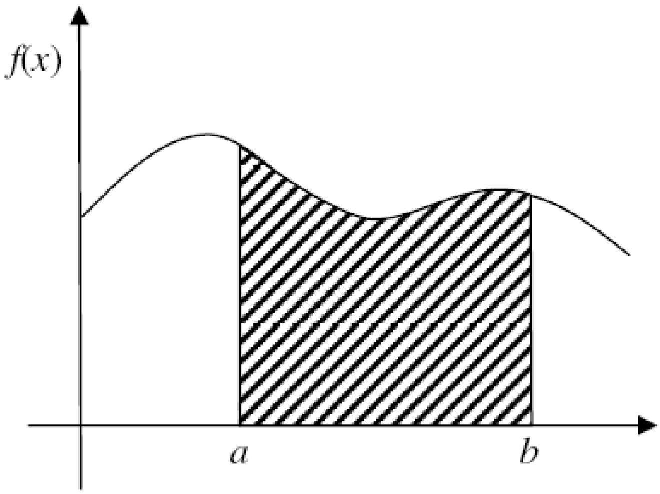
INTEGRALI IMPROPRI

Prerequisiti: Calcolo degli integrali indefiniti
Integrale definito di una funzione continua
Teorema e formula fondamentale del calcolo integrale
Applicazioni del calcolo integrale

Obiettivi : Saper riconoscere un integrale improprio
Saper distinguere integrali impropri di primo tipo, di secondo tipo e misti
Saper determinare il carattere di un integrale improprio

TEORIA in sintesi

Sia $y = f(x)$ una funzione continua nell'intervallo $[a,b]$, sappiamo che sotto tali condizioni esiste **l'integrale definito** fra a e b della funzione $f(x)$ e graficamente tale integrale rappresenta l'area della parte di piano (TRAPEZOIDE) delimitata dal grafico della funzione, dall'asse delle ascisse e dalle rette di equazione $x = a$ e $x = b$.



Nel caso in cui la funzione assegnata non sia continua nell'intervallo di integrazione, oppure almeno uno degli estremi di integrazione non sia finito si parla di **INTEGRALE IMPROPRIO**.

In sostanza **l'integrale improprio** rappresenta *l'estensione del concetto di integrale definito* per funzioni che presentino un numero finito di punti discontinuità nell'intervallo di integrazione, oppure per funzioni il cui intervallo di integrazione risulti illimitato.

Gli integrali impropri si classificano in:

1. **Integrali impropri di I tipo o specie** se almeno uno degli estremi di integrazione **non è finito**.
2. **Integrali impropri di II tipo o specie** se nell'intervallo di integrazione si ha almeno **un punto di discontinuità**.
3. **Integrali impropri** che sono contemporaneamente di **I e II tipo**.

INTEGRALI IMPROPRI DI PRIMO TIPO

Sono integrali che hanno uno o entrambi gli estremi di integrazione **non finiti** e si presentano sotto la forma:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \quad ; \quad \int_{-\infty}^{b} f(x)dx \quad ; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

Per calcolare il valore di tali integrali si integra la funzione in un intervallo finito e poi si passa al limite facendo tendere all'infinito uno o entrambi gli estremi di integrazione:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to+\infty}\int_a^{t} f(x)dx \quad ; \quad \int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{s\to-\infty}\int_s^{b} f(x)dx \quad ; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{t\to+\infty \\ s\to-\infty}}\int_s^{t} f(x)dx$$

In base al risultato che assume il limite si distinguono i seguenti casi:

1) Se il valore del limite è finito si dice che la **funzione è integrabile in senso improprio o generalizzato** nell'intervallo dato e l'integrale improprio è **convergente** . (Carattere convergente)

   Interpretazione geometrica $\Rightarrow$ Area del trapezoide FINITA

2) Se il valore del limite è infinito si dice che la **funzione non è integrabile in senso improprio o generalizzato** nell'intervallo dato e l'integrale improprio è **divergente** . (Carattere divergente)

   Interpretazione geometrica $\Rightarrow$ Area del trapezoide INFINITA

3) Se il valore del limite non esiste si dice che la **funzione non è integrabile in senso improprio o generalizzato** nell'intervallo dato e l'integrale improprio è **indeterminato**. (Carattere indeterminato)

   Interpretazione geometrica $\Rightarrow$ Nulla si può affermare sulla'area del trapezoide

Esempio 1 Si debba calcolare il seguente integrale improprio $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{t\to+\infty} \int_1^{t} \frac{dx}{x} = \lim_{t\to+\infty} \left[\log|x|\right]_1^t = \lim_{t\to+\infty} \left[\log t - \log 1\right] = \lim_{t\to+\infty} \left(\log t\right) = +\infty$$

Poiché il limite ottenuto non è finito, l'integrale improprio **diverge**.

Esempio 2 Calcolare il seguente integrale improprio $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{t\to+\infty} \int_1^{t} \frac{dx}{x^2} = \lim_{t\to+\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^t = \lim_{t\to+\infty} \left[-\frac{1}{t} + \frac{1}{1}\right] = -\frac{1}{+\infty} + 1 = 0 + 1 = 1$$

Poiché il limite esiste ed è finito, l'integrale improprio **converge**.

Esempio 3 Calcolare il seguente integrale improprio $\int_{-\infty}^{\pi} \cos x dx$

$$\int_{-\infty}^{\pi} \cos x dx = \lim_{s\to-\infty} \int_s^{\pi} \cos x dx = \lim_{s\to-\infty} \left[sen x\right]_s^{\pi} = \lim_{s\to-\infty} \left[sen \pi - sen s\right] = 0 - sen(-\infty) = -sen(-\infty)$$

Poiché per $s \to -\infty$, $sen s$ oscilla costantemente tra -1 e $+1$,

tale limite non esiste e quindi l'integrale improprio è **indeterminato**.

INTEGRALI IMPROPRI DI SECONDO TIPO

Sono integrali che presentano **almeno un punto di discontinuità** nell'intervallo di integrazione e, proprio in relazione al loro intervallo di integrazione, si presentano, in genere, nelle seguenti forme:

$$\int_a^b f(x)dx \quad \rightarrow \quad \text{con } f(x) \text{ definita in } [a;b[$$

$$\int_a^b f(x)dx \quad \rightarrow \quad \text{con } f(x) \text{ definita in }]a,b]$$

$$\int_a^b f(x)dx \quad \rightarrow \quad \text{con } f(x) \text{ definita in }]a,b[$$

$$\int_a^b f(x)dx \quad \rightarrow \quad \text{con } f(x) \text{ definita in } [a,c[\cup]c,b]$$

Per calcolare il valore di tali integrali si integra la funzione in un intervallo di completa continuità e poi si passa al limite facendo tendere a zero uno o entrambi i parametri utilizzati nei nuovi estremi di integrazione:

$$\int_a^b f(x)dx \quad \rightarrow \quad \int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx \quad \rightarrow \quad \int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta\to 0^+} \int_{a+\delta}^{b} f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx \quad \rightarrow \quad \int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+ \\ \delta\to 0^+}} \int_{a+\delta}^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx \quad \rightarrow \quad \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\delta\to 0^+} \int_{c+\delta}^{b} f(x)dx$$

In base al risultato che assume il limite si distinguono i seguenti casi:

1) Se il valore del limite è finito si dice che la **funzione è integrabile in senso improprio o generalizzato** nell'intervallo dato e l'integrale improprio ha carattere **convergente** .

   Interpretazione geometrica $\Rightarrow$ Area del trapezoide FINITA

2) Se il valore del limite è infinito si dice che la **funzione non è integrabile in senso improprio o generalizzato** nell'intervallo dato e l'integrale improprio ha carattere **divergente** .

   Interpretazione geometrica $\Rightarrow$ Area del trapezoide INFINITA

3) Se il valore del limite non esiste si dice che la **funzione non è integrabile in senso improprio o generalizzato** nell'intervallo dato e l'integrale improprio ha carattere **indeterminato**.

   Interpretazione geometrica $\Rightarrow$ Nulla si può affermare sulla'area del trapezoide

Esempio 1 Calcolare il seguente integrale improprio: $\int_1^2 \frac{1+3x}{x^2-1}\,dx$

poiché $f(x)$ ha un punto di discontinuità per $x=1$ l'integrale è improprio di secondo tipo e, mediante il metodo d'integrazione di funzioni razionali fratte, si riduce a:

$$\int_1^2 \frac{1+3x}{x^2-1}dx = \lim_{\delta\to 0^+}\int_{1+\delta}^2 \frac{1+3x}{x^2-1}dx = \lim_{\delta\to 0^+}\left[\log|x+1| + 2\log|x-1|\right]_{1+\delta}^2 =$$

$$\log 3 - \lim_{\delta\to 0^+}\left[\log|2+\delta| + 2\log|\delta|\right] = \log 3 - \log 2 - 2\cdot(-\infty) = +\infty$$

Poiché il limite ottenuto non è finito, l'integrale improprio **diverge**.

Esempio 2 Calcolare il seguente integrale improprio : $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

poiché $f(x)$ ha un punto di discontinuità per $x=2$ l'integrale è improprio di secondo tipo e, riconducendolo ad una integrazione immediata, diventa:

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^{2-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[arcsen\frac{x}{2}\right]_0^{2-\varepsilon} =$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[arcsen\frac{2-\varepsilon}{2} - arcsen 0\right] = arcsen 1 - 0 = \frac{\pi}{2}$$

Poiché il limite esiste finito, l'integrale improprio **converge**.

Esempio 2 Calcolare il seguente integrale improprio : $\int_{-2}^1 \frac{1}{x^2}\,dx$

poiché $f(x)$ nell'intervallo d'integrazione ha un punto di discontinuità per $x=0$ l'integrale è improprio di secondo tipo e diventa:

$$\int_{-2}^1 \frac{1}{x^2}dx = \int_{-2}^0 \frac{1}{x^2}dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{-2}^{0-\varepsilon} \frac{1}{x^2}dx + \lim_{\delta\to 0^+}\int_{0+\delta}^1 \frac{1}{x^2}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[-\frac{1}{x}\right]_{-2}^{0-\varepsilon} + \lim_{\delta\to 0^+}\left[-\frac{1}{x}\right]_{0+\delta}^1 =$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[-\frac{1}{0-\varepsilon} + \frac{1}{-2}\right] + \lim_{\delta\to 0^+}\left[-\frac{1}{1} + \frac{1}{0+\delta}\right] = \frac{1}{0^+} - \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Poiché il limite esiste finito, l'integrale improprio **converge**.

ESERCIZI: Quesiti a risposta multipla:

1. L'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 x^{-\frac{1}{5}}\ \mathrm{d}x$:

   (a) vale $\dfrac{4}{5}$
   (b) diverge
   (c) vale $\dfrac{5}{4}$
   (d) è negativo.

2. L'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{4+2x}{5x^3}\,dx$:

   (a) vale $-\dfrac{4}{5}$
   (b) diverge
   (c) vale $\dfrac{4}{5}$
   (d) tende a 0 .

3. L'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x}\ \mathrm{d}x$:

   (a) vale 1
   (b) vale $0 = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x}$
   (c) è indeterminato perché $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\, e^{-x}$ è una forma indeterminata
   (d) diverge.

4. L'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^2 x}$:

   (a) converge a 1
   (b) diverge perché $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x\ln^2 x} = +\infty$
   (c) converge a $0 = \displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x\ln^2 x}$
   (d) non esiste, perché la funzione $f(x) = \dfrac{1}{x\ln^2 x}$ non è definita in $x = 0$.

5. L'integrale improprio $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+4x^2}$:

(a) diverge

(b) converge a $0 = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+4x^2}$

(c) converge a $\frac{\pi}{4}$

(d) è uguale al valore del limite $\lim_{a\to+\infty} (\arctan 2a)$.

6. L'integrale improprio $\int_0^1 \log x \ \ \mathrm{d}x$:

(a) diverge perché $\lim_{x\to0^+} \log x = -\infty$

(b) converge a -1

(c) converge a 1

(d) è uguale al valore del seguente limite: $\lim_{x\to0^+} (\ln\ b - b)$.

7. L'integrale improprio $\int_0^{+\infty} e^{-x} \ \ \mathrm{d}x$:

(a) diverge

(b) converge a $0 = \lim_{x\to+\infty} e^{-x}$

(c) converge a 1

(d) è indeterminato.

<u>ESERCIZI</u>: Determina il carattere dei seguenti integrali impropri:

1. $\int_{-\infty}^{2} \frac{dx}{x-5}$ 2. $\int_{1}^{+\infty} e^{-2x} dx$ 3. $\int_{0}^{1} \log x dx$ 4. $\int_{-3}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}}$

5. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^2 x}$ 6. $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2} dx$ 7. $\int_{-2}^{0} \frac{1}{x} dx$ 8. $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)^2}$

9. $\int_{0}^{4} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ 10. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ 11. $\int_{0}^{+\infty} senx dx$ 12. $\int_{-2}^{2} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx$