

$$f(t) = F(1, t)$$

Il fattore di montante è qualsiasi funzione $f(t)$:

- definita per $t \in [0, T]$
- non decrescente (se derivabile, $f\,'(t) \geq 0$)
- tale che $f(0) = 1$

$$M = Cf(t)$$

Il fattore di montante esprime anche il montante al tempo t di un capitale C unitario.

Leggi di attualizzazione

Postulati.

- $G(C, t)$ definita per $C \geq 0$, $t \geq 0$
- $G(0,t)=0$
- $G(C,0)=C$
- $0 < C_1 \leq C_2 \quad ==> G(C_1, t) \leq G(C_2, t)$
- $t_1 \leq t_2 => G(C, t_1) \geq G(C, t_2)$
- $G(C,t) = C\, G(1, t)$

Fattore di sconto

Definiamo **fattore di sconto** la funzione

$$g(t) = G(1, t)$$

Il fattore di sconto è qualsiasi funzione $g(t)$:

- definita per $t \in [0, T]$
- non crescente (se derivabile, $g'(t) \leq 0$)
- tale che $g(0) = 1$

$$Va = Cg(t)$$

Il fattore di sconto esprime anche il Valore attuale di un capitale C unitario disponibile al tempo t.

Leggi finanziarie coniugate

Una legge finanziaria di capitalizzazione e una legge finanziaria di attualizzazione si dicono tra loro ***coniugate*** se, presi i rispettivi fattori di montante e di sconto, risulta

$$f(t)g(t) = 1$$

ovvero

$$g(t)=1/f(t)$$

Tasso di interesse

Indicando con $i(t)$ il tasso di interesse sul capitale iniziale per la durata t

$$i(t) = \frac{I}{C} = \frac{M}{C} - 1 = f(t) - 1$$

Se la durata è unitaria ($t = 1$)

$$i = i(1) = f(1) - 1$$

è il ***<u>tasso unitario di interesse</u>***.

Tasso di sconto

Indicando con $d(t)$ il tasso di sconto sul capitale finale per la durata t (supponiamo leggi coniugate)

$$d(t) = \frac{S}{M} = 1 - \frac{C}{M} = 1 - \frac{1}{f(t)} = 1 - g(t)$$

Se la durata è unitaria ($t = 1$)

$$d = d(1) = 1\text{-}1/f(1) = 1 - g(1)$$

è il ***<u>tasso unitario di sconto</u>***.

Tasso di interesse
e
tasso di sconto

La relazione tra d e i è la seguente:

$$d=i/(1+i)$$

oppure

$$i=d/(1-d)$$

Periodicità del tasso

A seconda del periodo di riferimento si ha:

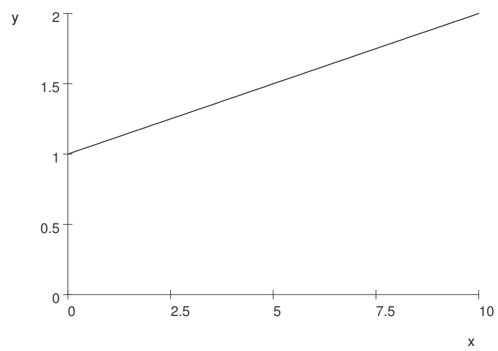
- *Tasso mensile => unità di tempo: 1 mese*
- *Tasso trimestrale* => unità di tempo: 3 mesi
- *Tasso semestrale => unità di tempo: 6 mesi*
- *Tasso annuale => unità di tempo: 1 anno*
- *Tasso biennale => unità di tempo: 2 anni*
- *….*

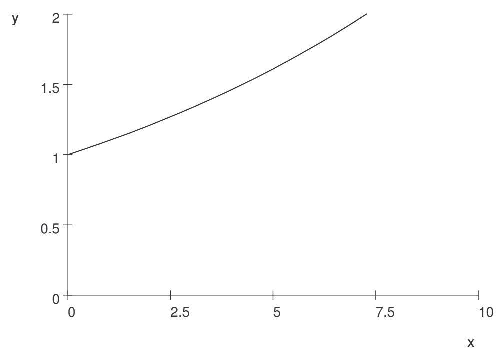
Il tasso può quindi essere riferito all'anno o ad una sua frazione o ad un suo multiplo. <u>E' fondamentale esprimere il tempo coerentemente con la periodicità del tasso</u>

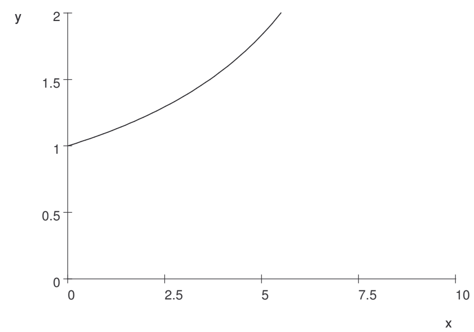
Regimi finanziari (capitalizzazione)

Le leggi finanziarie più usate nella prassi si basano su fattori di montante appartenenti a 3 diverse famiglie (dette anche ***regimi finanziari***):

- $f\,(t) = 1 + ht, \quad (h > 0)$ (funzione affine)
- $f\,(t) = e^{ht}, \quad (h > 0)$ (funzione esponenziale)
- $f\,(t) = 1/(1\text{-}ht), \quad (h > 0)$ (funzione iperbolica)



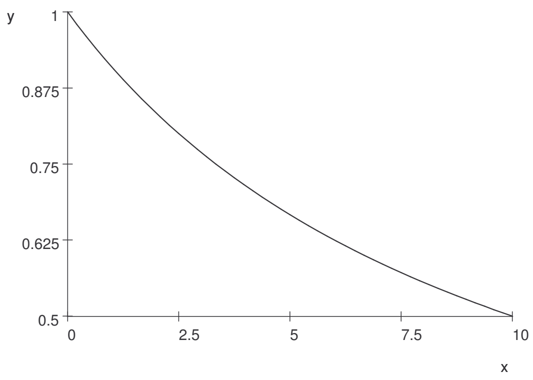


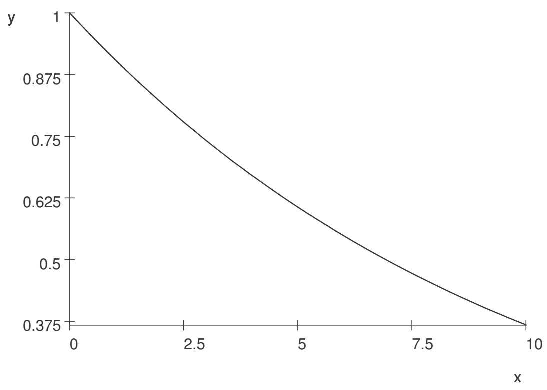


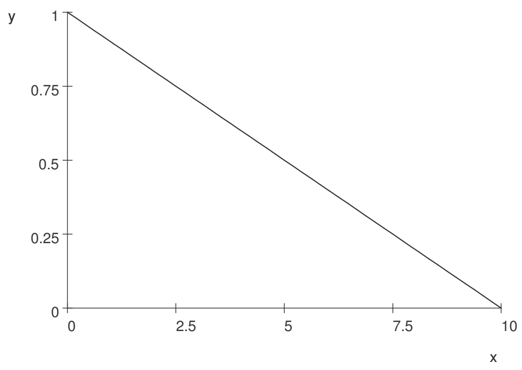
Regimi finanziari (attualizzazione)

Praticamente consistono nei fattori di sconto coniugati alle tre leggi precedenti

- $g\ (t) = 1/(1 + ht), \quad (h > 0)$
- $g(t) = e^{-ht}, \quad (h > 0)$
- $g\ (t) = 1\text{-}ht, \quad (h > 0)$







Regimi finanziari comuni:cenno storico

Per omogeneità e per convenzione sono stati presentati prima i regimi di capitalizzazione e poi i regimi di attualizzazione derivandoli dai primi come leggi coniugate.

Storicamente però solamente i primi due regimi nascono come regimi di capitalizzazione mentre l’ultimo nasce come regime di attualizzazione ed è il fattore di montante ad essere derivato dal fattore di sconto.

Nel seguito, presentando i regimi nei dettagli, si terrà presente questa particolarità, motivandone anche la logica.

Regime finanziario della capitalizzazione semplice

$$I = Ci\,t$$

$$M = C + I = C + Cit = C\,(1 + it)$$

I è proporzionale a:

C = Capitale

t = tempo

i = tasso di interesse

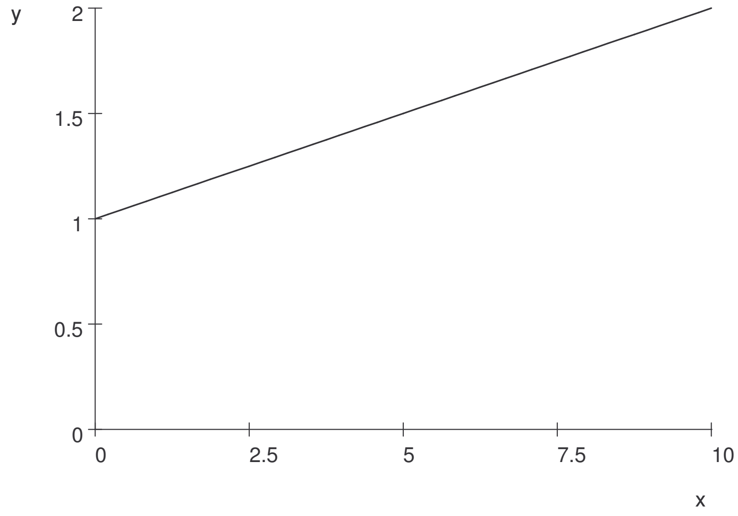
Secondo questa legge, l'interesse è proporzionale sia al capitale che al tempo, secondo un fattore di proporzionalità costituito dal tasso di interesse.

Fattore di montante a interesse semplice

$$M = C\,(1 + it), \text{ se } C = 1 \text{ allora:}$$

$$M = f(t) = 1 + it$$

Il parametro i è il coefficiente angolare della retta, e finanziariamente caratterizza la velocità di accrescimento di 1 euro impiegato.



Esempio

C = 5 000 euro

i = 1.5 % trimestrale

t_0= 0 = 1/1/2005

t = 30/6/2005

Calcolare il montante al 30/6/2005

Soluzione:

$M = C + I$

$I = Cit = 5\,000 \cdot 0.015 \cdot 2 = 150$ euro

$M = 5\,000 + 150 = 5\,150$ euro.

Esempio

C = 5 000 euro

i = 3.5 % annuo

t_0= 0 = 1/1/2005

t = 30/6/2005

Calcolare il montante al 30/6/2005

Soluzione:

$M = C + I$

$I = Cit = 5\,000 \cdot 0.035 \cdot 1/2 = 87{,}50$ euro

$M = 5\,000 + 87{,}50 = 5\,087{,}50$ euro.