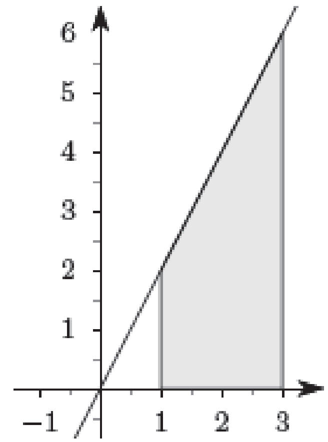
INTEGRALI PER FUNZIONI DI UNA VARIABILE

Il calcolo integrale per funzioni reali di una variabile reale si occupa di risolvere due problemi:

1. il calcolo dell'area di parti di piano qualsiasi,

2. la ricerca di funzioni che hanno una derivata assegnata.

Example 1 *Consideriamo la funzione* $f(x) = 2x$*, nell'intervallo* $[1, 3]$*. Vogliamo calcolare l'area della regione compresa tra il grafico di* f*, l'asse* x*, e le rette* $x = 1$ *e* $x = 3$.



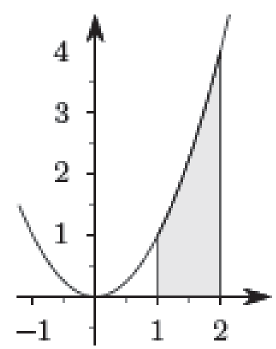
La regione evidenziata è un **trapezio rettangolo,** *la cui area è data da*

$$Area = \frac{(B+b)h}{2} = \frac{(6+2)2}{2} = 8$$

Inoltre sappiamo trovare una funzione che abbia come derivata la funzione $f(x) = 2x$, *per esempio la funzione* $g(x) = x^2$. *Il Teorema fondamentale del calcolo integrale stabilirà un legame molto stretto tra il calcolo dell'area e* *la ricerca di una funzione con derivata nota, almeno nel caso di funzioni continue. L'area della regione evidenziata si puo calcolare partendo dalla funzione g esattamente come $g(3) - g(1)$*

$$Area = 8 = 3^2 - 1^2 = g(3) - g(1)$$

Example 2 *Consideriamo la funzione $f(x) = x^2$, ristretta all'intervallo $[1, 2]$, e calcoliamo l'area della regione evidenziata (compresa tra il grafico della funzione f, l'asse delle ascisse, e le due rette verticali $x = 1$ e $x = 2$).*



La regione evidenziata non è un trapezio rettangolo, anche se è molto simile a un trapezio rettangolo, con il lato obliquo sostituito da un arco di parabola: chiameremo questa regione un **trapezoide**. *Troviamo una funzione che abbia come derivata* x^2. *Avremo* $g(x) = \frac{x^3}{3}$. *L'area si può calcolare come la differenza tra* $g(2)$ *e* $g(1)$ *ossia*

$$Area = g(2) - g(1) = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

risultato già noto ai tempi di Archimede!

Osservazione: il problema di trovare una funzione cha abbia una derivata assegnata è invece estremamente difficile, anche se è noto che esso ha, teoricamente, sempre soluzione nel caso che la funzione assegnata sia continua.

Primitive per una funzione reale di variabile reale

In base a uno dei corollari del teorema di Lagrange sappiamo che se due funzioni definite su un intervallo I hanno la stessa derivata, allora esse differiscono per una costante. Se cerchiamo, per esempio, una funzione che abbia x^2 come derivata, oltre a $\frac{x^3}{3}$ andranno anche bene tutte le funzioni del tipo $\frac{x^3}{3} + c$, essendo c una costante arbitraria.

Data una funzione $f(x)$ definita in un intervallo I (continua in tutto l'intervallo), se $g(x)$ è una funzione tale che

$$g'(x) = f(x), \quad \forall x \in I$$

allora *tutte* le funzioni che hanno $f(x)$ come derivata sono date dalla formula

$$g(x) + c$$

Definizione 3 *Data una funzione f, definita in un intervallo I, chiameremo primitiva di f ogni funzione F definita e derivabile nello stesso intervallo e tale che*

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in I$$

L'insieme di tutte le primitive di una funzione f, in un intervallo I, si denota con il simbolo

$$\int f(x)dx$$

Quindi ciò implica che

$$\int f(x)dx = \{F(x) + c \,|c \in \mathbb{R}\}$$

Basterà dunque riuscire a trovare una sola primitiva di una funzione f per trovarle tutte. Dalle proprietà delle derivate deriva la *linearità dell'integrale* che:

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx; \quad \int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

Non esistono regole generali per il calcolo dell'integrale del prodotto o quoziente di due funzioni, come nel caso delle derivate. Una regola utile può essere quella dell'*integrazione per parti* , ma non sempre risolutiva.

Una strategia di calcolo è quella di leggere la tabella delle derivate da "destra a sinistra", creando la tabella delle *primitive fondamentali.*

Funzione	***Primitive***
k	$kx + c$
$x^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$
$x^{-1} = \dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + c$
e^x	$\mathrm{e}^x + c$
$\ln x$	$x \ln x - x + c$
$\sin x$	$-\cos x + c$
$\cos x$	$\sin x + c$
$\big(f(x)\big)^\alpha f'(x),\ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\dfrac{\big(f(x)\big)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$
$\big(f(x)\big)^{-1} f'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$	$\ln\lvert f(x)\rvert + c$
$f'(x)\mathrm{e}^{f(x)}$	$\mathrm{e}^{f(x)} + c$
$f'(x)\sin f(x)$	$-\cos f(x)$
$f'(x)\cos f(x)$	$\sin f(x)$

Esempi.

1. $\displaystyle\int x^2 + \sin x \, \mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} - \cos x + c\,.$
2. $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2} \, \mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) \mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{x} + x^{-2}\right) \mathrm{d}x = \ln|x| + \frac{x^{-1}}{-1} + c = \ln|x| - \frac{1}{x} + c\,.$
3. $\displaystyle\int 2\sin(2x) \, \mathrm{d}x = \int (2x)' \sin(2x) \, \mathrm{d}x = -\cos(2x) + c\,.$
4. $\displaystyle\int 2x\mathrm{e}^{x^2} \, \mathrm{d}x = \int (x^2)'\mathrm{e}^{x^2} \, \mathrm{d}x = \mathrm{e}^{x^2} + c\,.$
5. $\displaystyle\int \left(3x^4 - 2x^3 + x - 1\right) \mathrm{d}x = 3\frac{x^5}{5} - 2\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} - x + c = \frac{3x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^2}{2} - x + c\,.$
6. $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+1} \, \mathrm{d}x = \int \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} \, \mathrm{d}x = \ln\left|x^2+1\right| + c = \ln(x^2+1) + c\,.$
7. $\displaystyle\int \sqrt[7]{x^5} \, \mathrm{d}x = \int x^{5/7} \, \mathrm{d}x = \frac{x^{5/7+1}}{5/7+1} + c = \frac{7}{12}\, x^{12/7} + c = \frac{7}{12}\, \sqrt[7]{x^{12}} + c\,.$

Calcolare con opportuni accorgimenti gli integrali: $\int \frac{x^3+2}{x-1} dx$ e $\int \frac{x+1}{x+2} dx$

Integrazione per parti

Dalla regola di derivazione di un prodotto di funzioni si può ricavare la formula di *integrazione per parti.* Se f e g sono funzioni derivabili in un intervallo I si ha

$$[fg]' = f'g + fg' \rightarrow fg' = [fg]' - f'g$$

Prendendo l'integrale di ambo i membri e ricordando la proprietà additiva dell'integrale avremo

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

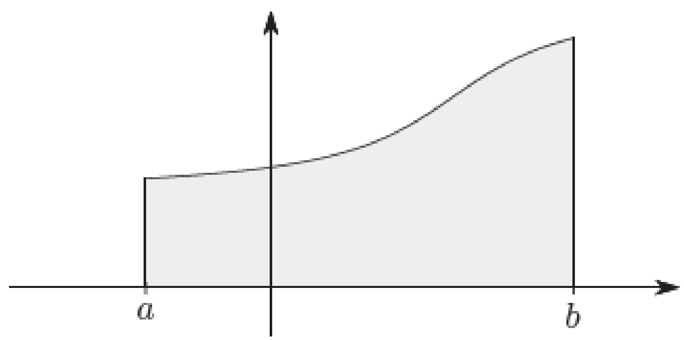
Il fattore f si chiama *fattore finito*, mentre g' si chiama *fattore differenziale.*

Esempio.

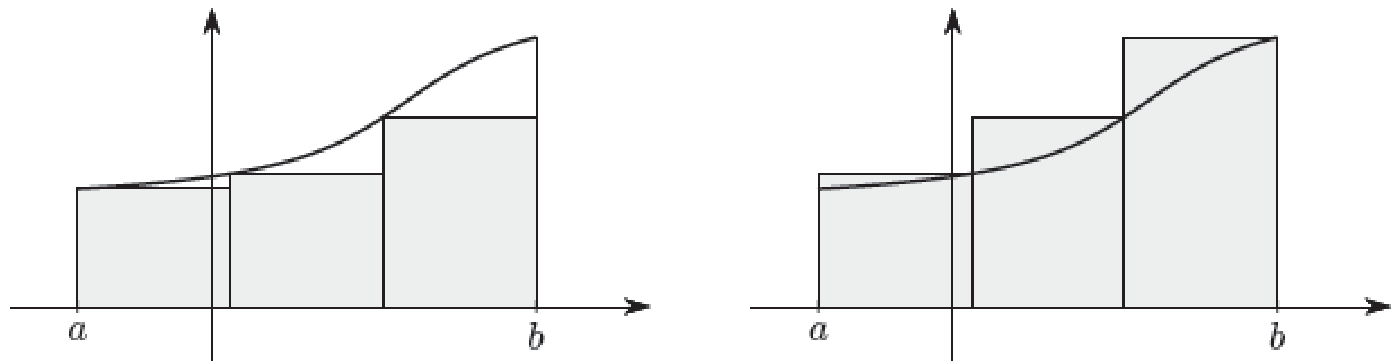
$$\int xe^x dx = e^x(x-1) + c; \quad \int \ln x dx = x \ln x - x + c$$

AREA DI UN TRAPEZOIDE

Consideriamo una funzione f, definita e continua in un intervallo $[a, b]$ e sempre positiva in tutto l'intervallo. Siamo interessati a calcolare l'area della regione racchiusa tra il grafico della funzione f, l'asse x, e le due rette verticali $x = a$ e $x = b$, regione che chiameremo un *trapezoide*.



Per valutare quest'area l'idea è quella di approssimarla, mediante dei "pluriret-tangoli", inscritti e circoscritti, ottenuti suddividendo l'intervallo $[a, b]$ in un certo numero di parti scelte uguali per semplicità.



Si dimostra (almeno nel caso delle funzioni continue) che, se il numero di suddivisioni tende all'infinito (e quindi la loro ampiezza tende a zero), le aree dei due plurirettangoli inscritto e circoscritto tendono a un valore comune che si chiama area del trapezoide e si indica con il simbolo

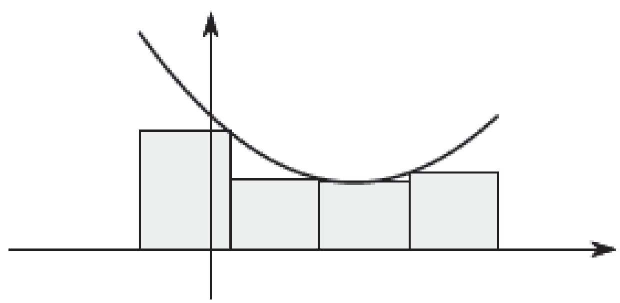
$$\int_a^b f(x)dx$$

e si legge *integrale definito della funzione* f tra a a b.

L'area del trapezoide considerato si ottiene come somma delle aree di tanti rettangoli, che hanno come base la misura di $[a, b]$ divisa per il numero di suddivisioni, cioè

$$\Delta x = (b - a)/n$$

e come altezza il valore della funzione calcolato in un punto opportuno appartenente a ciascun intervallo della suddivisione, $f(x)$.



L'area del plurirettangolo inscritto o circoscritto sarà data da

$$\sum f(x)\Delta x$$

Al tendere all'infinito del numero di suddivisioni, l'ampiezza di ciascuna tenderà a zero e quindi intuitivamente $\Delta x \to dx$ e quindi

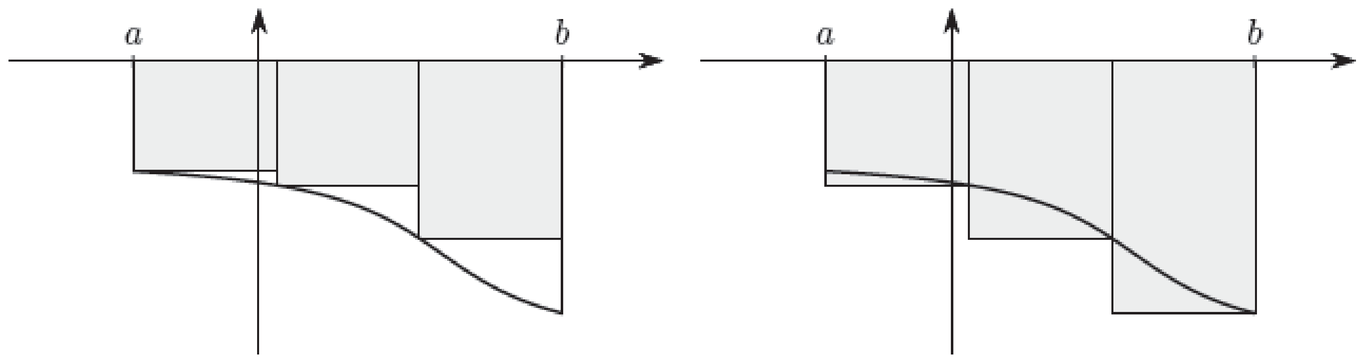
$$\sum \Delta x f(x) \to \int\limits_a^b f(x) dx$$

Integrale definito

Se la funzione f anzichè essere sempre positiva fosse sempre negativa nell'intervallo $[a, b]$, la somma

$$\sum f(x) \Delta x$$

sarà negativa e corrisponderà all'opposto dell'area del plurirettangolo costruito con la funzione $f(x)$ positiva.

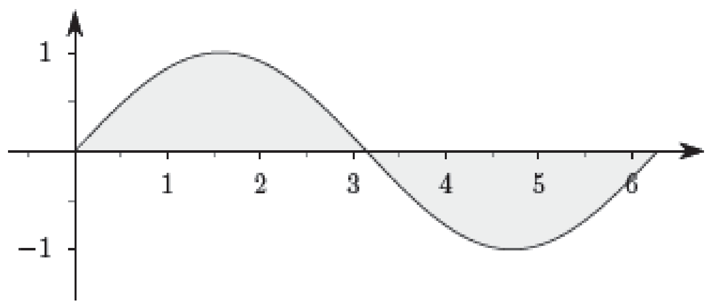


Possiamo ancora parlare di trapezoide, e questa volta il limite per $n \to +\infty$ ovvero $\Delta x \to 0$ sarà l'opposto dell'area del trapezoide e si indicherà ancora con

$$\int_a^b f(x)dx$$

Se una funzione è in parte positiva e in parte negativa la somma $\sum f(x)\Delta x$ avrà alcuni addendi positivi e alcuni negativi e il limite sarà chiaramente la differenza tra le aree di tutte le regioni sopra l'asse delle x e di tutte le regioni sotto l'asse x. In un caso come questo l'integrale potrebbe anche venire nullo.

Esempio: $f(x) = \sin x$, $[0, 2\pi]$ Per questioni di simmetria, la parte sopra l'asse x e quella sotto sono chiaramente identiche.



Definizione 4 *Sia data una funzione f definita e continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Si consideri la suddivisione dell'intervallo $[a, b]$ in n parti uguali, ciascuna dunque risulta uguale a*

$$\delta_i = (b - a)/n$$

e si prenda di ciascun sottointervallo il massimo M_i e il minimo m_i della funzione. Le somme

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\delta_i \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{n} M_i\delta_i$$

si chiamano rispettivamente **somma integrale inferiore** *e* **somma integrale superiore** *relative alla funzione f , all'intervallo $[a, b]$ e alla sua suddivisione in n parti.*

Si dimostra che, per le funzioni continue in un intervallo chiuso e limitato, le somme inferiori e superiori, al tendere di n all'infinito, tendono a un comune valore, che si chiama *Integrale definito* di $f(x)$ tra a e b e si indica con

$$\int_a^b f(x)dx$$

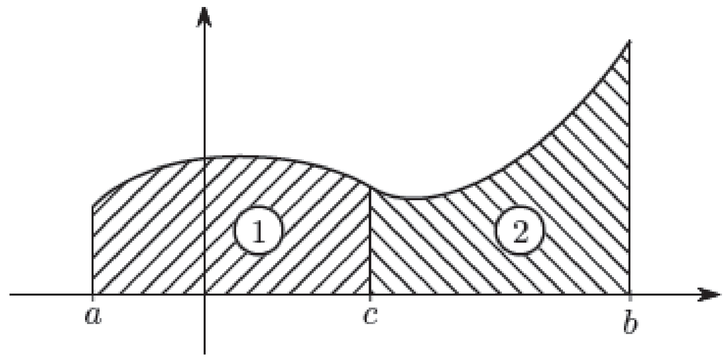
I numeri a e b (con $a < b$) si chiamano *estremi di integrazione*, la funzione f si chiama *funzione integranda*.

Una prima proprietà molto utile nelle applicazioni, è quella relativa all'*additività* rispetto all'intervallo di integrazione.

Teorema 5 *Se a, b e c sono tre reali qualsiasi, si ha*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

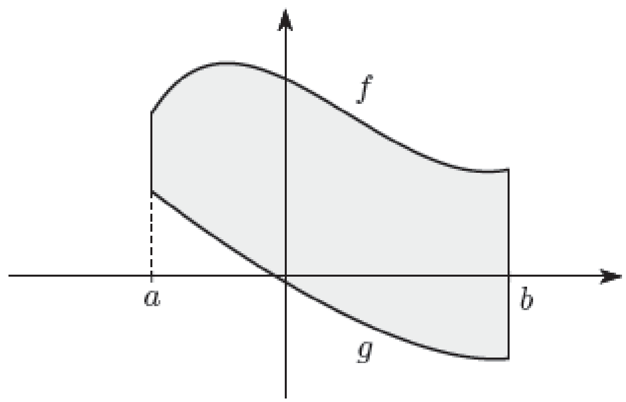
Per $a < c < b$ e f positiva avremo:



che l'integrale $\int_a^b f(x)dx$ che rappresenta l'area del trapezoide totale, è la somma degli altri due integrali che corrispodono alle aree dei trapezoidi 1 e 2.

La proprietà vale anche in casi piu generali.

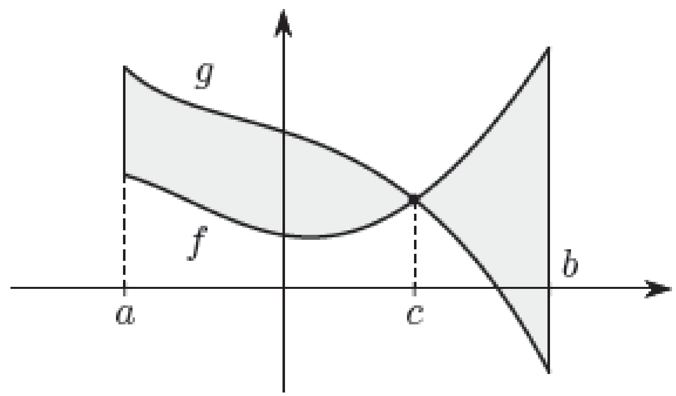
Se consideriamo l'area di una regione piana compresa tra i grafici di due funzioni, ed eventualmente di due rette verticali,



questa sarà *sempre* data dall'integrale tra a e b $(a < b)$ della differenza tra la funzione "più alta" e quella "più bassa" :

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$$

Se i grafici delle due funzioni si intersecano



allora spezzeremo l'integrale in due parti:

$$Area = \int_a^c (g(x) - f(x))\,dx + \int_c^b (f(x) - g(x))\,dx$$

Calcolo degli integrali definiti

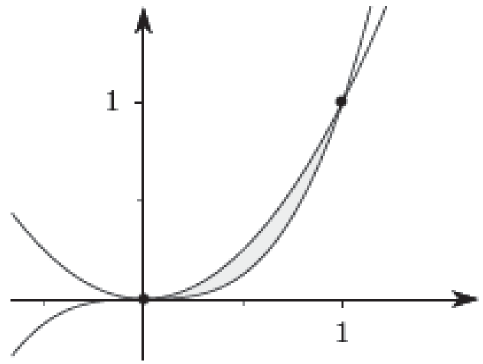
Teorema 6 (teorema fondamentale del calcolo integrale). *Sia data una funzione f definita e continua in un intervallo I. Sia inoltre F una primitiva di f in I . Se a e b sono due punti qualunque di I, si ha*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

La formula precedente si usa scrivere, tradizionalmente, nel modo seguente:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$$

Esempio. Calcolare l'area della regione limitata racchiusa tra i grafici di x^2 e x^3 e appartenente al primo quadrante.

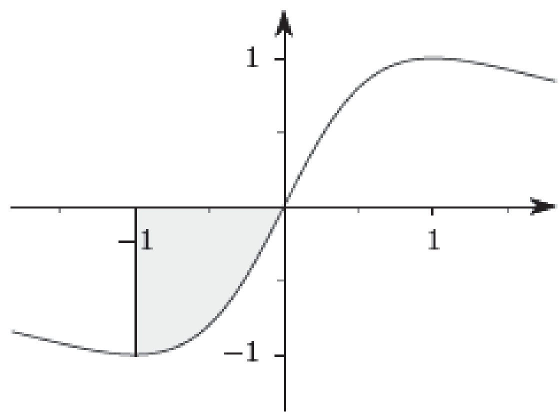


La regione limitata di piano considerata si ha tra $0 \leq x \leq 1$. In questo intervallo x^2 sta sopra a x^3. L'area sarà quindi

$$\int_0^1 \left(x^2 - x^3\right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + c$$

$$\int_0^1 \left(x^2 - x^3\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{0}{3} - \frac{0}{4}\right) = \frac{1}{12}$$

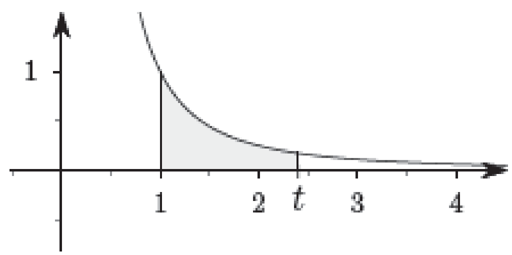
Esempio. Calcolare l'area di piano individuata dalla curva $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$, l'asse delle x, l'asse delle y e la retta $x = -1$.



Essendo la funzione sempre negativa nel tratto in questione, il trapezoide sta sotto l'asse delle ascisse, per cui la sua area sarà data da

$$-\int_{-1}^{0} \frac{2x}{x^2+1} dx = -\left[\ln\left(x^2+1\right)\right]_{-1}^{0} = -(\ln(1) - \ln(2)) = \ln 2 \simeq 0.69315$$

Esercizio. Calcolare l'area della regione limitata di piano compresa tra il grafico della funzione $f(x) = \frac{1}{x^2}$ l'asse delle x, la retta $x = 1$ e la retta $x = t$, con $t > 1, t \in \mathbb{R}$.



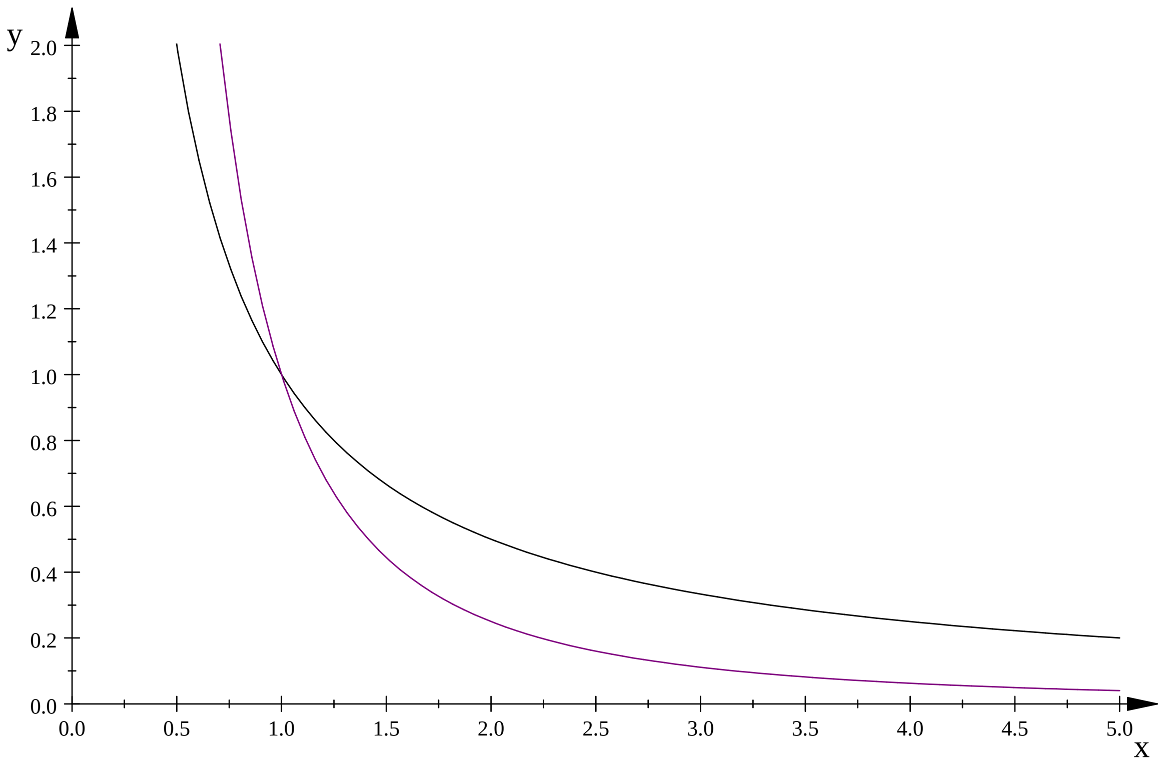
Calcolare poi il limite di quest'area quando $t \to +\infty$. Per il teorema fondamentale del calcolo integrale avremo

$$\int_1^t \frac{1}{x^2} dx = \left[-x^{-1}\right]_1^t = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^t = -\frac{1}{t} + 1$$

Se passiamo al limite per $t \rightarrow +\infty$ il risultato del limite è proprio $+1$. Si può interpretare questo numero come l'area della regione *illimitata* di piano compresa tra il grafico della funzione, l'asse delle x e la retta $x = 1$.L'area è finita pur essendo illimitata la regione del piano considerata. E' come se da un certo punto in poi la funzione fosse talmente vicina all'asse delle x da rendere nulla l'area sotto la curva. Se si considera invece la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ avremo

$$\int_1^t \frac{1}{x} dx = [\ln |x|]_1^t = \ln t - \ln 1 = \ln t$$

e passando al limite avremo che l'area della regione illimitata risulta $+\infty$. In questo caso la funzione è "più lontana" dall'asse x. $\frac{1}{x}$



Confronto tra i grafici di $\dfrac{1}{x}$ e $\dfrac{1}{x^2}$

INTEGRALI IMPROPRI

Individuiamo due problemi.

1. Calcolare l'area di regioni piane comprese tra l'asse delle ascisse e il grafico di una funzione avente un asintoto verticale in uno dei due estremi del suo intervallo di definizione; la funzione sarà naturalmente continua in $]a, b]$, oppure in $[a, b[$, a seconda che l'asintoto verticale sia sull'estremo sinistro o destro. Per esempio valutare l'area della regione compresa tra il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{1}{x}$ e l'asse delle x nell'intervallo $(0, 1]$ (come sopra). In generale si tratta di funzioni definite su un intervallo limitato sul quale però f non è limitata: si noti che $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

2. Calcolare l'area di regioni piane comprese tra il grafico di una funzione continua e l'asse delle x, in un intervallo del tipo $[a, +\infty)$ oppure $(-\infty, a]$.

In questi casi si parla di *integrali generalizzati o impropri.*

Nel primo caso supponiamo che l'asintoto verticale sia nell'estremo sinistro dell'intervallo di definizione della funzione. Allora

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)dx$$

Se invece l'asintoto si trova nell'estremo destro avremo

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)dx$$

Nel secondo caso invece

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)d$$

Se il limite esiste ed è finito si dice che l'integrale generalizzato *converge;* se il limite è $+\infty$ o $-\infty$ allora si dice che l'integrale *diverge.* Se il limite non esiste diremo che l'integrale non esiste. per calcolare integrali su tutto l'asse reale, ossia sull'intervallo $(-\infty, +\infty)$, di una funzione che sia integrabile in ogni intervallo $[h, k]$, si sceglie un punto c qualsiasi e si considerano *separatamente*

$$\int_{-\infty}^c f(x)dx = \lim_{h\to-\infty}\int_h^c f(x)dx \quad \text{e} \quad \int_c^{+\infty} f(x)dx = \lim_{k\to+\infty}\int_c^k f(x)d$$

Definizione 7 *Se* **entrambi** *gli integrali generalizzati convergono, si dice che* f *è integrabile in senso generalizzato su* $(-\infty, +\infty)$ *e si pone*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx := \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx$$

Se uno dei due integrali al secondo membro converge e l'altro diverge, o se entrambi divergono allo stesso infinito, anche l'integrale al primo membro diverge. Negli altri casi l'integrale non esiste. La definizione non dipende dalla scelta di c.

Esempi. Calcolare gli integrali

1. $\int_{-\infty}^{0} e^x dx$

2. $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ al variare di $\alpha > 0$

3. $\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$