



FUNZIONI DI DUE VARIABILI

- Una funzione di più variabili viene indicata come:

$$f : A \rightarrow B \quad \text{con} \quad A \subseteq \mathbb{R}^n$$

- Se $n=2$ la funzione presenta due variabili indipendenti e viene normalmente scritta come:

$$z = f(x, y)$$

- La sua rappresentazione grafica si realizza introducendo un sistema cartesiano di riferimento riportando sull'asse verticale (!!!) i valori della variabile dipendente z .

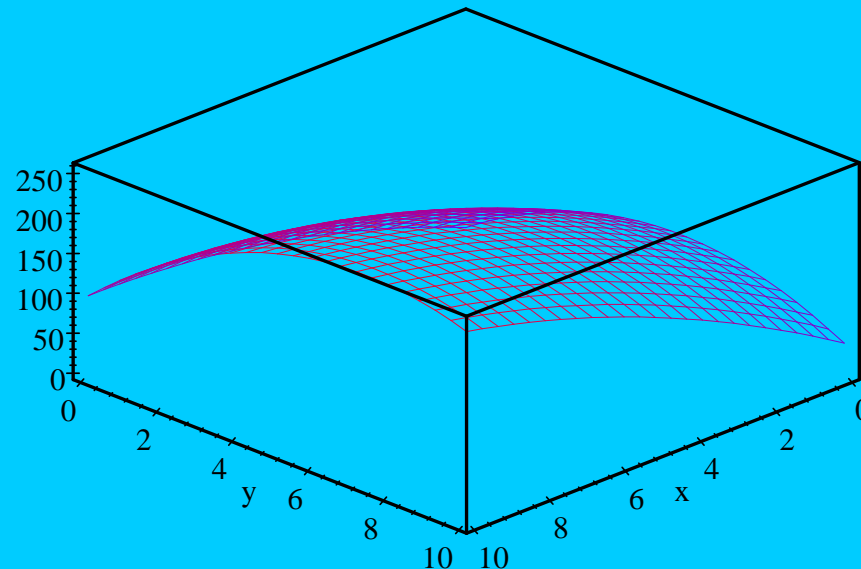


FUNZIONI DI DUE VARIABILI

- Esempio 1
- Il grafico della funzione

$$z = -x^2 + 20x - 3 + 34y - 3y^2 + xy$$

- è:





FUNZIONI DI DUE VARIABILI

- La funzione di Cobb-Douglas:

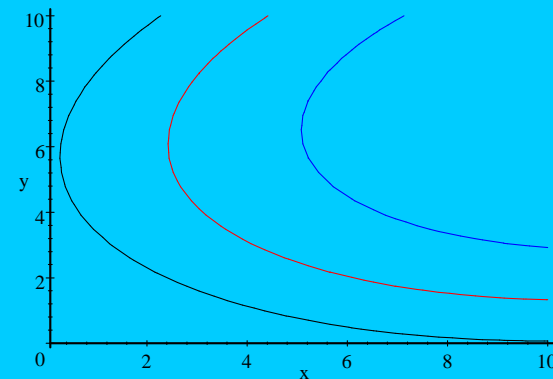
$$P = CK^{\alpha} L^{1-\alpha}$$

- dove:
- P=produzione totale
- C=produzione unitaria
- L=unità di lavoro impiegato
- K=unità di capitale investito
- α =costante compresa tra 0 ed 1



FUNZIONI DI DUE VARIABILI

- Sezionando il grafico di una funzione di due variabili con un piano parallelo al piano xy si ottengono le *curve di livello*. Considerando la funzione dell'esempio 1 e proiettando le curve di livello sul piano xy si ottiene:





FUNZIONI DI DUE VARIABILI

- Una funzione è omogenea di grado “s” se:

$$f(vx, vy) = v^s f(x, y)$$

- La funzione di Cobb-Douglas è omogenea di grado $s=1$:

-

$$P(vK, vL) = C(vK)^\alpha (vL)^{1-\alpha} =$$

$$= Cv^\alpha K^\alpha v^{1-\alpha} L^{1-\alpha} = v^\alpha v^{1-\alpha} CK^\alpha L^{1-\alpha} = vP(K, L)$$



FUNZIONI DI DUE VARIABILI

- L'estensione del concetto di limite di una funzione non è immediata. Infatti la modalità di avvicinamento nel piano xy di un punto di coordinate (x, y) ad un punto (x_0, y_0) di accumulazione per il dominio della funzione non è unica ma anzi può avvenire seguendo un numero infinito di traiettorie. Vale il risultato:
- *Il $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)$ è uguale ad "l" se, per ogni successione $n \rightarrow (x_n, y_n)$ che converge a (x_0, y_0) la successione $n \rightarrow f(x_n, y_n)$ converge ad "l".*



FUNZIONI DI DUE VARIABILI

- L'estensione della definizione di derivata di una funzione (continua) non è immediato. Infatti il limite del rapporto incrementale

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)}{(\Delta x, \Delta y)}$$

non ha significato in quanto rapporto di un numero (il numeratore) con una coppia di numeri (il denominatore)!



FUNZIONI DI DUE VARIABILI

- Considerando la variazione della funzione (continua) generata dalla variazione di una variabile alla volta:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

si ottengono (con le stesse attenzioni delle funzioni di una variabile) le derivate parziali rispetto ad x e rispetto ad y : $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$



FUNZIONI DI DUE VARIABILI

- Il vettore che contiene le derivate parziali della funzione viene denominato gradiente della funzione e viene indicato:

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}$$

- Le derivate parziali per la funzione di C-D sono:

- $$P_K(K, L) = \frac{\partial P}{\partial K} = C \cdot \alpha \cdot K^{\alpha-1} \cdot L^{1-\alpha} = \alpha \frac{P}{K}$$

$$P_L(K, L) = \frac{\partial P}{\partial L} = C \cdot (1-\alpha) \cdot K^\alpha \cdot L^{-\alpha} = (1-\alpha) \frac{P}{L}$$



FUNZIONI DI DUE VARIABILI

- L'elasticità della produzione rispetto al capitale è:

- $$E_K = \frac{\frac{\partial P}{\partial K}}{\frac{K}{P}} = \frac{K}{P} \cdot \frac{\partial P}{\partial K} \quad \text{ovvero} \quad E_K = \alpha$$

- L'elasticità della produzione rispetto al lavoro è:

- $$E_L = \frac{\frac{\partial P}{\partial L}}{\frac{L}{P}} = \frac{L}{P} \cdot \frac{\partial P}{\partial L} \quad \text{ovvero} \quad E_L = 1 - \alpha$$



FUNZIONI DI DUE VARIABILI

- Derivate di ordine successivo. Le derivate parziali prime in quanto funzioni possono essere derivate a loro volta (naturalmente se soddisfano le condizioni già ricordate), ottenendo:

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = f_{xx}(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = f_{xy}(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} = f_{yx}(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = f_{yy}(x, y)$$



FUNZIONI DI DUE VARIABILI

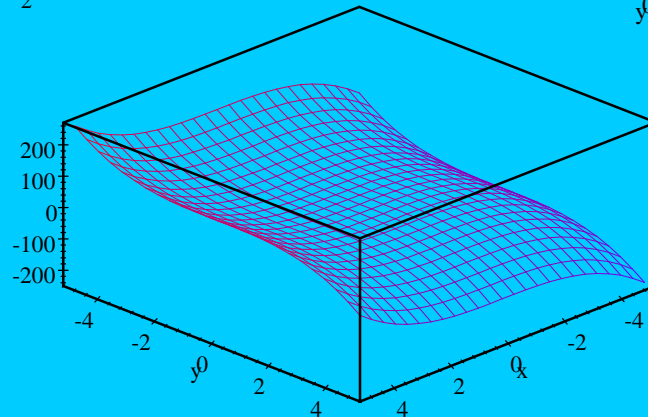
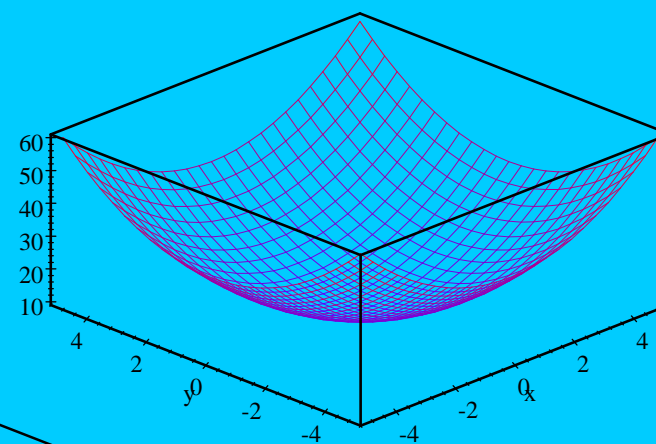
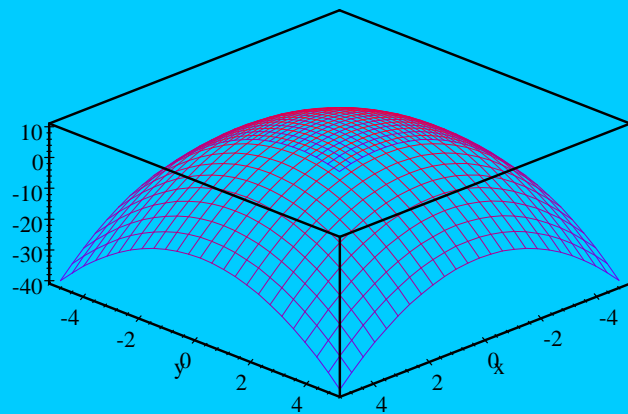
- Le derivate parziali seconde possono essere organizzate in una matrice denominata matrice Hessiana.

$$H = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$$



FUNZIONI DI DUE VARIABILI

- Massimi e minimi relativi (liberi) e selle.





FUNZIONI DI DUE VARIABILI

Le condizioni necessarie e sufficienti sono :

Condizione necessaria

$$\begin{cases} \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Condizione sufficiente per avere un massimo relativo

1. $\det H(x_0, y_0) > 0$
2. $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$

Condizione sufficiente per avere un minimo relativo

1. $\det H(x_0, y_0) > 0$
2. $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$

Condizione sufficiente per avere una sella

$$\det H(x_0, y_0) < 0$$



FUNZIONI DI DUE VARIABILI

- Esempio 2.
- Determinare la natura dei punti critici della funzione: $f(x, y) = x^3 - y^2 + 6y - 12x + 5$

- Dalle condizioni necessarie:
$$\begin{cases} 3x^2 - 12 = 0 \\ -2y + 6 = 0 \end{cases}$$

- si determinano i candidati: $(-2, 3)$ e $(2, 3)$.

- La matrice Hessiana è:
$$H = \begin{bmatrix} 6x & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$



FUNZIONI DI DUE VARIABILI

Sostituendo le coordinate del primo punto si ha:

- $\det H = 24 > 0$
- $f_{xx}(-2, 3) = -12$

e quindi in $(-2, 3)$ la funzione presenta un max.

Sostituendo le coordinate del secondo punto si ha:

- $\det H = -24$
- $f_{xx}(2, 3) = 12$
- $f_{yy}(2, 3) = -2$

e quindi in $(2, 3)$ la funzione presenta una sella.



FUNZIONI DI DUE VARIABILI

Massimi e minimi vincolati.

- La struttura del problema è la seguente:

$$\max_{(x,y)} f(x, y) \quad g(x, y) = 0$$

- Per risolvere il problema di massimo (minimo) vincolato si introduce la *funzione lagrangiana*:

$$L(\lambda, x, y) = f(x, y) + \lambda \cdot g(x, y)$$

- dove λ è il **moltiplicatore** di Lagrange.
- Il massimo (libero) della funzione di Lagrange (se esiste) equivale al massimo (vincolato) della funzione di partenza $f(x, y)$.



FUNZIONI DI DUE VARIABILI

Le condizioni necessarie per la funzione $L(\lambda, x, y)$ sono:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Il soddisfacimento della prima condizione equivale al soddisfacimento del vincolo, infatti:

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \lambda} [f(x, y) + \lambda \cdot g(x, y)] = g(x, y) = 0$$



FUNZIONI DI DUE VARIABILI

Teorema

Sia (λ_0, x_0, y_0) una soluzione del sistema di equazioni che esprimono le condizioni del primo ordine. Se la funzione lagrangiana è dotata di derivate parziali seconde e il determinante della matrice hessiana in (λ_0, x_0, y_0) è positivo (negativo), allora in (x_0, y_0) la funzione $z = f(x, y)$ presenta un massimo (minimo) relativo e soddisfa il vincolo.



FUNZIONI DI DUE VARIABILI

- Il moltiplicatore di Lagrange (λ_o) rappresenta “ *il costo opportunità del vincolo*”.

Si supponga che si voglia massimizzare la funzione dei ricavi e che il vincolo rappresenti il vincolo di spesa sui mezzi di produzione. Se si aumenta di 1 unità il budget allora i ricavi crescono di circa λ_o unità.

Questo risultato consente di valutare se conviene aumentare (diminuire) le risorse investite.



FUNZIONI DI DUE VARIABILI

-