Review Questions: Overlapping Generations

Econ720. Fall 2015. Prof. Lutz Hendricks

X

1 A Savings Function

Consider the standard two-period household problem. The household receives a wage w_t when young and a rate of return R_{t+1} on savings.

(a) Illustrate the household's intertemporal budget constraint and the optimal choice of consumption in a diagram. Label it clearly.
(b) If the wage rate rises, what happens to savings? What if the household receives an additional endowment when old? Explain and illustrate in your diagram. No math please.
(c) Derive the consumption function $c(w_t, R_{t+1})$ and the savings function $s(w_t, R_{t+1})$ for the utility function

$$u(c_t, x_{t+1}) = c_t^\alpha + x_{t+1}^\alpha$$

where $0 < \alpha < 1$ is a constant.
(d) Do the same for the utility function

$$u(c_t, x_{t+1}) = A \cdot \ln(c_t^\alpha + x_{t+1}^\alpha), 0 < A < 1$$

What do you find and why?

1.1 Answer: Saving Function

(a) This is the standard diagram of indifference curve and budget line.
(b) If both goods are normal, an increase in the wage rate or in the endowment when old leads to higher consumption at both ages. Therefore:

$$w \uparrow \Rightarrow s \uparrow$$

but

$$y_2 \uparrow \Rightarrow s \downarrow$$

(c) The household solves:

$$\max c^\alpha + x^\alpha$$

subject to the budget constraint $c + x/R = w$. The first-order condition is $u_c = Ru_x$ or

$$\alpha c^{\alpha-1} = R\alpha x^{\alpha-1}$$

Thus

$$x/R = cR^{\alpha/(1-\alpha)}$$

Substituting this into the budget constraint yields

$$c = w/(1 + R^{\alpha/(1-\alpha)})$$

and

$$s = w(1 - 1/[1 + R^{\alpha/(1-\alpha)}])$$

(d) The answer is exactly the same. The utility function in (c) is a monotone increasing transformation of the one in (d).

2 Log-utility Example

Consider the standard two-period OLG model with log utility: $U(c_{yt}, c_{o,t+1}) = \ln c_{yt} + \beta \ln c_{o,t+1}$.

1. Solve for the household's saving function.
2. Find a law of motion for $k_t = K_t/L_t$.
3. Show that the economy has a unique steady state (not counting $k = 0$), if (i) the old do not work ($\ell = 0$) and (ii) the production function is Cobb-Douglas: $F(K_t, L_t) = K_t^\alpha \, L_t^{1-\alpha}$.

2.1 Answer: Log-utility example

1. Saving function The Euler equation becomes

$$\frac{c_{o,t+1}}{c_{y,t}} = \beta \; R_{t+1} \tag{1}$$

A solution to the household problem is a vector $(C_{y,t}, C_{o,t+1}, A_{t+1})$ that satisfies the Euler equation and two budget constraints.

The present value budget constraint is

$$c_{y,t} + \frac{c_{o,t+1}}{R_{t+1}} = \bar{W}_t = W_t + \frac{\ell \; W_{t+1}}{R_{t+1}} \tag{2}$$

Substitute the Euler equation into the budget constraint to obtain

$$c_{y,t} = \frac{\bar{W}_t}{1+\beta} \tag{3}$$

$$c_{o,t+1} = \frac{\beta \bar{W}_t}{1+\beta} \tag{4}$$

$$A_{t+1} = s(W_t, \ell W_{t+1}, R_{t+1}) = W_t - \frac{\bar{W}_t}{1+\beta} \tag{5}$$

2. Law of motion. Capital market clearing requires

$$K_{t+1} = N_t \; A_{t+1} = N_t \left[\frac{\beta}{1+\beta} W_t - \frac{\ell W_{t+1}}{(1+\beta) \; R_{t+1}} \right] \tag{6}$$

From the firm's problem we know that $W_t = W(k_t)$ with $W' > 0$ and $R_t = R(k_t)$ with $R' < 0$. Dividing through by N_t therefore yields a law of motion for k:

$$\begin{aligned} k_{t+1} &= \frac{K_{t+1}}{L_{t+1}} = \frac{K_{t+1}}{L_t(1+n)} = \frac{K_{t+1}}{N_t(1+n)} \frac{N_t}{L_t} \\ &= s(W(k_t), \ell W(k_{t+1}), R(k_{t+1})) \; \frac{N_t/L_t}{1+n} \end{aligned}$$

where $L_t = N_t + \ell N_{t-1} = N_t \; (1 + \ell/[1+n])$ is just a constant.

3. Unique steady state. With $\ell = 0$ the saving function simplifies greatly (b/c the interest rate does not affect lifetime earnings $\bar{W}$):

$$A_{t+1} = \frac{\beta}{1+\beta} W_t \tag{7}$$

Moreover, $N_t = L_t$. The law of motion for k becomes

$$k_{t+1} \; (1+n) = \frac{\beta}{1+\beta} W(k_t) \tag{8}$$

As long as the production function is such that $W' > 0$ and $W'' < 0$, there can only be one solution with $k_{t+1} = k_t > 0$.

With a Cobb-Douglas production function, we can solve for the steady state. $W(k) = (1-\alpha) k^{\alpha}$. Substitute this into the law of motion and set $k_{t+1} = k_t$ to obtain

$$k_{ss}(1+n) = \frac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha) k_{ss}^{\alpha} \tag{9}$$

The solution is

$$k_{ss} = \left(\frac{\beta}{1+\beta}\frac{1-\alpha}{1+n}\right)^{1/(1-\alpha)} \tag{10}$$

This has intuitive properties. Steady state capital rises if households become more patient ($\beta \uparrow$) or if households have fewer children ($n \downarrow$).

3 Labor income taxes

Consider a two-period OLG economy with production.

Demographics: Each period $N = 1$ young households are born. They live for 2 periods.

Endowments: Young households work 1 unit of time.

Preferences:

$$\ln(c_t^y) + \beta \ln(c_{t+1}^o)$$

Technology:

$$Y_t = K_t^{\theta} L_t^{1-\theta}$$

There is no depreciation. The resource constraint is therefore

$$Y_t + K_t = c_t^y + c_t^o + K_{t+1}$$

Markets: Standard. There are no bonds.

Questions: (a) Derive the optimal level of savings of the household as a function of w. Briefly, why do savings not depend on r?

(b) Derive the FOCs for the firm.

(c) Define a competitive equilibrium. Be sure to clearly state the market clearing conditions and to ensure that the number of independent equations equals the number of endogenous variables.

(d) Write down a difference equation for the equilibrium capital-labor ratio, ($k_t = K_t/L_t$). Sketch a graph of this relationship.

(e) The government now imposes a time-invariant tax τ on labor income of the young so that after-tax earnings are $(1-\tau)w_t$. The revenues are thrown into the ocean. By how much does this tax lower the savings of the young for given w? Briefly, what is the intuition for this result?

(f) How does the tax affect the relationship graphed in (d)? What happens to the steady state capital-labor ratio? Sketch a graph.

3.1 Answer. Labor income taxes

(a) With an eye on part (d), we set up the household problem with the wage tax. The budget constraints are

$$c_t^y = (1-\tau)w_t - s_{t+1}$$

and

$$c_{t+1}^{o} = (1 + r_{t+1}) s_{t+1}$$

The Euler equation is

$$c_{t+1}^{o} = \beta R_{t+1} c_t^y$$

where $R = 1 + r$. Substituting using the budget constraints yields

$$R_{t+1} s_t = \beta R_{t+1} [(1 - \tau) w_t - s_t]$$

The savings function is therefore

$$s_t = (1 - \tau) w_t \beta / (1 + \beta)$$

It is independent of R because of log utility: income and substitution effects cancel.

(b) This is the standard answer:

$$r = \theta k^{\theta - 1}$$

and

$$w = (1 - \theta) k^{\theta}$$

(c) Market clearing requires

- Capital rental:

$$k_{t+1} = s_{t+1} = (1 - \tau)(1 - \theta) k_t^{\theta} \beta / (1 + \beta)$$

- Labor rental: $L_t - 1$
- Goods: Same as feasibility.

A competitive equilibrium is a sequence

$$(c_t^y, c_{t+1}^o, k_t, L_t, s_t, w_t, r_t)$$

that satisfies (i) the household's budget constraints (2 eqn) and FOCs (2 eqn); (ii) the firm's FOCs (2 eqn); market clearing (2 eqn). We have 8 equations (per period) and 7 unknowns, which works out given Walras' law.

(d) The difference equation is the capital market clearing condition above, which is simply a positive constant times the production function. This is strictly concave and goes through the origin. The slope at zero is infinite. There is exactly one intersection with the 45-degree line (steady state).

4.1 Answer: Fully-funded Social Security

(a) Households only care about the present value of future tax payments when deciding how much to consume. If the government earns the same rate of return as does the private sector, fully-funded social security does not alter this present value. Thus, consumption does not change and households reduce private savings by exactly the tax revenue. Therefore, total saving (public + private) remains unchanged.

(b) If the public rate of return is lower than the private one, the present value of lifetime resources available to the household declines. Given a rate of return, consumption at all ages is reduced. Therefore, private savings falls by less than the tax revenue and the capital stock increases. An easy way to see this is to note that such a policy is equivalent to a combination of case (a) plus a tax on the old.

5 Efficiency in an OLG model

[Due to Oksana Leukhina] Consider an overlapping generations endowment economy with a single non-storable good. Time is indexed by $t = 1, 2, 3...$ The representative consumer of the generation born in period t lives in periods t and $t+1$, has preferences represented by $c_t^y + \alpha \ln c_{t+1}^o$, and endowment stream $(e_t^y, e_t^o) = (1, 1)$. There is no fiat money.

a. Define an Arrow-Debreu equilibrium.

b. Calculate the unique equilibrium (do not prove it is unique).

c. Define a Pareto-efficient allocation for this economy.

d. Suppose that $\alpha = 2$. Show that the equilibrium is not Pareto-efficient.

5.1 Answer: Efficiency in an OLG model

a). An Arrow-Debreu equilibrium is given by the allocations of consumers born in $t \geq 1$, $\{\hat{c}_t^y, \hat{c}_{t+1}^o\}_{t\geq 1}$, allocation of the initial old $\hat{c}_t^o$ and prices $\{\hat{p}_t\}_{t\geq 1}$ such that

1) $\hat{c}_t^o$ solves the problem of the initial old, i.e. it solves

Given $\hat{p}_1$, max c_1^o s.t. $\hat{p}_1 c_1^o < \hat{p}_1$.

2) For all $t \geq 1$, $\{\hat{c}_t^y, \hat{c}_{t+1}^o\}_{t\geq 1}$ solves the problem of consumers born in t :

Given $(\hat{p}_t, \hat{p}_{t+1})$, max $c_t^y + \alpha \ln c_{t+1}^o$ s.t. $\hat{p}_t c_t^y + \hat{p}_{t+1} c_{t+1}^o = \hat{p}_t + \hat{p}_{t+1}$.

3) Equilibrium allocations satisfy $\hat{c}_t^y + \hat{c}_t^o = 2$ $\forall t$.

b). The initial old eats $\hat{c}_t^o = 1$. Then the market clearing in period 1 is $\hat{c}_1^y + 1 = 2$, i.e. $\hat{c}_1^y = 1$.

The FOCs for consumers born in $t \geq 1$ are given by

$$\frac{p_t}{p_{t+1}} = \frac{c_{t+1}^o}{\alpha}. \tag{11}$$

Normalizing $p_1 = 1$, we have $p_2 = \frac{\alpha}{c_2^o}$. Using the budget constraint for the consumer born in $t = 1$ we have

$$c_1^y + \frac{\alpha}{c_2^o} c_2^o = 1 + \frac{\alpha}{c_2^o} 1,$$

which together with already determined $\hat{c}_1^y = 1$ implies $\hat{c}_2^o = 1$.

Continuing in this way, we get

$$\hat{c}_t^y = \hat{c}_t^o = 1,$$

i.e. an autarkic equilibrium.

Prices supporting this equilibrium are given by (11), i.e.

$$\hat{p}_t = \alpha^{t-1}.$$

c). A Pareto-efficient allocation is $c_1^o, \{c_t^y, c_{t+1}^o\}_{t\geq 1}$ such that

1. It is feasible, i.e. $c_t^y + c_t^o = 2$ and
2. There exists no other allocation $\tilde{c}_1^o, \{\tilde{c}_t^y, \tilde{c}_{t+1}^o\}_{t\geq 1}$ such that it is also feasible (i.e. $\tilde{c}_t^y + \tilde{c}_t^o = 2$ for all t) and

$$\begin{aligned} \tilde{c}_1^o &\geq c_1^o, \\ \tilde{c}_t^y + \alpha \ln \tilde{c}_{t+1}^o &\geq c_t^y + \alpha \ln c_{t+1}^o, \ \forall t, \end{aligned}$$

with at least one of these holding with a strict inequality.

d) Assume $\alpha = 2$. Then the competitive equilibrium found in b is not Pareto efficient. Consider an alternative allocation $\tilde{c}_1^o = 2$, $(\tilde{c}_t^y \tilde{c}_{t+1}^o) = (0, 2)$ $\forall t$. This allocation is feasible and everyone is strictly better off:

The initial old is better off because $2 > 1$. Consumers born in t are better off too: $0 + 2\ln 2 > 1 + 2\ln 1 = 1$.

6 Social Security

[Due to Joydeep Bhattacharya] In a fully funded pension system, the contributions made by the young at time t are invested and returned with interest at time $t+1$ to the same agent. Consider a standard Diamond (1965) model. There are N young agents born at the start of each date t. Agents work when young and retire when old. Assume that agents when young have to pay lump-sum taxes a_t in the form of contributions to a fully-funded pension program.

1. Suppose capital markets are perfect. Setup the model carefully and prove that a fully funded pension system is neutral, i.e., it does not affect capital accumulation. Assume a is less than wage income at any date.

   `The Diamond model without any social security system:`

$$K_{t+1} = L_t s_t^* \quad \Leftrightarrow \quad (1+n)\, k_{t+1} = s_t^* \quad \Leftrightarrow \quad k_{t+1} = \frac{1}{1+n} s\left[w_t, R_{t+1}\right]$$

   `where the optimal savings (saving function)` $s_t^* \equiv s\left[w_t, R_{t+1}\right]$ `is a solution to the individual problem:`

$$\begin{aligned} \max_{c_t, c_{t+1}, s_t} u_t &= u\left(c_t, c_{t+1}\right) \quad \text{s.t.} \quad c_t = w_t - s_t \quad \text{and} \quad c_{t+1} = R_{t+1} s_t \\ &\Leftrightarrow \quad \max_{s_t} u_t = u\left(w_t - s_t, R_{t+1} s_t\right) \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{u_1\left(w_t - s_t^*, R_{t+1} s_t^*\right)}{u_2\left(w_t - s_t^*, R_{t+1} s_t^*\right)} = R_{t+1} \end{aligned}$$

   `and the factor prices are given by`

$$r_t = f'\left(k_t\right) \quad \text{and} \quad w_t = f\left(k_t\right) - k_t f'\left(k_t\right).$$

   `The equilibrium law of motion for` k_t `is`

$$k_{t+1} = \frac{1}{1+n} s\left[f\left(k_t\right) - k_t f'\left(k_t\right), f'\left(k_{t+1}\right)\right].$$

   `A fully-funded social security system: the contributions of the young at time` t `are invested and returned with interest at time` t+1 `to the then old. Therefore the per-period budget constraints are modified into`

$$c_t = w_t - \tilde{s}_t - a_t \quad \text{and} \quad c_{t+1} = R_{t+1}\tilde{s}_t + R_{t+1} a_t.$$

Then the F.O.C. for utility maximization is given by

$$\frac{u_1\left[w_t-\left(\widetilde{s}_t^*+a_t\right),R_{t+1}\left(\widetilde{s}_t^*+a_t\right)\right]}{u_2\left[w_t-\left(\widetilde{s}_t^*+a_t\right),R_{t+1}\left(\widetilde{s}_t^*+a_t\right)\right]}=R_{t+1} \quad \Rightarrow \quad \widetilde{s}_t^*\equiv\widetilde{s}\left[w_t,R_{t+1},a_t\right]$$

and the capital endowment for time $t+1$ becomes

$$\widetilde{K}_{t+1}=L_t\widetilde{s}_t^*+L_ta_t \quad \Leftrightarrow \quad (1+n)\,\widetilde{k}_{t+1}=\widetilde{s}_t^*+a_t \quad \Leftrightarrow \quad \widetilde{k}_{t+1}=\frac{1}{1+n}\left[\widetilde{s}_t^*+a_t\right].$$

However, defining

$$x_t\equiv\widetilde{s}_t^*+a_t=\widetilde{s}\left[w_t,R_{t+1},a_t\right]+a_t$$

yields the F.O.C. rewritten as

$$\frac{u_1\left(w_t-x_t,R_{t+1}x_t\right)}{u_2\left(w_t-x_t,R_{t+1}x_t\right)}=R_{t+1},$$

from which x_t can be implicitly solvable in the saving function of the economy without social security:

$$x_t\equiv\widetilde{s}_t^*+a_t=s\left[w_t,R_{t+1}\right].$$

Substituting this into the expression for $\widetilde{k}_{t+1}$ yields

$$\widetilde{k}_{t+1}=\frac{1}{1+n}x_t=s\left[w_t,R_{t+1}\right].$$

Together with the factor pricing rule:

$$r_t=f'\left(\widetilde{k}_t\right) \quad \text{and} \quad w_t=f\left(\widetilde{k}_t\right)-k_tf'\left(\widetilde{k}_t\right)$$

we get the same equilibrium law of motion for k_t as before. This is possible provided that $a_t<(1+n)\,k_{t+1}(\ =s_t\ )$ in the economy without social security system, that is, social security contributions do not exceed the amount of saving that would otherwise have occurred. We may call x_t total savings, which is not affected.

2. Provide a clear intuition for this result.

The intuitive explanation is that the increase in social security saving (a_t) is exactly offset by a decrease in private saving $(\widetilde{s}_t)$ in such a way that the total savings, $x_t=\widetilde{s}_t+a_t$, is equal to the previous level of s_t. The social security saving has the same rate of return as the one with private saving, so that the social security system perfectly substitutes for private saving in each individual's saving/investment decision. The argument assumes a perfect capital market; meaning that the young must be able to borrow against their future pension earnings.

3. Now suppose, capital markets are not perfect. In particular, suppose the young *cannot borrow*. Will the neutrality result in (1) above survive? Provide a clear intuiton for your answer. There is no need to work out all the model details.

No; if the young cannot borrow against their future pension rights, they will save an amount different from what they did w/o the system.

7 Overlapping Generations With Human Capital

Consider the following overlapping generations model. Agents live for three periods. At each date, a unit measure of households is born. Cohort t is born at $t-1$ and middle-aged at t.

When **young**, the household can produce human capital according to $h_t=e_t^{\beta}$ with $0<\beta<1$. The household borrows the human capital investment e_t at interest rate r_t. When **adult** (middle aged), the household therefore has debt equal to $(1+r_t)e_t$. He chooses consumption (c_{1t}) and savings (s_t) subject to the budget constraint

$$c_{1t} + s_t = w_t h_t - (1 + r_t) e_t$$

When **old**, the household makes no decisions and simply consumes his wealth:

$$c_{2t+1} = (1 + r_{t+1}) s_t$$

Preferences are

$$u(c_{1t}, c_{2t}) = (c_{1t} - \gamma a_t)^{\theta} (c_{2t+1})^{1-\theta}$$

where a represents an "aspiration" level which is inherited from the parents:

$$a_t = c_{1t-1}$$

and $0 < \gamma < 1$. The idea is that growing up rich raises the standards for a "good life."

There is also a single representative firm which rents capital and labor services from the household to produce a single good. It maximizes profits in a competitive environment. The technology is $Y_t = K_t^{\alpha} h_t^{1-\alpha}$ with $0 < \alpha < 1$. Capital depreciates fully.

Questions: .

(a) Solve the problem of an **adult** (middle aged) household. You should obtain a saving function in closed form. Also derive an indirect utility function $U(c_t, a_t)$. *Hint:* You should find

$$U(c_t, a_t) = \theta^{\theta} (1 - \theta)^{1-\theta} (1 + r_{t+1})^{1-\theta} (w_t h_t - (1 + r_t) e_t - \gamma a_t) \tag{12}$$

(b) Solve for the optimal level of human capital investment by a young agent. Use the indirect utility function.

(c) Characterize optimal firm behavior.

(d) Define a competitive equilibrium. Make sure you explicitly state the market clearing conditions and that you have the same number of variables and equations.

(e) Consider the special case $\beta = 0$, so that human capital is an exogenous constant ($h_t = h$) and $e_t = 0$. Show that the steady state level of $k = K/h$ is

$$k^{SS} = \left(\frac{(1 - \theta)(1 - \alpha)(1 - \gamma)}{1 - \gamma(1 - \theta)} \right)^{1/(1-\alpha)}$$

Hint: There is no need to resolve for the saving function of the adult household (why not?).

(f) It is easy to show from the solution to (e) that the steady state level of k falls when γ rises. What is the intuition for this result?

7.1 Answer: OLG With Human Capital

(a) The household is endowed with e_t and h_t. He solves

$$\max \left(w_t h_t - (1 + r_t) e_t - s_t - \gamma a_t\right)^{\theta} \left((1 + r_{t+1}) s_t\right)^{1-\theta}$$

The FOC is

$$\theta (c_{1t} - \gamma a_t)^{\theta - 1} c_{2t+1}^{1-\theta} = (1 - \theta)(c_{1t} - \gamma a_t)^{\theta} c_{2t+1}^{-\theta} (1 + r_{t+1})$$

$\Rightarrow$

$$c_{2t+1} / (c_{1t} - \gamma a_t) = (1 + r_{t+1})(1 - \theta)/\theta$$

Using the budget constraints we find the saving function

$$\frac{w_t h_t - (1 + r_t) e_t - s_t - \gamma a_t}{(1 + r_{t+1}) s_t} = \frac{\theta/(1 - \theta)}{(1 + r_{t+1})}$$

$\Rightarrow$

$$s_t = (1 - \theta)(w_t h_t - (1 + r_t) e_t - \gamma a_t)$$

This makes sense: Without "aspirations" the household would save a constant fraction of income due to log utility.

Indirect utility function: Substitute saving function into the objective function and collect terms:

$$U(e_t, a_t) = \theta^{\theta} (1 - \theta)^{1-\theta} (1 + r_{t+1})^{1-\theta} (w_t h_t - (1 + r_t) e_t - \gamma a_t)$$

(b) When young: the household maximizes the indirect utility function. In this case, this is equivalent to maximizing the present value of earnings (why?).

$$\max w_t e_t^\beta - (1 + r_t) e_t$$

Solution:

$$e_t = (\beta w_t / (1 + r_t))^{1/(1-\beta)}$$

(c) The firm's problem is standard. Define $k = K/h$. Then $w_t = (1 - \alpha)\, k_t^\alpha$ and $1 + r_t = \alpha\, k_t^{\alpha - 1}$. The same r as in the household problem because capital depreciates fully.

(d) A competitive equilibrium is a sequence of quantities $(c_{1t}, c_{2t}, s_t, e_t, h_t, K_t, a_t)$ and prices (w_t, r_t) that satisfy:

- Household: saving function and 2 budget constraints; optimality of e;
- Firm: two FOCs
- Law of motion for a.
- Market clearing

Capital market clearing requires

$$s_t = K_{t+1} + e_{t+1}$$

The e term appears because education requires capital. Goods market clearing requires:

$$F(K_t, h_t) = K_{t+1} + e_{t+1} + c_{1t} + c_{2t}$$

(e) The saving function does not change because the adult household takes (h, e) as given. Now they are simply fixed. Capital market clearing is now

$$s = (1 - \theta)(wh - \gamma a) = K = kh$$

We can substitute out a using $a = c_1$. The adult budget constraint implies $c_1 = wh - s$. Therefore,

$$s = (1 - \theta)(wh - \gamma(wh - s))$$

or

$$(1 - \theta)(1 - \gamma) wh = s(1 - \gamma(1 - \theta))$$

Now use $w = (1 - \alpha)\, k^\alpha$ to get

$$\frac{(1 - \theta)(1 - \gamma)}{1 - (1 - \theta)\gamma} = \frac{s}{wh} = \frac{k}{w} = \frac{k}{(1 - \alpha) k^\alpha}$$

Rearranging leads to the equation we are supposed to prove.

(f) If children inherit aspirations from their parents, steady state capital is lower (they save less). Intuition: Ceteris paribus, a higher γ reduces saving; people require more consumption to maintain the same marginal utility.

8 Human capital

[Due to Joydeep Bhattacharya] Consider a fairly standard two-period lived OG model. The number of young agents at any date t is fixed at N. Agent preferences are described by

$$U(c_{1t}, c_{2t+1}) = \ln c_{1t} + \ln c_{2t+1}$$

where c_{1t} is young-age consumption at date t and c_{2t+1} is old-age consumption at date $t + 1$. The production function is given by

$$Y_t = S_t^{\gamma} L_t^{1-\gamma}$$

where L_t is the labor of young (unskilled) workers and S_t is the labor of old (skilled) workers.

When young, agents spend a fraction m_t of their time working and the remaining time $1-m_t$ in getting an education (acquiring human capital). Their human capital accumulation is described by

$$h_{t+1} = h_t + (1 - m_t)\,\theta h_t$$

where h_t is human capital of the current old, h_{t+1} is human capital acquired by the current young, and $\theta > 1$ is a parameter. The wage per unit of time worked is w_t. When young, agents cannot use the human capital they have acquired in that period.

When old, agents just work and earn a wage of v_t per unit of human capital they acquired when young. All markets are perfectly competitive.

1. Point out the *two* most important features of the human capital accumulation equation.
2. Solve for the agent's optimal consumption, saving, and human capital investment profile.
3. What is the growth rate for output in this economy?
4. Define a competitive equilibrium for this economy.
5. Can the model, as it stands, generate poverty traps? Explain briefly. [*Hint:* does an agent's human capital investment profile depend on whether they are in a high or low human capital economy?]
6. Suppose the government initiates a mandatory PAYG social security program, taxing the young a lump-sum amount T_1 and returning the old a lump-sum amount T_2. Will all countries that run such a program invest more in education than before? Show all steps. Provide a clear intuition for your answer.

8.1 Answer: Human capital

1. Point out two important features of the human capital accumulation equation.

   There is a human capital externality (the current young directly benefit from the human capital accumulated by the current old generation (their parents). Alternatively, one an point out that the production function for h is linear in h which generates a potential for endogenous growth.

2. Solve for the agent's optimal consumption, saving, and human capital investment profile.

   The budget constraints are

$$\begin{aligned} c_{1t} &= w_t m_t \\ c_{2t+1} &= v_{t+1} h_{t+1} = v_{t+1}\left[h_t + (1 - m_t)\,\theta h_t\right] \end{aligned}$$

   so agent's problem

$$\max \quad \ln c_{1t} + \ln c_{2t+1} \Leftrightarrow \max_{m_t} \quad \ln w_t m_t + \ln\left\{v_{t+1}\left[h_t + (1 - m_t)\,\theta h_t\right]\right\}$$

   Solution:

$$m_t = (1 + \theta)/2\theta$$

   a constant.

$$\begin{aligned} c_{1t} &= \frac{(1+\theta)}{2\theta} w_t \\ c_{2t+1} &= v_{t+1} h_t \frac{(1+\theta)}{2} \end{aligned}$$

   since $\theta > 1$.

3. What is the growth rate for output in this economy?

$$\begin{aligned} Y_t &= S_t^{\gamma} L_t^{1-\gamma} \\ S_t &= N h_t \\ L_t &= N m_t \end{aligned}$$

$$h_{t+1} = h_t + (1-m_t)\theta h_t = h_t + \left(1 - \frac{(1+\theta)}{2\theta}\right)\theta h_t = \frac{1}{2} h_t (\theta+1)$$

then

$$\frac{Y_{t+1}}{Y_t} - 1 = \left(\frac{h_{t+1}}{h_t}\right)^{\gamma} - 1 = \left[\frac{1}{2}(\theta+1)\right]^{\gamma} - 1$$

4. A competitive equilibrium is a set of allocation sequences $\{c_{1t}\}, \{c_{2t}\}, \{h_t\}$, $\{m_t\}$ and price sequences $\{w_t\}, \{v_t\}$ such that a) $\{c_{1t}\}, \{c_{2t}\}, \{m_t\}$ solve the agent's problem given $\{w_t\}, \{v_t\}$ and the human capital accumulation function, b) firms maximize profits so that $\{w_t\}, \{v_t\}$ satisfy the standard marginal product relationships, and c) all markets clear

5. Can this model, as it stands, generate poverty traps? Explain. [*Hint:* does an agent's human capital investment profile depend on whether they are in a high or low human capital economy?]

   No. Here m is a constant and does not depend on the level of h. This means the young in rich or poor nations will invest the same in human capital.

6. Suppose the government initiates a mandatory PAYG social security program, taxing the young a lump-sum amount T_1 and returning the old a lump-sum amount T_2. Will all countries that run such a program invest more in education?

   The budget constraints are

$$\begin{aligned} c_{1t} &= w_t m_t - T_1 \\ c_{2t+1} &= v_{t+1} h_{t+1} + T_2 \end{aligned}$$

   so agent's problem

$$\max_{m_t} \quad \ln(w_t m_t - T_1) + \ln\{v_{t+1}[h_t + (1-m_t)\theta h_t] + T_2\}$$

   Solution:

$$\frac{w_t}{w_t m_t - T_1} = \frac{v_{t+1}\theta h_t}{v_{t+1}[h_t + (1-m_t)\theta h_t] + T_2}$$

$$\Rightarrow m_t = \frac{1}{2\theta h_t w_t v_{t+1}} (T_2 w_t + h_t w_t v_{t+1} + \theta T_1 h_t v_{t+1} + \theta h_t w_t v_{t+1})$$

   since the govt's budget constraint is $T_2 = T_1 = T$ (with no population growth),

$$\begin{aligned} m_t &= \frac{1}{2\theta h_t w_t v_{t+1}} (T w_t + h_t w_t v_{t+1} + \theta T h_t v_{t+1} + \theta h_t w_t v_{t+1}) \\ &= \frac{(1+\theta)}{2\theta} + T\left(\frac{w_t + v_{t+1}\theta h_t}{2 v_{t+1}\theta h_t w_t}\right) > \frac{(1+\theta)}{2\theta} \end{aligned}$$

   it follows that people work more (higher m) invest less in education than in the absence of the social security program. The intuition is as follows: notice that the only asset here is human capital and human capital adds only to old age income. The SS program adds to old age income and hence reduces the need to accumulate human capital; the tax used to finance the pension reduces young age income and further raises the opportunity cost of getting an education.

9 OLG Model with Human Capital

Consider the following two period OLG model.

Households live for two periods. $N_t = (1+n)^t$ young households are born at date t. Each is endowed with human capital h_t and no assets. A young household divides his time between work (l_t) and education $(1-l_t)$. Work pays $l_t h_t w_t$. Income is either consumed or saved. The young budget constraint is

$$l_t h_t w_t = c_t^y + k_{t+1}$$

Old households have human capital $h_{t+1}^o = g(1-l_t, h_t)$ and earn $h_{t+1}^o w_{t+1}$. Their budget constraint is

$$R_{t+1} k_{t+1} + h_{t+1}^o w_{t+1} = c_{t+1}^o$$

The utility function is $u(c_t^y, c_{t+1}^o)$. New agents "inherit" human capital from their parents:

$$h_{t+1} = \varphi h_t$$

Firms rent capital and labor from households at rental prices q_t and w_t, respectively. Firms produce with a constant returns to scale production function, $Y_t = F(K_t, L_t)$, and maximize period profits. Capital depreciates at rate δ.

(a) Derive and interpret the first order conditions for the **household problem**. Define a solution to the household problem.

(b) Define a solution to the **firm**'s problem.

(c) State the **market clearing** conditions.

(d) Define a **competitive equilibrium.** Make sure the number of equations matches the number of objects.

9.1 Answer: OLG model with human capital

(a) The problem is

$$\max \; u(c_t^y, c_{t+1}^o)$$

subject to the present value budget constraint

$$c_t^y + c_{t+1}^o / R_{t+1} = l_t h_t w_t + \frac{g(1-l_t, h_t) w_{t+1}}{R_{t+1}}$$

First order conditions are:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_2 R_{t+1} \\ \frac{g_1 w_{t+1}}{R_{t+1}} &= w_t h_t \end{aligned}$$

The first is a standard Euler equation. The second requires the marginal return to human capital to equal the interest rate.

A solution is a vector $(c_t^y, c_{t+1}^o, l_t, k_{t+1}, h_{t+1}^o)$ that solves the 2 focs, the 2 budget constraints, and the law of motion for h.

(b) The firm is standard: (K_t, L_t) that satisfy

$$\begin{aligned} q_t &= f'(K_t/L_t) \\ w_t &= f(K_t/L_t) - f'(K_t/L_t)\; K_t/L_t \end{aligned}$$

(c) Market clearing:

$$\begin{aligned} K_{t+1} &= N_t k_{t+1} \\ L_t &= N_t h_t l_t + N_{t-1} g(1-l_{t-1}, h_{t-1}) \\ F(K_t, L_t) + (1-\delta) K_t &= N_t c_t^y + N_{t-1} c_t^o + K_{t+1} \end{aligned}$$

(d) A CE consists of sequences

$$\{c_t^y, c_t^o, k_t, l_t, K_t, L_t, h_t, h_t^o, q_t, w_t, R_t\}$$

[10 objects] that satisfy

- 5 household conditions;
- 2 firm conditions;
- 3 market clearing conditions;
- $R_{t+1} = 1 - \delta + q_{t+1}$.
- $h_{t+1} = \varphi h_{t+1}^o$.

Advanced Macroeconomics. Exercises

18.09.2007. Christian Groth

Problem set II: More on overlapping generations models in discrete time[1]

II.1 *Technical progress in the diamond model.* Consider a Diamond OLG model with period utility specified as

$$u(c) = \frac{c^{1-\theta} - 1}{1-\theta}, \qquad \theta > 0.$$

a) How is it possible to give a meaning to the case $\theta = 1$?

b) Derive the saving function of the young. Comment.

c) Let the aggregate production function be a general neoclassical production function with CRS and assume Harrod-neutral (i.e., labour-augmenting) technical progress at a constant exogenous rate, $g > 0$. Derive the fundamental difference equation of the model.

d) Assuming that $\theta = 1$, illustrate examples of the dynamics in a diagram. Is the model necessarily "well-behaved"? Comment.

e) Assuming the production function is Cobb-Douglas, illustrate the possible dynamics in a diagram. Comment.

From now we stay within this special case ($\theta = 1$, f Cobb-Douglas).

f) Suppose the economy is in steady state. Then suddenly a permanent positive shift in the level of total factor productivity occurs. Assuming the future rate of technical progress is not affected, illustrate the dynamics in a diagram.

g) How, if at all, is the real wage per working hour in the long run affected by the shock?

h) How, if at all, is the real interest rate in the long run affected by the shock?

[1] Problems marked with * are somewhat more demanding than the others and are not typical for the exam situation.

II. 2 *A three-period OLG model.* Consider an extension of the Diamond OLG model such that people live for three periods. For an individual born at time t, let c_{1t}, c_{2t+1} and c_{3t+2} be the consumption in the first period of life ("youth"), the second period of life ("middle age period") and the third period of life ("retirement period"), respectively. The utility function of a young born at time t is $U(c_{1t}, c_{2t+1}, c_{3t+2}) = \ln c_{1t} + (1+\rho)^{-1} \ln c_{2t+1} + (1+\rho)^{-2} \ln c_{3t+2}$, where $\rho > -1$. Individuals supply inelastically $\bar{x}$ units of labour in the first period of life, one unit of labour in the second period of life, while people don't work in the third period of life. The technology side of the model is as in the two-period Diamond model, people have perfect foresight and all markets are competitive. The rate of population growth is a constant $n > -1$.

a) From now, assume $0 < \bar{x} < 1$. Is this assumption natural? Why or why not?

b) For notational simplicity, disregard for a moment the time indices t, $t+1$ and $t+2$. Set up the optimization problem of the young.

c) Derive the intertemporal budget constraint and find the optimal c_1, c_2 and c_3. Comment.

d) Find the financial wealth a_1 held by the young at the end of the first period and the financial wealth a_2 of the middle aged individual at the end of the second period ($a_2 = a_1 + s_2$, where s_2 is the saving of the middle aged individual) as functions of the relevant parameters. Do a_1 and a_2 depend on the rate of interest between the first and the second period? Comment!

e) Give a list of conditions that could make $a_{1t} < 0$. Comment!

f) Ignoring technical progress, show that the fundamental difference equation of the model is a second order non-linear difference equation.

g) If, instead of the log function, a general CRRA utility function is used, the fundamental difference equation would be a third order equation. Guess why.

II.3 *Government, income taxes and capital accumulation.* Consider a Diamond OLG model extended with government. Let G_t denote the government's purchases of goods in period t. Assume $G_t = G_0(1+n)^t$, where G_0 is a given positive number and n is the given constant rate of population growth, $n \geq 0$. The government uses G_t to provide free public consumer services, say free broadcasting services or free exhibitions and museum services.

To finance its purchases, the government levies taxes. To begin, assume that only labour income is taxed. Let the labour income tax rate be denoted τ_t. The government budget is balanced every period. Assume that G_0 is "small" enough in relation to K_0 and L_0 (standard notation) so that for all t we have $0 \leq \tau_t < 1$. Let the aggregate production function satisfy the Inada conditions and ignore technical progress.

a) Assume from now that an individual born at time t has the utility function $U(c_{1t}, c_{2t+1}, G_t, G_{t+1}) = \ln c_{1t} + \beta \ln G_t + (1+\rho)^{-1} [\ln c_{2t+1} + \beta \ln G_{t+1}]$, where β is a positive parameter (an indicator of how strongly the public good is desired). List at least three *special* features of this two-goods-two-periods utility function.

b) Derive the saving function of the young.

c) Write down 1) the balance sheet for the utilization of output and 2) the government budget constraint. Find the tax rate τ_t, given k_t (standard notation). Derive the fundamental difference equation of the model and illustrate the dynamics in a diagram.

d) Is it true or not true that in the present model, labour income taxes are similar to lump-sum taxes in their effect on the behaviour of the young? Why?

Let the aggregate production function be Cobb-Douglas.

e) How does the long-run capital intensity depend on the level of G_0? A qualitative answer based on a phase diagram is enough.

f) Assume that the economy has been in its steady state until period 0. Then there is an unanticipated change in government tax policy so that also capital income is taxed, i.e., from period 0 capital income is taxed at the same proportional rate as labour income, this common rate being denoted σ_t. The path of government expenditure is unchanged and the budget is still balanced. Find the new tax rate, σ_t, for $t = 0, 1, 2, \ldots$. *Hint:* Repeat the steps b) and c) in this new situation.

g) Show that the long-run capital intensity will be higher than with pure labour income taxation. Explain in words.

h) Assume that the economy has been in its new steady state for a long time. Then there is an unanticipated change in government tax policy so that *only* capital income is taxed, i.e., from now capital income is taxed at the rate required for a balanced budget, this rate being denoted $\tilde{\sigma}_t$. How is the long-run capital intensity affected by this?

II.4* *Non-separable utility.* Consider an OLG model which is similar to the Diamond model, except that the utility function of the young is *not* time-separable. Assume it is a general two-goods utility function $U(c_{1t}, c_{2t+1})$, which is strictly quasi concave,[2] twice continuously differentiable and has $U_1 > 0$, $U_2 > 0$. Let the aggregate production satisfy the Inada conditions. Ignore technical progress.

a) In this model, show that the saving of the young is a function $s(w_t, r_{t+1})$ and that to sign s_w we need to know whether c_{2t+1} is a *normal good* or not.[3] Do you consider normality of c_{2t+1} to be a natural ("realistic") assumption in the context of the model (period length about 30 years)? Is normality of c_{2t+1} ensured if utility is time separable?

For the purpose of getting a feeling of the possible dynamics implied by a general model, we shall carry on with the analysis without any restriction on the sign of s_w.

b) Derive the fundamental difference equation for the model and draw a phase diagram showing the case of damped oscillations around a unique non-trivial steady state. Give some necessary conditions for this case to arise in terms of properties of the saving function of the young.

c) "In case there are exactly two non-trivial steady states, *both* may be unstable." Is this statement true or not true? Explain!

d) Draw a phase diagram showing the case where the only stable long-run states of the economy are the zero steady state and a stable cycle.

II.5 *Realized and non-realized expectations.* Consider an OLG model of a small open economy with endogenous retirement and a voluntary early retirement scheme as in Section 3.2.2. Suppose a shock changes the circumstances in period t compared to what was

[2]That $U(c_1, c_2)$ is *strictly quasi concave* is equivalent to the indifference curves being strictly convex to the origin. Algebraically, when U is twice continuously differentiable and $U_1 > 0$, $U_2 > 0$, then: if the inequality

$$(U_1)^2 U_{22} - 2U_1 U_2 U_{12} + (U_2)^2 U_{11} < 0$$

holds for all (c_1, c_2), then U is strictly quasi concave; generically, that is, for "almost all" practical purposes, "if" in the statement can be strengthened to "if and only if".

[3]Given the utility function $U(c_1, c_2)$, we know from microeconomics that c_2 is a normal good, if and only if $U_{11} - (U_1/U_2)U_{21} < 0$.

expected. Then the old individual re-optimizes at the beginning of period t, facing the *one-period* problem $\max\left[\ln c_{2t} + \gamma \ln(1-\ell_t)\right]$ s.t. $c_{2t} = (1+r)\bar{s}_{t-1} + \hat{w}_{2t}\ell_t + \hat{m}_t(1-\ell_t)$, where $\bar{s}_{t-1}$ denotes the now exogenous saving undertaken by this person in the previous period.

a) Solve the problem.

b) Does the solution (c_{2t}, ℓ_t) to this one-period-problem coincide with the as-young-in-period-$t-1$ *planned* actions, which would have been realized in the absence of the shock? Why or why not?

c) Suppose the shock mentioned is a policy shock, implying a lower $\hat{m}_t$ than expected. Compare actual labour supply of the old in period t to planned labour supply. Comment.

II.6 *Senior policy.* Consider an OLG model of a small open economy with endogenous retirement and a voluntary early retirement scheme as in Section 3.2.2. The rate of technical progress is g and the real rate of interest at the international market for financial capital is r (both g and r constant). The tax rate, τ, required to finance the early retirement compensation, given the degree of compensation is equal to μ, is given by

$$\tau = \frac{\mu\gamma(\frac{1+r}{1+g}+1)}{(1-\mu)\left[(2+n)(2+\rho+\gamma) - \gamma(\frac{1+r}{1+g}+1)\right]},$$

where n is the constant rate of population growth and γ is the weight on leisure in the utility function of a young person: $U = \ln c_1 + (1+\rho)^{-1}\left[\ln c_2 + \gamma \ln(1-\ell)\right]$. Suppose, a senior policy can improve working conditions for elderly people such that γ is decreased. Derive a formula showing the effect on τ of such a senior policy. Is the sign of the effect unambiguous? Comment.

II.7 *Intertemporal substitution in labour supply.* Consider an individual who lives two periods (as young and as old) and works and consumes in both periods. For simplicity, assume the individual has no inherited financial wealth and that there are no taxes and no uncertainty. Let $\rho > -1$, $\gamma > 0$ and $\sigma > 0$ be given parameters. The optimization problem of the young is:

$$\max U = \ln c_1 - \gamma\frac{\sigma}{\sigma+1}\ell_1^{\frac{\sigma+1}{\sigma}} + \frac{1}{1+\rho}\ \ln c_2 - \gamma\frac{\sigma}{\sigma+1}\ell_2^{\frac{\sigma+1}{\sigma}} \qquad \text{s.t.}$$

$$\begin{aligned} c_1 + \frac{c_2}{1+r} &= w_1\ell_1 + \frac{w_2\ell_2}{1+r}, \quad \text{where} \\ c_1 &> 0, \quad c_2 > 0, \quad 0 \le \ell_1 \le 1, \quad 0 \le \ell_2 \le 1. \end{aligned}$$

Here, c_1 and ℓ_1 are consumption and labour supply, respectively, in the first period and c_2 and ℓ_2 are planned consumption and labour supply, respectively, in the second period, w_1 = real wage in period 1, w_2 = (expected) real wage in period 2 and r = (expected) real interest rate. Time available in each period is 1 time unit so that $1 - \ell_t$ is leisure in period t. We assume parameter values are such that the restriction $\ell_t \le 1$, $t = 1, 2$, is never binding.

a) Interpret and solve the optimization problem, i.e., determine c_1, c_2, ℓ_1 and ℓ_2 as functions of variables that are exogenous to the individual. In fact, in this problem it is possible to find *explicit* solutions. *Hint:* Choosing the substitution method (recommended), you may use the budget constraint to substitute for c_1 in U, considering only c_2, ℓ_1 and ℓ_2 as decision variables. Calculate the three first-order conditions. Substituting these into the intertemporal budget constraint you find an explicit solution for c_1. Finally, the-first order conditions give c_2, ℓ_1 and ℓ_2 in terms of this solution.

b) Determine the intertemporal elasticity of substitution in labour supply.

c) For interpretation purposes, rewrite the intertemporal budget constraint such that the right-hand-side is exogenous to the individual.

d) What is the effect on c_1 of a rise in the interest rate? Comment in terms of the three Slutsky effects.

e) What is the effect on ℓ_1, ℓ_2 and ℓ_1/ℓ_2, respectively, of a rise in the interest rate? Comment in terms of the three Slutsky effects.

f) The intertemporal elasticity of substitution in labour supply is typically estimated (with period length equal to one year) to be quite small, say in the range from 0.00 (or even negative) to 0.45, see Course Material, p. 139, last column in Table 1.22. Why is this a problem if you want to explain the observed business cycle fluctuations in employment by intertemporal substitution in labour supply?

II.8 *Employer's contribution, taxation, wages and labour supply in a small open economy.*[4] Consider a two-period OLG model for a small open economy (SOE), where people

[4] This problem is based on a suggestion by Mads Diness Jensen.

work and consume in both periods (no mobility of labour across borders). There is at the world market for financial capital a given constant real interest rate, $r > 0$. Let w_t denote employers' total labour costs per unit of labour, that is, $w_t = (1+\eta_t)\bar{w}_t$, where $\bar{w}_t$ is the real wage that the worker receives (before tax) in period t and $\eta_t \geq 0$ is employers' contribution rate (representing non-wage labour costs paid to the public sector) in period t. There is a flat tax rate, τ_t, on labour income, $0 \leq \tau_t < 1$, so that the after-tax real wage is $\hat{w}_t = (1-\tau_t)\bar{w}_t$. There are no taxes on capital income and no corporate taxation.

The aggregate production function is $Y_t = F(K_t, T_t L_t)$, where F is a neoclassical production function with CRS and Y_t, K_t and L_t are output, capital and labour input, respectively, in period t, while T_t is the technology level, which grows at a constant rate $g > 0$. Call the capital depreciation rate δ, a constant, $0 \leq \delta \leq 1$. There is perfect competition on all markets and no uncertainty.

a) Determine employers' total labour costs per unit of labour, w_t, in general equilibrium. Relate your result to the figure below and to the current public debate about globalisation and competition from low-wage countries.

b) Determine the real-wage, $\bar{w}_t$, in general equilibrium. How does an increase in employer's contribution rate, η_t, affect w_t and $\bar{w}_t$, respectively? Comment.

c) Determine the after-tax real wage, $\hat{w}_t$, in general equilibrium. How does an increase in the tax rate τ_t affect w_t, $\bar{w}_t$ and $\hat{w}_t$, respectively? Comment.

We assume from now that the employers' contribution rate and the tax rate are constant over time at the levels η and τ, respectively, and that they are known by all agents.

Let $\rho > -1$, $\gamma > 0$ and $\sigma > 0$ be given parameters. The utility function of the young in period t is:

$$U_t = \ln c_{1t} - \gamma \frac{\sigma}{\sigma+1} \ell_{1t}^{\frac{\sigma+1}{\sigma}} + \frac{1}{1+\rho} \left[\ln c_{2t+1} - \gamma \frac{\sigma}{\sigma+1} \ell_{2t+1}^{\frac{\sigma+1}{\sigma}} \right],$$

where c_{1t} and ℓ_{1t} are consumption and labour supply, respectively, of the young in period t; further, c_{2t+1} and ℓ_{2t+1} are the planned consumption and labour supply, respectively, as old in period $t+1$. Time available as young is 1 time unit and so is time available as old. We assume parameters are such that corner solutions never arise. The number of young people in period t is N_t and the population growth rate is $n > -1$, a constant.

d) Write down the intertemporal budget constraint for the young in period t.

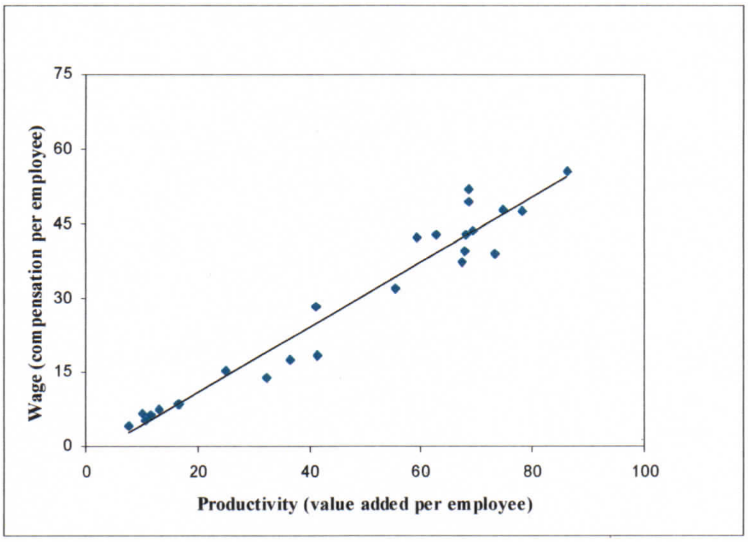

Figure 1: Wage (total labour cost) and value added per employee in manufacturing industry across OECD countries 2003. Source: AMECO (the database of the European Commission).

e) Determine the aggregate labour supply in period t. *Hint:* you may use the results from Section 3.2.3 or from Problem II.7.a.

f) Determine the aggregate capital stock in period t.

g) Comment on the role of η and τ for the aggregate labour supply and the aggregate capital stock. *Hint:* compare two countries that differ only w.r.t. η and τ.[5]

h) The conclusion at g) is crucially dependant on at least two questionable assumptions. Which assumptions? Comment.

II.9 *Social security, the bequest motive and the question of neutrality of public finance.* Consider a Diamond OLG model extended with a standard pay-as-you-go social security program (tax-financed pensions): $p_t = (1+n)d_t$. Let the utility function be $U(c_{1t}, c_{2t+1}) = \ln c_{1t} + (1+\rho)^{-1} \ln c_{2t+1}$ and let the aggregate production be Cobb-Douglas. Ignore technical progress.

a) Set up and solve the decision problem of the young.

b) Is a small increase in the social security tax, d_t, neutral as regards the resource allocation in general equilibrium? Use either your general knowledge or the model to derive an answer.

[5]This is generally more simple than considering a shift at time t.

c) Set up an extended model with a bequest motive as in the Barro model, i.e., the utility of the children enters the utility function of the parent with an effective discount rate $\bar{R} > 0$. Suppose the bequest motive is operative in the steady state.

d) Answer question b) for the extended model.

e) In the extended model suppose the government decides to reduce the social security tax d_t by a small amount and use some debt-financing instead (without violating the intertemporal government budget constraint). Will this have an effect on the allocation in the economy? Why or why not?

II.10 Commenting on the fact that the Danish Welfare Commission had proposed a decrease in taxation on labour income without a corresponding simultaneous increase in other taxes, a journalist wrote: "Because the proposed decrease in taxation on labour income is not accompanied by simultaneous increases in other taxes, the positive effect on labour supply is likely to be considerable." Give your evaluation of this claim in terms of the different relevant "effects" (substitution effect etc.).

II.11 *Short questions.*

a) "When the Diamond OLG model is extended with a bequest motive (such that the utility of the children enters the utility function of the parents), the likelihood of dynamic inefficiency arising becomes smaller than in the model without a bequest motive." True or false? Explain.

b) "Extending the Diamond OLG model with a bequest motive increases the likelihood of the long-run interest rate being equal to the modified golden rule value." True or false? Explain.

c) "Extending the Diamond OLG model with a bequest motive increases the likelihood that the market equilibrium is equal to what a social planner (with the same effective intergenerational discount rate as the private individuals) would prefer." True or false? Explain.

d) "Extending the Diamond OLG model with a bequest motive increases the likelihood of Ricardian Equivalence to hold." True or false? Provide economic intuition.

II.12 *Short questions about intergenerational and intragenerational wealth distribution in Diamond-style OLG models.*

Esercizio 6

In un sistema economico aperto agli scambi con l'estero, descritto da un modello keynesiano di sola parte reale, valgono le seguenti relazioni:
$C = 0{,}8Y_d$
$I = 200$
$X = 300$
$M = 0{,}16Y$
$G = 160$
$t = 30\%$

a) Calcolare il livello di equilibrio del reddito.

b) Calcolare il livello del reddito che assicurerebbe un deficit nella bilancia commerciale pari a 20.

c) Con riferimento alle relazioni iniziali, calcolare:
   - di quanto dovrebbe variare la spesa pubblica per aumentare il reddito di 100
   - e come varierebbe il saldo del bilancio pubblico nella nuova situazione che verrebbe a determinarsi

Soluzione

a) $Y = C + I + G + X - M = 0{,}8Y_d + 200 + 160 + 300 - 0{,}16Y$

Essendo Y_d = Y- T = Y- tY = Y (1-t), dove t = 0,30 e (1-t) = 0,70

$$Y = \frac{1}{1 - 0{,}8 \cdot 0{,}7 + 0{,}16}(200 + 160 + 300) = \frac{1}{0{,}6}660 = 1100$$

b) Se deficit = 20 >> M = X + 20 = 300 + 20 = 320

Essendo M = 0,16Y >> per M = 320, Y = 320/ 0,16 = 2000

c) Il nuovo valore del reddito dovrà essere: 1100 +100 = 1200

$$1200 = \frac{1}{0.6}(200 + G + 300) = \frac{1}{0{,}6}500 + G$$

500 + G = 1200 x 0,6; >> G = 720 – 500 = 220

Rispetto al valore iniziale di 16 0, la spesa pubblica deve dunque aumentare di 60

Nella situazione iniziale T = 0,3 x 1100 = 330; G = 160; T – G = 170
Nella nuova situazione T = 0,3 x 1200 = 360; G = 220; T – G = 140
Il saldo rimarrebbe attivo, ma si ridurrebbe di 30

Exercise 1 *Sia data una funzione di utilità di un agente del tipo* $u = x^{1/4}$. *La remunerazione dell'agente è data dal seguente prospetto incerto:*

- $w_h = 1800\$$ con probabilità $p = 0.25$
- $w_L = 1200\$$ con probabilità $1 - p = 0.75$

a. Si calcoli il valore monetario atteso (VMA), l'equivalente certo (EC) e il premio per il rischio (PR) di questa scommessa.

Il VMA è dato da: $0.25 \cdot 1800 + 0.75 \cdot 1200 = 1350$

Il EC si calcola dalla funzione di utilità, ed è il valore w che restituisce la stessa utilità attesa della scommessa.

L'Utilità attesa è calcolata come: $0.25 \cdot (1800)^{1/4} + 0.75 \cdot 1200^{1/4} = 6.04$, da cui il EC è il valore w che soddisfa l'equazione: $w^{1/4} = 6.04 \rightarrow w = 1333.2$

Il PR è la differenza tra VMA e EC: PR$=1350 - 1333.2 = 16.77$

b. Si dia una definizione ed intuizione di questi concetti

Il VMA è il valore oggettivo della scommessa, cioè ciò che in media si può ottenere partecipando alla scommessa. Il EC è, invece, il valore soggettivo, che dipende dalla funzione di utilità dell'individuo: è l'ammontare che rende l'individuo *indifferente* tra ottenere il CE con certezza e partecipare alla scommessa con guadagno aleatorio pari al VMA. Il PR è l'ammontare massimo che l'individuo pagherebbe per liberarsi dal rischio della scommessa.

c. E' l'agente avverso, propenso o neutrale al rischio?

Poichè il PR è positivo, l'individuo è avverso al rischio.

Exercise 2 *Ad un individuo viene proposta la seguente scommessa: vincere 500 mila euro oppure vincere 10 mila euro con la stessa probabilità. Se l'individuo non accetta la scommessa, ottiene 100 mila euro con certezza. Si indichi:*

a. il valore monetario atteso della scommessa.
$VMA = 0.5 \cdot 500000 + 0.5 \cdot 10000 = 255000$

b. la scelta che farebbe un individuo neutrale al rischio.
Un individuo neutrale al rischio accetterebbe 100 mila euro se questo valore fosse superiore al VMA della scommessa; in questo caso, non accetta la scommessa.

c. la scelta che farebbe un individuo con utilità $u = x^{1/2}$
L'utilità attesa di tale individuo dalla scommessa rischiosa è $0.5 \cdot \sqrt{500000} + 0.5 \cdot \sqrt{10000} = 403.55$. Da qui, il certo equivalente della scommessa è il valore X tale che $\sqrt{X} = 403.55 \rightarrow X = 162855.33$. Tale individuo sarebbe indifferente tra la scommessa e ricevere con certezza 162855.33 euro, quindi rifiuta i 100 mila euro.

d. il valore minimo che il secondo giocatore sarebbe disposto ad accettare invece di giocare la scommessa.
Tale valore minimo è il certo equivalente della scommessa, dunque 162855.33 euro.

Exercise 3 *Il proprietario di un'auto che vale 20 mila euro ha una probabilità del 2% (0.02) che la sua auto gli sia rubata.*

a. Qual è il valore atteso se il proprietario non ha un'assicurazione?

Il valore atteso VA senza assicurazione è dato da: $0.02 \cdot 0 + 0.98 \cdot 20000 = 19600$ euro

b. Un'assicurazione gli offre il seguente contratto: un rimborso (R) pari al valore dell'auto se questa viene rubata, in cambio di un premio (P) di 500 euro. Se l'individuo è neutrale al rischio, conviene assicurarsi?

Per un individuo neutrale al rischio, il VA della seconda scommessa è: $0.02 \cdot (20000 - 20000 + 20000 - 500) + 0.98 \cdot (20000 - 500) = 19500 < 19600$: per questo individuo non conviene assicurarsi.

c. E se l'individuo è avverso al rischio, con utilità $u = x^{1/2}$?

L'utilità attesa della scommessa senza assicurazione è: $0.02 \cdot 0 + 0.98\sqrt{20000} = 138.59$, mentre con l'assicurazione, l'utilità attesa è $\sqrt{19500} = 139.64 \rightarrow$ per tale individuo, è conveniente assicurarsi, in quanto l'utilità attesa senza assicurazione è minore dell'utilità attesa con assicurazione.

d. Qual è il premio assicurativo massimo che l'individuo del punto c vorrà pagare?

Fin tanto che, pagando il premio P e ricevendo il valore della macchina come bonus, l'utilità attesa con assicurazione resta maggiore dell'utilità attesa senza assicurazione, l'individuo sarà contento di assicurarsi. Il premio massimo è allora trovato in modo che sia rispettata questa condizione: $\sqrt{20000 - P} \geq 138.59 \rightarrow P_{\max} = 20000 - 138.59^2 = 792.81$

[Nota: l'utilità attesa con assicurazione è la radice del valore dell'auto al netto del premio, perché l'assicurazione è completa, e dunque la ricchezza nei due stati del mondo è la stessa]

[Nota 2: il premio max. corrisponde alla differenza tra valore dell'auto e certo equivalente senza assicurazione]

Esercizio 50

In un sistema economico aperto agli scambi con l'estero, descritto da un modello keynesiano di sola parte reale, valgono le seguenti relazioni:

$C = 0{,}8Y_d$
$I = 200$
$X = 300$
$M = 0{,}16Y$
$G = 160$
$t = 30\%$

d) Calcolare il livello di equilibrio del reddito.

e) Calcolare il livello del reddito che assicurerebbe un deficit nella bilancia commerciale pari a 20.

f) Con riferimento alle relazioni iniziali, calcolare:
- di quanto dovrebbe variare la spesa pubblica per aumentare il reddito di 100
- e come varierebbe il saldo del bilancio pubblico nella nuova situazione che verrebbe a determinarsi

Soluzioni

c) $Y = C + I + G + X - M = 0{,}8Y_d + 200 + 160 + 300 - 0{,}16Y$

Essendo Y_d = Y- T = Y- tY = Y (1-t), dove t = 0,30 e (1-t) = 0,70 **[1]**

$$Y = \frac{1}{1-0{,}8\cdot 0{,}7+0{,}16}(200+160+300) = \frac{1}{0{,}6}660 = 1100 \; \textbf{[3]}$$

d) Se deficit = 20 >> M = X + 20 = 300 + 20 = 320

Essendo M = 0,16Y >> per M = 320, Y = 320/ 0,16 = 2000 **[2]**

c) Il nuovo valore del reddito dovrà essere: 1100 +100 = 1200

$$1200 = \frac{1}{0.6}(200 + G + 300) = \frac{1}{0{,}6}500 + G$$

500 + G = 1200 x 0,6; >> G = 720 – 500 = 220

Rispetto al valore iniziale di 16 0, la spesa pubblica deve dunque aumentare di 60 **[3]**

Nella situazione iniziale T = 0,3 x 1100 = 330; G = 160; T – G = 170
Nella nuova situazione T = 0,3 x 1200 = 360; G = 220; T – G = 140
Il saldo rimarrebbe attivo, ma si ridurrebbe di 30 **[2]**

Esercizio 127

Nel 2002 due paesi hanno, dal punto di vista macroeconomico, la medesima situazione. In entrambi i paesi valgono i seguenti dati:

Y= 100; c= 0,6; I= 20

In entrambi i paesi non vi sono scambi con l'estero, le imposte sono in somma fissa e il bilancio pubblico è in pareggio. Nell'anno 2003 il reddito è ancora identico nei due paesi, ma è cresciuto per entrambi a 150. Tuttavia nel paese 1 questo aumento è scaturito interamente dall'aumento degli investimenti. Nel paese 2, invece, l'aumento del reddito è derivato dall'espansione della spesa pubblica che però è avvenuta salvaguardando il pareggio di bilancio.

Si determini:

h) a quale livello si trovava la spesa pubblica in entrambi i paesi nel 2002.

i) quanto sono aumentati gli investimenti nel paese 1 nel 2003

j) quanto è cresciuta la spesa pubblica nel paese 2 nel 2003.

Supponendo ora che la funzione degli investimenti sia:

I = 60-400i si dica:

k) quanto deve essere variato il tasso di interesse nel paese 1 nel 2003.

Soluzioni

a) $Y = 1 / 0{,}4\ (20 - 0{,}6T + G) \rightarrow 100 = 2{,}5\ (20 + 0{,}4G) \rightarrow G = T = 50$

b) $\Delta Y = 50 = 2{,}5\ \Delta I \rightarrow \Delta I = 20$

c) $\Delta Y = 50 = \Delta G$ (Haavelmo)

d) Il tasso di interesse deve essere diminuito del 5%. Infatti, I al 2002 era 20, questo implica che i fosse 0,10 (dall'equazione degli investimenti: $20 = 60 - 400i$). I al 2003 deve essere 40, quindi il nuovo i è 0,05 ($40 = 60 - 400i$).

Esercizio 32

A) Si precisi la condizione analitica che assicura la riduzione del rapporto tra debito pubblico e reddito nazionale in termini nominali, assumendo che il saldo primario sia nullo.

B) Si consideri un sistema economico che al tempo 0 è così caratterizzato:

il bilancio pubblico primario è in pareggio;

$L_d^1 = 0{,}20Y$; $L_d^2 = 1.000 - 400i$; $L_s = 2.420$, $P = 1$; $Y = 4.960$;

Si supponga che al tempo 1 il governo decida un livello di spesa pubblica interamente finanziato attraverso imposte (così da realizzare un saldo primario nullo) e tale da far aumentare il reddito reale in misura pari a $\Delta Y = 1.240$.

In conseguenza di ciò si registra un tasso d'inflazione $\dot{p} = 0{,}10$ e il nuovo livello dei prezzi cresce fino a $P_1 = 1{,}1$

B1) Si determini il tasso d'interesse nominale

B2) Si determini la variazione percentuale del rapporto tra debito pubblico e reddito che si verifica nel periodo 1.

Soluzione

A) Assumendo che il saldo primario sia nullo, la condizione che assicura la riduzione del rapporto tra debito pubblico e reddito nazionale in termini nominali è che il tasso d'interesse reale sia minore del saggio di crescita del Pil.

B1)

$Y_1 = 4.960 + 1.240 = 6.200$

$L_s/P_1 = kY_1 + L_0 - vi \rightarrow 2420/1{,}1 = 0{,}20 \times 6200 + 1000 - 400 \times i \rightarrow 2200 = 2240 - 400i \rightarrow$

$i = 40/400 = 0{,}10$

$\dot{Y} = 1.240/4.960 = 0{,}25$

B2) $\dot{(B/pY)} = i - \dot{p} - \dot{Y} = 0{,}10 - 0{,}10 - 0{,}25 = -0{,}25.$

Esercizio 21

In un sistema di economia aperta valgono le seguenti relazioni:

Ld = 600 + 0,2Y - 1000i
M = 0,2 Y
X = 300
Ls/p = 1000
i = 0,08

Calcolare:
1) il reddito di equilibrio;
2) il saldo della bilancia commerciale;
3) la variazione di offerta reale di moneta necessaria a portare la bilancia commerciale in equilibrio e il tasso di interesse al 10%.

soluzioni

1. $\frac{Ls}{p} = Ld \rightarrow 1000 = 600 + 0{,}2Y - 1000 \cdot 0{,}08 \quad \rightarrow \quad Y = 2400$

2. BC = X – M = 300 – 0,2(2400) = 300 – 480 = -180

3. Per avere un pareggio di BC occorre ΔM = - 180, quindi:
-180 = 0,2(ΔY) da cui ΔY = -900

Quindi:

$$\frac{Ls}{p} = Ld \rightarrow \frac{Ls}{p} = 600 + 0{,}2(1500) - 1000(0{,}10) = 800 \rightarrow \Delta\frac{Ls}{p} = -200$$

Esercizio 37

Si consideri una economia chiusa agli scambi con l'estero caratterizzata dalle seguenti relazioni:
C= c(1-t)Y ***c= 0,80*** ***t=0,20***

$I = \bar{I}$ **G= 26**

Sapendo che il bilancio pubblico si trova in deficit per un ammontare pari a 6, individuare:

a) il reddito di equilibrio
b) il livello degli investimenti

Ipotizzando che il livello degli investimenti sia quello appena determinato e che gli altri parametri, eccetto la spesa pubblica, non varino determinare:

c) Il livello della spesa pubblica che assicurerebbe il pareggio di bilancio.

Soluzioni

a) Essendo il deficit pari a 6 e la spesa pubblica pari a 26, le entrate fiscali saranno 20. Cioè: tY=20. Poiché t=0,20, ne segue che Y=100

b) Per risolvere occorre impostare il moltiplicatore del reddito con I come incognita:

$$Y = \frac{1}{1-c(1-t)}[I+G]; \; 100 = \frac{1}{1-(0{,}8\times 0.8)}[I+26]$$

$$36 = I + 26 \Rightarrow I = 10$$

c) Per trovare il G di pareggio del bilancio si parte da: tY=G, quindi:

$$0{,}2\left[\frac{1}{1-0{,}64}(10+G)\right] = G; \; \frac{2}{0{,}36} = G\left(1-\frac{0{,}2}{0{,}36}\right); 2 = 0{,}16G$$

$$G = 12{,}5$$

Esercizio 49

Si consideri un'economia chiusa ai rapporti con l'estero, nella quale valgano le seguenti relazioni:

$c = 0{,}8$, $\bar{I} = 340$, $\pi = 10$, $FL = 250$.

Il governo intende raggiungere il minimo livello di disoccupazione possibile, tuttavia è soggetto al vincolo che il bilancio pubblico non abbia un saldo negativo (deficit pubblico) più ampio di -40.

Con riferimento ad un modello keynesiano di sola parte reale, si determini:

d. il livello di spesa pubblica scelto dal governo, sapendo che il gettito delle imposte, in somma fissa, è pari a 100;
e. In corrispondenza di tale livello della spesa pubblica, il rapporto tra deficit del bilancio pubblico e reddito prodotto nell'economia;
f. Il tasso di disoccupazione raggiunto.

Soluzioni

a) Poiché: $\uparrow G \rightarrow \uparrow Y \rightarrow \uparrow N \rightarrow \downarrow u$, il Governo, per ottenere il tasso di disoccupazione più basso possibile, sceglierà la MAX G dato il vincolo relativo al deficit:

MAX deficit ammesso: $T - G = -40$, quindi $G = 100 + 40 = 140$ livello di spesa pubblica

b) $Y = \dfrac{1}{1-c}\left(\bar{I} + G - c\bar{T}\right) \rightarrow$ moltiplicatore del reddito in economia chiusa, sola parte reale, con imposte in somma fissa:

$$Y = \frac{1}{1-0{,}8}(340 + 140 - 0{,}8 \times 100) = 5 \times 400 = 2000$$ livello del reddito

$$\frac{T - G}{Y} = \frac{100 - 140}{2000} = -0{,}02$$ rapporto deficit/PIL

c) $N = Y/\pi = 2000/10 = 200$

$$u = \frac{FL - N}{N} = \frac{50}{250} = 0{,}20$$ tasso di disoccupazione

Modello di Marino-Timpano (International Journal of Applied Economics and Econometrics, Vol. 17, n.3, 2009) sulla competizione fra imprese *profit* e imprese *non-profit*

Per introdurre un approccio evoluzionistico, è in primo luogo necessario definire il concetto di *fitness*. Nei modelli biologici la fitness è definita come la probabilità di sopravvivenza. Nei modelli economici la fitness è un sinonimo di payoff. Nei modelli di teoria dei giochi la fitness può essere definita sia in relazione ad un singolo agente sia in relazione a un gruppo di agenti.

Come noto in letteratura, il contesto della teoria dei giochi in generale e dei giochi evolutivi in particolare pone forti limitazioni al "behavioural content" dei modelli. Un approccio basato sulla teoria dei giochi è in sostanza una descrizione molto semplice della realtà.

Un punto fondamentale è la distinzione fra comportamenti altruistici e selfish di tipo strategico. Nell'ambito della teoria dei giochi un'impresa può essere definita "selfish" quando gioca una strategia non cooperativa in gioco del tipo «"Dilemma del Prigioniero" e un'impresa può essere definita altruista quando gioca una strategia cooperativa nello stesso contesto» (Bergstrom, Stark, 1993).

Il concetto di comportamento altruistico e selfish di tipo strategico è perfettamente congruente con la precedente definizione

A questo punto è opportuno trattare il problema della competizione fra imprese selfish e imprese altruiste.

In un contesto evolutivo il payoff dipenderà dal tipo d'impresa che emergerà e ciao sarà correlato con il rapporto fra le imprese che si comportano in maniera altruista e il totale delle imprese. Se k è il rapporto fra le imprese che si comportano in maniera altruista e il totale delle imprese, allora$(1-k)$ è il rapporto fra le imprese che si comportano in maniera selfish e il totale delle imprese, il pay-off atteso sarà allora:

$$\mathrm{E}[alt] = k\Pi^{s}_{alt} + (1-k)\Pi^{c}_{al} \qquad (1)$$

$$\mathrm{E}[sel] = \mathrm{k}\Pi^{c}_{sel} + (1-\mathrm{k})\Pi^{s}_{sel} \qquad (2)$$

dove Π^{s}_{alt} è il payoff quando i due gruppi giocano in maniera cooperativa, Π^{s}_{sel} è il payoff quando i due gruppi giocano in maniera non cooperativa, Π^{c}_{sel} è il payoff quando il primo gruppo gioca in maniera non cooperativa e il secondo gruppo gioca in maniera cooperativa, Π^{c}_{alt} è il payoff quando il primo gruppo gioca in maniera cooperativa e il secondo gruppo gioca in maniera non cooperativa.

Se due imprese altruiste si incontrano, allora si deve assumere che il guadagno di fitness che ciascuno di loro riceve dal comportamento delle altre imprese è maggiore della perdita di fitness che loro producono con il proprio comportamento altruistico. Nel caso opposto, se due imprese *selfish* si incontrano, non vi è nessun cambiamento di fitness. Infine, se un'impresa *selfish* incontra una impresa *non-selfish*, allora vi è un guadagno di fitness per le imprese *selfish* e una perdita di fitness per le imprese *non-selfish*.

Usando l'approccio evoluzionistico possiamo descrivere la situazione con un particolare gioco chiamato "Stug Hunt" game, con le seguenti assunzioni:

$\Pi^{s}_{alt} > \Pi^{s}_{sel}$, $\Pi^{c}_{sel} > \Pi^{c}_{alt}$ and $\Pi^{s}_{sel} > \Pi^{c}_{alt}$, $\Pi^{s}_{alt} > \Pi^{c}_{sel}$, (3)

una matrice dei payoff standard per un gioco del tipo *Stug-Hunt* può essere scritta nella seguente forma:

Altruist

Altruist	Π^s_{alt} Π^s_{alt}	Π^c_{alt} Π^c_{sel}
Selfish	Π^c_{sel} Π^c_{alt}	Π^s_{sel} Π^s_{sel}

Un "Repeated Stug-Hunt Game" è una descrizione di alcune caratteristiche dell'evoluzione dinamica della competizione fra imprese altruiste e imprese selfish. È molto utile definire le soluzioni del gioco e la loro stabilità.

Se si considerano quindi due differenti gruppi d'imprese in uno specifico settore è possible ottenere tre differenti risultati che emergono da "Repeated Stug-Hunt Game":

1) solo il primo gruppo sopravvive;

2) solo il secondo gruppo sopravvive;

3) il primo e il secondo gruppo sopravvivono in uno stesso settore.

Ovviamente il termine "solo il primo gruppo sopravvive nel settore" non implica necessariamente l'estinzione dell'altro gruppo, ma semplicemente la specializzazione del settore.

Nel lavoro sarà modellata la competizione e il meccanismo di selezione tra imprese selfish e imprese altruiste nel contesto della "Evolutionary Game Theory".

Supponiamo che all'inizio del gioco un certo numero di imprese possa essere individuato a partire dalla sua attitudine nei confronti della cooperazione.

Se il mercato è sufficientemente ampio in maniera tale da permettere la sopravvivenza dei due gruppi, cioè la circostanza che il payoff di coesistenza sia non negativo con probabilità 1, allora i precedenti tre casi possono essere associati ai payoff:

- nel caso 1 solo il primo gruppo sopravvive e il payoff è Π^s_{sel} (*specialisation equilibrium*);
- nel caso 2 solo il secondo gruppo sopravvive e il payoff è Π^s_{alt} (*specialisation equilibrium*);
- nel caso 3 vi è coesistenza tra I due gruppi di imprese e i rispettivi payoff di coesistenza sono Π^c_{sel} e Π^c_{alt} (*coexistence equilibrium*).

5.5.1. *La dinamica del sistema*

Vi sono differenti maniere per calcolare i rapporti *k* e *(1-k)*:

- il primo modo consiste nello studiare come da un processo di replica possa emergere una soluzione;
- un secondo approccio può essere basato su metodi di analisi combinatoria;
- un terzo metodo può essere costituito dallo studio delle soluzioni del sistema di equazioni differenziali associato al processo di competizione e di selezione;

In questo lavoro si userà il terzo approccio.

Prima di studiare la soluzione dinamica è necessario fare alcune assunzioni sul gioco.

La prima considerazione concerne la simmetria. Gli *Stug Hunt Games* simmetrici sono stati ampiamente studiati. Usando questa formulazione del gioco le soluzioni che emergono sono del tipo "selfish/selfish" e del tipo "altruist/altruist", che sono gli attrattori asintotici per il sistema. Le altre due soluzioni (coesistenza) sono solo temporanee. La soluzione del tipo "selfish/selfish" è chiamata "risk dominant equilibrium" e la soluzione "altruist/altruist" è chiamato "payoff dominant equilibrium".

C'è un dibattito in letteratura tra i due equilibri in strategia pura . Alcuni autori pensano che la scelta razionale è il *payoff dominant equilibrium* (Harsanyi, Selten, 1988), altri autori (Carlsson, Van Damme, 1993) si schierano a favore del *risk dominant equilibrium*. Il *"payoff dominant equilibrium"* può essere più difficilmente raggiunto in grandi gruppi, che in piccoli gruppi (Mailath, 1998). I giochi simmetrici non sono particolarmente utili per gli obiettivi di questo scritto. Al contrario i giochi asimmetrici sono più attrattivi.

Il gioco simmetrico ha la proprietà che le strategie disponibile per il giocatore non dipendono dal loro ruolo. L'assunzione che in un gioco simmetrico gli agenti non possono influenzare il loro ruolo è definito come "no role identification" (Mailath, 1998). Alla fine c'è solo una popolazione e i gruppi non sono distinguibili.

Al contrario, nei giochi asimmetrici ogni giocatore è identificato dal suo stato iniziale. Quindi è sempre possibile distinguere tra giocatori in ogni momento del gioco, anche quando i giocatori cambiano strategie. Per esempio, se sono selfish in origine, allora possono giocare come altruiste, ma è ancora possibile identificarle come selfish.

Le equazioni differenziali che descrivono un simile modello sono:

$$\frac{dx}{dt} = -xR(x) \qquad (4)$$

$$\frac{dy}{dt} = -y\mathrm{R}(\mathrm{y})$$

dove x è il numero di imprese selfish e y il numero di imprese altruiste:

Si supponga, per semplicità, che la funzione di fitness R(•) sia lineare e che non sia presente un "own population effect".

In questa forma le equazioni differenziali sono:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -x(\alpha + \beta x) = F^1(x) \\ \frac{dy}{dt} &= -y(\gamma + \delta y) = F^2(y) \end{aligned} \qquad (5)$$

Per risolvere questo sistema e studiare la dinamica dobbiamo calcolare la matrice Jacobiana:

$$j = \begin{vmatrix} \frac{fF^1}{fx} & \frac{fF^1}{fy} \\ \frac{fF^2}{fxx} & \frac{fF^2}{fx} \end{vmatrix} \qquad (6)$$

Lo studio dell'equazione caratteristica è importante per determinare l'evoluzione del sistema dinamico.

$$|j - \lambda I| = 0 \qquad (7)$$

Le soluzioni dell'equazione caratteristica λ_1 e λ_2 sono gli autovalori.

$$\lambda_{1,2} = \frac{trJ \pm \sqrt{trJ \quad - 4\det J}}{2} \qquad (8)$$

Questi autovalori determinano il comportamento dinamico del sistema. È opportuno ricordare che la somma degli autovalori è la traccia del Jacobiano J e il prodotto degli autovalori è il determinante di J.

Con una appropriata scelta dei parametri dell'equazione (5) si può ottenere ogni valore desiderato, reale o complesso - coniugato $\lambda_{1,2}$ e quindi qualunque tipo di stabilità del comportamento dinamico.

Si possono distinguere sei casi:

Gli autovalori $\lambda_{1,2}$ sono reali ed entrambi positivi se det J>0 e trJ >0. La traiettoria diverge in maniera monotona. Il sistema ha un *nodo instabile*.

Gli autovalori $\lambda_{1,2}$ sono reali ed entrambi negativi se det J>0 e trJ <0. La traiettoria tende in maniera monotona ad un punto fisso. Questo punto è chiamato *nodo stabile*.

Gli autovalori $\lambda_{1,2}$ sono reali e stanno in coppia di segno opposto se deJ<0. In questo caso il punto fisso è chiamato punto stabile di sella (*saddle point stable*).

Gli autovalori sono complessi coniugati se detJ>0 e il discriminante è <0 e possono essere scritti nella forma:

$$\lambda_{1}=\alpha+\beta i \qquad \lambda_2=\alpha-\beta i \qquad \text{dove } \alpha=\mathrm{tr}J/2 \ \text{ e } \ \beta=\frac{\sqrt{\det J - trJ^2}}{4} \tag{9}$$

Se le parti reali sono negative si verificano delle oscillazioni smorzate che tendono nel limite ad un valore finito. Questo punto è chiamato fuoco stabile (*stable focus)*.

Se le parti reali sono positive, l'ampiezza delle oscillazioni cresce nel tempo. In questo caso il sistema ha un fuoco instabile (*unstable focus)*.

Se la parte reale è uguale a zero il sistema mostra delle oscillazioni costanti nel tempo. Questa situazione è chiamata *center dynamics*.

La competizione fra imprese selfish e imprese altruiste può essere modellata come un "Evolutionary Stug Hunt Game", così i parametri della funzione di fitness determinano l'evoluzione del sistema.

La soluzione di un "Asymmetric Stug Hunt Game" ha una maggiore complessità di comportamento di un gioco simmetrico, anche se la funzione di fitness è lineare e il sistema è caratterizzato dall'assenza di un "own population effect".

Se un sistema lineare è una approssimazione di un sistema non lineare, allora la traiettoria può perdere stabilità (Marino D.,1998, Marino D.,1999).

Per gli scopi di questo scritto è sufficiente studiare un modello in cui la *fitness* è ancora lineare, ma il sistema presenta un "own population effect".

In questo caso si può scrivere:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -x\left(-a_1 + bx + a_{12}y\right) \\ \frac{dy}{dt} &= -y\left(-a_2 + cy_1 a_{21}x\right) \end{aligned} \tag{10}$$

Il modello può essere costruito come un sistema di due equazioni differenziali non lineari e può essere pensato come una guerra fra due popolazioni che tentano di conquistare un territorio. Queste equazioni sono conosciute in letteratura come equazioni di Lotka-Volterra, cosicché lo "Stug-Hunt Game" può essere pensato come uno scambio biologico di calorie tra le due popolazioni. Ogni scambio di calorie può essere misurato come un payoff in uno "Stug-Hunt Game".

Il modello può essere scritto come segue:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_1x - a_{12}xy - bx^2 \\ \dfrac{dy}{dt} = a_2x - a_{21}xy - cy^2 \end{cases} \tag{11}$$

Se i parametri b, c sono uguali a zero, il sistema diviene:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_1x - a_{12}xy - bx^2 \\ \dfrac{dy}{dt} = a_2x - a_{21}xy - cy^2 \end{cases} \tag{12}$$

dove x il numero di imprese appartenenti a ciascun gruppo e, ovviamente, $k = \frac{y}{x+y}$.

Il modello descrive il processo di diffusione congiunta di due popolazioni. Se una popolazione si estingue, allora l'altra cresce in maniera esponenziale. I parametri a e c sono legati al tasso di crescita e al tasso di estinzione.

Le soluzioni saranno allora:

$$x = x_0 e^{a_1 t}$$

$$y = y_0 e^{a_2 t}$$

In presenza di un termine quadratico, non si verifica una crescita esponenziale, ma una crescita basata sulla funzione logistica, cioè limitata dalle risorse disponibili.

Il modello può essere scritto come segue:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1 x - a_{12} xy - bx^2 \\ \frac{dy}{dt} = a_2 x - a_{21} xy - cy^2 \end{cases} \tag{11}$$

Il modello espresso dall'equazione (4) può portare a tre differenti equilibri:

a) equilibrio stabile;
b) equilibrio instabile;
c) sopravvivenza di una sola popolazione.

Supponendo che:

$$a_1 = a_2 = 1 \tag{15}$$

le condizioni per un equilibrio stabile sono:

$$b > a^{21}; c > a^{12} \tag{16}$$

le condizioni per un equilibrio instabile sono

$$b > a_{21}; c < a_{12} \tag{17}$$

e, infine, le condizioni per la supremazia sono, per la prima popolazione:

$$c > a_{12}; a_{21} > b \tag{18}$$

mentre per la seconda sono:

$$b > a_{21}; c < a_{12} \tag{19}$$

L'evoluzione del modello può essere allora portare sia alla coesistenza delle due popolazioni, sia alla supremazia di una popolazione. I coefficienti a_{21} e a_{12} rappresentano i coefficienti di competizione, mentre b e c sono il reciproco della carrying capacity del sistema sotto l'ipotesi (15).

Dal punto di vista economico questi modelli sono modelli predatori appartenenti alla classe dei modelli del tipo "war of attrition" (J. Maynard Smith, 1974). Altri modelli di "war of attrition" sono stati introdotti da Kreps-Wilson (1982).

I modelli del tipo "war of attrition" possono condurre alla supremazia di una sola specie, cosa nota in biologia come principio di Gause (Levin, 1970). Dal punto di vista economico, la coesistenza è esclusa solo se si considera il caso in cui il profitto attualizzato del duopolio è negativo con probabilità 1.

Se l'ipotesi che le imprese possano coesistere è accettata, è possibile studiare la crescita e il declino delle imprese all'interno di un settore e anche la dinamica dei settori (Mansfield, 1962, Nelson-Winter, 1974, Fudenberg, Tirole, 1983, Spence, 1981).