Capitolo 2

GIOCHI IN FORMA NORMALE (O STRATEGICA)

2.1 Giochi a somma costante

UN ESEMPIO

Supponiamo che due ditte, A e B, siano in concorrenza fra loro per aggiudicarsi due piazze su cui vendere i loro prodotti. Supponiamo che i marketing managers di tali ditte abbiano a disposizione, per tale operazione, 400.000 \$ il primo e 200.000 \$ il secondo. Le regole siano le seguenti.

Ogni manager stabilisce come ripartire la sua cifra fra le due piazze e prende la decisione non conoscendo quella dell'avversario. Alla fine, chi avrà investito una cifra maggiore su una piazza, se la aggiudicherà, ottenendo una certa vincita (che potremo schematizzare in una certa unità di capitale), mentre l'altra ditta avrà una perdita esattamente uguale alla vincita dell'altra. A parità di investimento, nessuno vincerà nulla. Il problema è studiare le scelte ottime per ciascuno dei due giocatori.

Ovviamente il modello è criticabile per vari motivi: non è detto che una piazza venga conquistata esclusivamente da una delle due ditte; non si tiene conto dell'investimento fatto da ciascuna, ecc. A titolo didattico, iniziamo con queste semplificazioni; vedremo poi come è in pratica possibile, con semplici ritocchi, tener conto dei molteplici aspetti qui trascurati (v. ad es. l'esercizio 3 del paragrafo 2.2).

Supponiamo ora che le possibili decisioni, per motivi di lotto economico, riguardino unità di centinaia di migliaia di dollari. Il manager della ditta A deve dunque decidere se investire 400.000 dollari sulla prima piazza e 0 sulla seconda, oppure 300.000 e 100.000, e così via.

Rappresentiamo in tabella 1, in termini di unità di capitale, le vincite per la ditta A, vincite dipendenti dalle scelte congiunte dei due giocatori.

$$\begin{array}{cc} A\backslash B & \begin{matrix} 2,0 & 1,1 & 0,2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 4,0 \\ 3,1 \\ 2,2 \\ 1,3 \\ 0,4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

TABELLA 1

Se ad esempio A usa la mossa "4, 0" (cioè 400.000 dollari sulla prima piazza e 0 sulla seconda) e B usa la mossa "2, 0" (cioè 200.000 dollari sulla prima e 0 sulla seconda), allora A vince la prima piazza (essendo $4 > 2$) e, con essa, 1 unità di utilità. La seconda piazza è pareggiata ($0 = 0$) e pertanto l'utilità totale per A è 1. Se invece B usa la mossa "1, 1", allora A vince la prima piazza (+1 utilità) e perde la seconda (−1 utilità) e totalizza 0.

Osserviamo che le vincite in tabella 1 sono riferite ad A, ma per le convenzioni adottate ad ogni vincita per A corrisponde un'uguale perdita per B, pertanto la stessa matrice, riferita a B, avrebbe gli stessi elementi, preceduti dal segno "−".

Che cosa possiamo suggerire, ora, a ciascuno dei due managers?

DOMINANZA FRA STRATEGIE

Iniziamo osservando che, per A, la mossa "3, 1" è certamente preferibile alla "4, 0", perché porta una vincita maggiore o uguale alla "4, 0", comunque giochi B. Possiamo quindi dire che la mossa "4, 0" è dominata dalla mossa "3, 1" e va pertanto scartata. Analogamente, possiamo verificare che la "1, 3" domina la "0, 4" e pertanto anche quest'ultima va scartata. Non essendovi altra dominanza fra le righe, passiamo a studiare sulle colonne il punto di vista di B (ricordiamo che, per B, la matrice riporta le perdite). Qui possiamo notare che nessuna colonna è dominata da un'altra. Possiamo pertanto riportare in tabella 2 la sottomatrice delle mosse non dominate.

$$
\begin{array}{c}
 \\
3,1 \\
2,2 \\
1,3
\end{array}
\begin{array}{c}
A\backslash B \quad 2,0 \quad 1,1 \quad 0,2 \\
\left[\begin{array}{ccc}
2 & 1 & 0 \\
1 & 2 & 1 \\
0 & 1 & 2
\end{array}\right]
\end{array}
$$

TABELLA 2

MAX-MIN E MIN-MAX

Partiamo ancora una volta dal giocatore A. La mossa "3,1" gli assicura, comunque giochi B, una vincita non inferiore a 0. La mossa "2,2" gli assicura, comunque giochi B, una vincita non inferiore ad 1. La mossa "1,3", dal punto di vista del "peggio possibile", è analoga alla "3.1". Riportiamo in tabella 3 la stessa matrice della tabella 2, ma orlandola a destra con una colonna, di cui ciascun elemento rappresenta il minimo della riga relativa. La freccia indica la mossa corrispondente al massimo fra i possibili minimi, cioè il guadagno che A è in grado di assicurarsi comunque giochi B. Tale mossa si chiama "di max-min per A". Dal punto di vista di B, riportiamo nella riga in basso i casi peggiori che possano capitare, per cercare la mossa "di min-max" che assicura la perdita minima. In questo caso vediamo che tutte le mosse di B sono equivalenti agli effetti della soluzione più pessimistica.

$$\begin{array}{c c c}
A \backslash B & \begin{array}{ccc} 2,0 & 1,1 & 0,2 \end{array} & min \\
\begin{array}{c} 3,1 \\ 2,2 \\ 1,3 \end{array} & \left[\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right] & \begin{array}{l} 0 \\ 1 \;\leftarrow \\ 0 \end{array} \\
max & \begin{array}{ccc} 2 & 2 & 2 \end{array} &
\end{array}$$

TABELLA 3

IL LOOP "IO SO CHE TU SAI ..."

Che fare, dunque? Il giocatore B può ragionare come segue: io so che la mossa migliore per A è la "2, 2", in quanto gli porta il massimo dei possibili guadagni sicuri. Allora, sicuramente, non mi conviene adottare la mossa "1, 1", in quanto otterrei una perdita di 2. Sceglierò quindi la "2, 0" o la "0, 2". Per semplicità espositiva, supponiamo che, in corrispondenza alla coppia di mosse "2, 2" e "0, 2", la vincita per A sia di poco superiore ad 1. In tal caso, B sceglierà la colonna "2, 0". Allora A, aspettandosi questa mossa di B, sceglierà, in luogo della riga "2, 2", la riga "3, 1", che gli darebbe una vincita di 2. Allora B ... e il ragionamento potrebbe continuare all'infinito.

PUNTI DI SELLA

In quali casi questo ragionamento potrebbe fermarsi? Ad esempio, nel caso della tabella 4.

$$
\begin{array}{cccc c l}
A\backslash B & \mathrm{I} & \mathrm{II} & \mathrm{III} & \mathit{min} & \\
\begin{array}{c}\mathrm{I}\\ \mathrm{II}\\ \mathrm{III}\end{array} & \multicolumn{3}{c}{\left[\begin{array}{ccc} 4 & 2 & 1\\ -1 & 3 & 0\\ 5 & -6 & -2\end{array}\right]} & \begin{array}{c}1\\ -1\\ -6\end{array} & \begin{array}{l}\leftarrow \mathit{max\text{-}min}\\ \\ \\ \end{array}\\
\mathit{max} & 5 & 3 & 1 & \leftarrow \mathit{min\text{-}max} &
\end{array}
$$

TABELLA 4

Qui si può notare come l'elemento corrispondente alla mossa di max-min per A è lo stesso che corrisponde alla mossa di min-max per B. In tal caso, nessun giocatore ha interesse ad allontanarsi da quella strategia, perché così facendo guadagna di meno. Siamo in presenza di un "punto di sella nelle strategie pure" in quanto, in termini di analisi matematica, la vincita 1 corrisponde al valore minimo di riga e al valore massimo di colonna. Notiamo che la conoscenza di questa tecnica avvantaggia ogni giocatore, in quanto, se l'avversario non l'adotta, il giocatore che la utilizza guadagna di più.

STRATEGIE MISTE

Che succede invece se non esiste punto di sella? Qui entra in campo il teorema che ha dato a von Neumann la paternità dell'odierna teoria dei giochi. Per presentarlo brevemente partiamo da un esempio ancora più semplice. Supponiamo che la matrice delle vincite sia quella rappresentata in tabella 5. Come si può facilmente verificare, questa matrice non ha un punto di sella nelle strategie pure. Possiamo allora supporre che il gioco venga ripetuto più volte e assegnare una distribuzione di probabilità sull'insieme delle mosse di ciascuno dei giocatori.

$$\begin{array}{cccc} A\backslash B & \mathrm{I} & \mathrm{II} & \\ \mathrm{I} & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$}} & x_1 \\ \mathrm{II} & & & x_2 \\ & y_1 & y_2 & \end{array}$$

TABELLA 5

Siano dunque x_1 e x_2 le probabilità che il giocatore A adotti rispettivamente la sua prima e la sua seconda mossa; analogamente siano y_1 e y_2 le probabilità delle scelte di B.

Dovrà dunque essere:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} y_1 + y_2 = 1 \\ y_1 \geq 0 \\ y_2 \geq 0\,. \end{cases}$$

La vincita attesa di A è $3x_1 + 2x_2$, se B usa la sua prima mossa, altrimenti è $1x_1 + 6x_2$.

La perdita attesa di B è $3y_1 + 1y_2$, se A usa la sua prima mossa, altrimenti è $2y_1 + 6y_2$.

Il problema per A è scegliere la distribuzione (x_1, x_2) che è in grado di assicurargli la massima vincita, comunque giochi B.

Detta dunque v la vincita (tuttora incognita) di A, il problema per A può essere così tradotto:

$$\max v$$

nei vincoli:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq v \\ x_1 + 6x_2 \geq v \\ x_1 + x_2 = 1 \\ x_1\,,\ x_2 \geq 0\,. \end{cases}$$

Si tratta di un semplice problema di programmazione lineare, la cui soluzione è:

$$x_1 = \frac{2}{3}\,, \quad x_2 = \frac{1}{3}\,, \quad v = \frac{8}{3}$$

(in questo caso l'ottenimento della soluzione è immediato: basta sostituire ogni disuguaglianza con un'uguaglianza).

Dal punto di vista di B, il problema è scegliere la distribuzione (y_1, y_2) che è in grado di assicurargli la minima perdita, comunque giochi A.

Detta dunque w la perdita di B, il suo problema è:

$$\min w$$

nei vincoli:

$$\begin{cases} 3y_1 + y_2 \leq w \\ 2y_1 + 6y_2 \leq w \\ y_1 + y_2 = 1 \\ y_1\,,\ y_2 \geq 0\,. \end{cases}$$

Anche qui si tratta di un problema di programmazione lineare, di cui si deduce facilmente la soluzione:

$$y_1 = \frac{5}{6}\,, \quad y_2 = \frac{1}{6}\,, \quad w = \frac{8}{3}\,.$$

Notiamo che $v = w = \frac{8}{3}$, pertanto il punto di max-min per A coincide con il punto di min-max per B: abbiamo trovato un "punto di sella nelle strategie miste", cioè una coppia di distribuzioni di probabilità che assicurano ad entrambi, in termini di speranza matematica, lo stesso risultato ottimo.

IL TEOREMA DEL MINIMAX

Il "teorema del minimax" di von Neumann [169] assicura che ogni gioco matriciale a somma zero ha almeno un punto di sella nelle strategie miste. Vale dunque in ogni caso $v = w$ e il problema di B è il duale del problema di A.

Notiamo che con il termine "strategia" si intende l'insieme delle singole mosse che, operate dal giocatore, lo portano ad ottenere un certo risultato effettivo o atteso.

EQUITÀ

Riprendiamo l'ultimo esempio fatto.

La vincita attesa è $\frac{8}{3}$ per A e $-\frac{8}{3}$ per B. Domandiamoci: questo gioco è equo? Evidentemente no, in quanto la vincita attesa da A è maggiore di quella attesa da B. La cosa era d'altra parte evidente fin dall'inizio, in quanto tutti gli elementi della matrice sono positivi. Allora, che senso ha per B partecipare a questo gioco? Non è più conveniente rinunciarvi a priori? Da una parte, si può rispondere che in certe situazioni è comunque necessario giocare ed è proprio in quelle circostanze che emergono le vere qualità del manager: quando riesce a destreggiarsi anche nelle situazioni più disperate. V'è poi da considerare che, in altri casi, non è così evidente a priori se la matrice è favorevole all'uno o all'altro giocatore. Ad esempio, nel caso della tabella 4, le vincite sono sia positive che negative, addirittura la massima vincita possibile per A (5) è inferiore alla massima vincita possibile per B (6), ma il gioco è favorevole ad A. Quindi, con il metodo di max-min (puro o misto) è possibile valutare a priori l'opportunità o meno di entrare in campo.

FORMALIZZAZIONE

Un *gioco in forma normale* è composto dall'insieme dei giocatori $N = \{1, \ldots, n\}$ $(n \geq 2)$, dall'insieme $S = \{S_1, \ldots, S_n\}$ delle possibili *strategie* adottabili da ciascun giocatore e dall'insieme $p(s) = \{p_1(s), \ldots, p_n(s)\}$ dei *pagamenti* assegnati a ciascun giocatore in funzione delle strategie $s = (s_1, \ldots, s_n) \in S$ adottate da tutti.

Ogni giocatore può avere informazione perfetta del gioco (es. scacchi) o imperfetta (es. bridge). Si dice che un gioco è ad *informazione perfetta* se tutti i giocatori hanno informazione perfetta.

Una n-upla di strategie $s^* = (s_1^*, \ldots, s_n^*)$ è detta *in equilibrio* se, per tutti gli i da 1 a n e tutti gli $s_i \in S_i$ si ha:

$$p_i(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*) \leq p_i(s_1^*, \ldots, s_n^*) .$$

Ciò significa che nessun giocatore ha motivo di cambiare la sua strategia, se tutti gli altri sono fissi nelle loro. Si può dimostrare l'esistenza di una n-upla di strategie in equilibrio per ogni gioco finito n-persone ad informazione completa.

Una n-upla di strategie $s^* = (s_1^*, \ldots, s_n^*)$ è detta *pareto-ottimale* se non esiste alcun'altra strategia $s = (s_1, \ldots, s_n)$ tale che

$$p_i(s_1^*, \ldots, s_n^*) \leq p_i(s_1, \ldots, s_n)$$

per tutti gli $i \in N$, con almeno una disuguaglianza forte.

Per ogni n-upla di strategie $s \in S$, si chiama *pagamento totale* $t(s)$ la somma di tutti i pagamenti relativi ad s:

$$t(s) = \sum_{i=1}^{n} p_i(s) \ .$$

Il gioco è detto *a somma costante* k se $t(s) = k$ per tutte le $s \in S$. In particolare, il gioco è detto *a somma zero* se $k = 0$.

Si può sempre ricondurre un gioco a somma costante k in uno a somma zero, strategicamente equivalente: basta infatti sottrarre alla vincita di ogni giocatore la quantità k/n.

Diamo ora alcune definizioni e proprietà relative ai giochi a somma costante fra due persone. Tali giochi sono rappresentabili con la matrice P i cui elementi p_{ij} sono così definiti:

$$p_{ij} = p_1(s_i, s_j) = -p_2(s_i, s_j) \ .$$

Ciascun elemento rappresenta quindi il pagamento attribuito al primo giocatore (e anche l'opposto del pagamento attribuito al secondo) nel caso il primo giocatore usi la sua i-esima strategia e il secondo giocatore la sua j-esima.

Si dice che l'i-esima riga *domina* la k-esima se

$$p_{ij} \geq p_{kj} \qquad \text{per tutti i } j \text{ e}$$
$$p_{ij} > p_{kj} \qquad \text{per almeno un } j.$$

Allo stesso modo si dice che la j-esima colonna *domina* la h-esima se:

$$p_{ij} \geq p_{ih} \qquad \text{per tutti gli } i \text{ e}$$
$$p_{ij} > p_{ih} \qquad \text{per almeno un } i.$$

Si può provare che ogni strategia ottima per un gioco è ottima anche per il "gioco ridotto" ottenuto sopprimendo tutte le righe e le colonne dominate.

Si dice che (i,j) è un *punto di sella nelle strategie pure* se p_{ij} è sia il massimo della colonna j che il minimo della riga i. La corrispondente coppia di strategie è allora *in equilibrio*.

Se non esistono punti di sella nelle strategie pure, è possibile trovare un *punto di sella nelle strategie miste*.

Una *strategia mista* per un giocatore è una distribuzione di probabilità sull'insieme delle sue strategie pure, cioè un m-vettore $x = (x_1, \ldots, x_m)$ (ove m è il numero di strategie pure a disposizione del giocatore), tale che

$$x_i \geq 0 \qquad \text{per tutti gli } i \text{ da 1 a } m \text{ e}$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \; .$$

Siano m_1 ed m_2 le strategie pure a disposizione del primo e del secondo giocatore. Se il primo giocatore sceglie la strategia mista x ed il secondo la strategia mista y, allora il pagamento atteso è:

$$v(x, y) = \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} x_i \, p_{ij} \, y_j \, .$$

Ovviamente, le strategie miste possono essere usate solo nei giochi ove ha senso considerare distribuzioni di probabilità sulle strategie stesse (ad esempio, in giochi ripetuti).

Il *teorema del minimax* assicura l'esistenza di una coppia di strategie miste (x^*, y^*) tali che

$$v(x^*, y^*) = \min_x \max_y v(x, y) = \max_y \min_x v(x, y)$$

cioè di un punto di sella nelle strategie miste.

La soluzione per il primo giocatore è ottenuta risolvendo il seguente problema di programmazione lineare:

$$\max_x v$$

nei vincoli:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{m_1} x_i \, p_{ij} \geq v & (j = 1, \ldots, m_2) \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m_1} x_i = 1 & \\ x_i \geq 0 & (i = 1, \ldots, m_1) \, . \end{cases}$$

La soluzione per il secondo giocatore si ottiene con il duale del problema precedente:

$$\min_y v$$

nei vincoli:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{m_2} p_{ij}\, y_j \le v & (i = 1, \ldots, m_1) \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{m_2} y_j = 1 & \\ y_j \ge 0 & (j = 1, \ldots, m_2)\,. \end{cases}$$

Esercizi

ESERCIZIO N. 1: **Un problema militare**

In un'operazione militare vi sono due parti contrapposte, interessate a conquistare due roccaforti. La prima parte ha una dotazione di quattro compagnie di soldati e la seconda una dotazione di due compagnie. Ogni comandante deve decidere quante, delle sue compagnie, deve inviare in ciascuna delle due roccaforti.

La vincita è così determinata: chi invia più compagnie in una certa posizione, vince la roccaforte e cattura le compagnie avversarie che erano state inviate in quella posizione. Ottiene dunque un'unità di utilità per la roccaforte e tante unità di utilità quante sono le compagnie inviatevi dall'altro. L'altro perde esattamente la stessa utilità complessiva.

Si tratta evidentemente di un gioco a somma zero fra due persone (del tipo noto in letteratura come "gioco del colonnello Blotto"). L'esercizio consiste in:

- costruire la matrice dei pagamenti;
- eliminare le strategie dominate;
- cercare i punti di max-min e di min-max nelle strategie pure;
- nel caso non vi sia un punto di sella nelle strategie pure, impostare il problema di programmazione lineare (e il duale) che determinano le strategie di equilibrio;
- se si dispone di un calcolatore con un software di programmazione lineare, risolvere completamente l'esercizio.

ESERCIZIO N. 2: **Aiuto strategico a Paesi in via di sviluppo**

Due Paesi non allineati hanno sovrabbondanza di beni rapidamente deteriorabili (ad es. derrate alimentari) o privi di un mercato economicamente vantaggioso. Decidono allora di devolvere tali beni in aiuti a Paesi in via di sviluppo con lo scopo di ottenere un'influenza politica ed una conseguente posizione strategica sui relativi territori.

Consideriamo il caso in cui i possibili beneficiari degli aiuti siano due: I e II. Siano rispettivamente (con opportune unità di misura) 4 e 3 le quantità di beni a disposizione del Paese A e del Paese B da devolvere in aiuti. Il Paese A dovrà quindi scegliere se dare tutto il suo aiuto ad I e nessuno a II, oppure 3 unità a I ed una a II, ecc. Analogamente, il Paese B deve scegliere se dare 3 unità ad I e 0 a II e così via.

Se un Paese dà ad una "developing country" una quantità di beni maggiore di quella data dall'altro Paese, si assicura il controllo della relativa area strategica ed una conseguente unità di utilità in termini strategici ($u = 1$); l'altro Paese perde il controllo e riceve un'utilità negativa ($u = -1$). A parità di aiuti alla stessa "developing country" corrisponde un'utilità nulla per entrambi i Paesi.

L'esercizio consiste nel risolvere il problema, procedendo come nell'esercizio n. 1.

Conclusioni

Gli esercizi qui sopra proposti illustrano come la teoria dei giochi (e la matematica in generale) sia in grado di descrivere con lo stesso modello diverse situazioni reali.

I modelli qui presentati sono evidentemente non vicini alla realtà e questo dipende da motivi didattici. Vedremo nel successivo paragrafo come, con semplici ritocchi, si possa arrivare a descrivere molto più fedelmente le situazioni di conflitto che sono state qui proposte.

Due sono peraltro le principali conclusioni che si possono per ora trarre sull'opportunità di conoscere la teoria dei giochi: nel gioco a somma zero, chi la conosce ed applica la strategia (pura o, se necessario, mista) del min-max, è in grado di assicurarsi una vincita minimale, vincita che sarà maggiore, nel caso in cui l'avversario non applichi la sua strategia ottima. Inoltre, chi conosce la teoria è in grado di valutare a priori la sua vincita e pertanto può decidere (nel caso sia in condizioni di farlo) se entrare o meno nel gioco.

2.2 Giochi a somma variabile

UN ESEMPIO

Supponiamo che due terroristi* siano chiusi in celle separate e non abbiano la possibilità di comunicare fra loro. Nel paese dove si trovano vi sia una legge speciale antiterrorismo, che assicura uno sgravio di pena a chi collabora con la giustizia confessando i propri reati e denunciando quelli altrui. Tale legge sia concepita in modo tale da premiare maggiormente gli imputati le cui confessioni siano determinanti per la completa soluzione del caso.

L'aspettativa che ciascun terrorista ha in merito alla pena che gli potrebbe essere comminata sia la seguente: se uno confessa e l'altro no, la pena sarà di un anno di reclusione per il primo e dieci per il secondo; se entrambi confessano, verranno dati quattro anni ad ognuno, in quanto ciascuna confessione non è determinante per la soluzione del caso; se infine nessuno confessa, il giudice non sarà in grado di formulare una condanna ed entrambi saranno liberi.

$$
\begin{array}{c c}
A \setminus B & \begin{array}{cc} \text{non confessa} & \text{confessa} \end{array} \\
\begin{array}{c} \text{non confessa} \\ \text{confessa} \end{array} & \left[\begin{array}{cc} (0,0) & (-10,-1) \\ (-1,-10) & (-4,-4) \end{array} \right]
\end{array}
$$

TABELLA 6

*V'è un problema simile, noto in letteratura come "dilemma del prigioniero", che porta ad una diversa matrice. Ne parleremo nell'esercizio n. 2.

La matrice delle vincite (in questo caso, delle perdite, trattandosi di utilità negative) è rappresentata in tabella 6.

Notiamo che ciascun elemento della matrice è composto da due numeri: il primo è il numero di anni assegnati al primo giocatore, il secondo è il numero di anni assegnati all'altro giocatore. Evidentemente il gioco non è a somma costante, avremo quindi bisogno di coppie di numeri per rappresentare i possibili esiti. Per questo motivo, in questi casi si chiama usualmente "bimatrice" la matrice e "bimatriciale" il gioco.

Iniziamo con lo studiare le strategie di max-min per il primo giocatore: ignoriamo quindi il secondo numero di ogni vettore. La massima perdita possibile per il primo giocatore è di 10 anni se non confessa e di 4 anni se confessa. La sua scelta di max-min consiste quindi nella confessione, che gli attribuisce 4 anni, cioè il minore dei due mali.

Se ora consideriamo le cose dal punto di vista del secondo giocatore, troviamo che anche per lui la strategia di max-min consiste nel confessare, ed il risultato sarà anche per lui una pena di 4 anni.

Notiamo che la coppia di scelte (confessare, confessare) è una " strategia in equilibrio " secondo la formalizzazione data nel capitolo precedente. Infatti, ogni giocatore ha interesse a non abbandonare la sua scelta, se l'altro usa quella strategia.

V'è, d'altra parte, una coppia di strategie che è ancora più conveniente per entrambi: la non confessione. Tale soluzione non è però sicura, perché ogni giocatore può avere un vantaggio nel tradire l'altro. Ecco il punto-chiave delle soluzioni cooperative nei giochi a somma non costante: il raggiungimento di una posizione più vantaggiosa per entrambi è subordinato ad un accordo fra le parti. Questo accordo deve essere vincolante, cioè tale che ciascun giocatore dovrà essere sicuro che l'altro eseguirà la mossa concordata.

Rappresentiamo graficamente la situazione in figura 1.

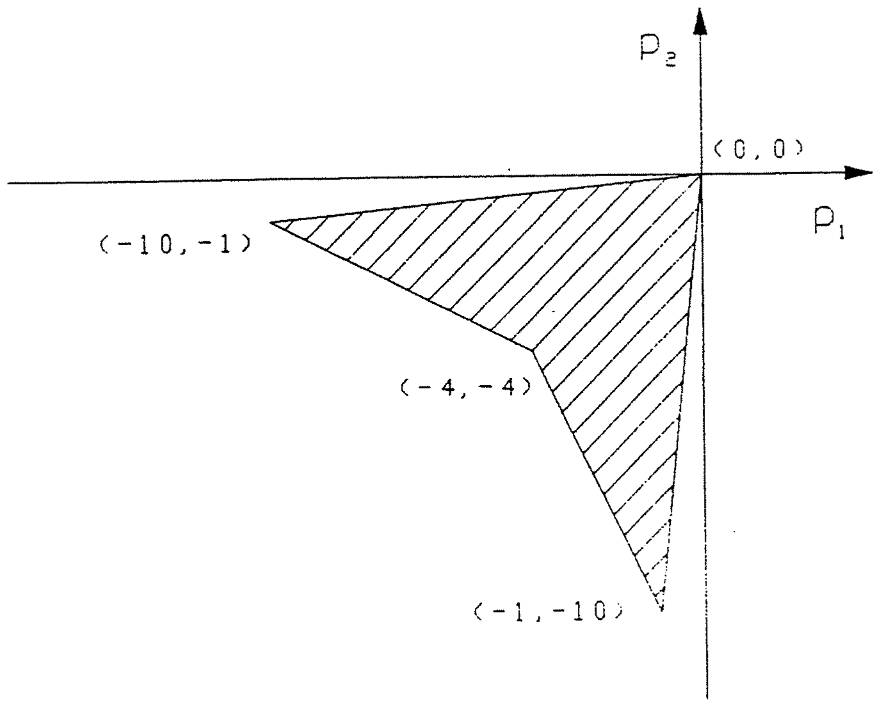

FIGURA 1

La regione tratteggiata in tale figura corrisponde all'insieme raggiungibile con l'impiego delle strategie miste ed è ottenuta congiungendo fra loro i punti sulle righe e sulle colonne della bimatrice, ma non diagonalmente (in realtà il tratto (-10,1) - (-4,-4) - (-1,-10) è curvilineo, ma può essere approssimato da segmenti). Notiamo che tale regione è concava, in quanto le strategie miste collegano fra loro gli elementi della matrice in orizzontale e in verticale, ma non obliquamente.

Il punto $(-4,-4)$ corrisponde al punto di min-max ed è la cosiddetta *soluzione competitiva di Nash* [119]. Dal punto di vista cooperativo, la soluzione ottima è $(0,0)$ e corrisponde alla *soluzione cooperativa di Nash* [120].

SOLUZIONI COOPERATIVE DI NASH

Per quanto riguarda i giochi in forma normale e le relative definizioni e proprietà, rimando alla formalizzazione data nel paragrafo precedente. In questa sede ci occuperemo, in particolare, di giochi a somma non costante fra due persone. Anche qui ogni gioco bimatriciale ha almeno un punto di equilibrio nelle strategie non cooperative.

Consideriamo ora il caso di giochi in cui è consentita la collaborazione fra giocatori. Ciò comporta che sono consentite anche le corrispondenti strategie miste e che l'utilità può essere trasferita da un giocatore all'altro.

Rappresentiamo su un piano cartesiano le coppie di valori corrispondenti alle possibili vincite raggiungibili congiuntamente dai due giocatori attraverso strategie comuni, sia pure che miste.

L'insieme definito da tali coppie si chiama *regione ammissibile* (*feasible set*). Tale regione è rappresentata dalla zona tratteggiata in figura 2, ove il punto (v_1^*, v_2^*) è il valore di min-max del gioco bimatriciale secondo le strategie miste.

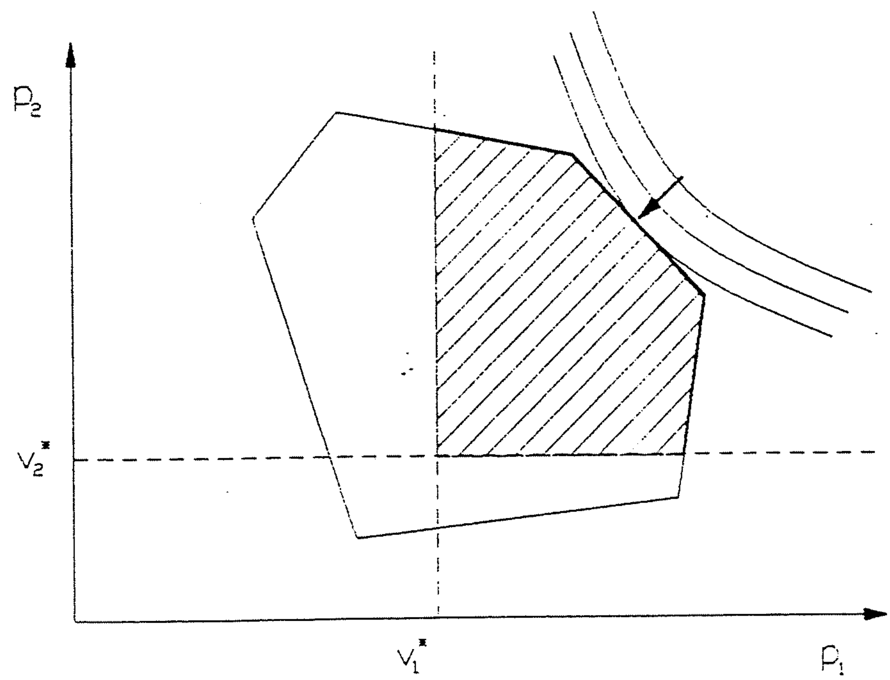

FIGURA 2

Notiamo che tutte e sole le soluzioni sulla frontiera ingrossata nella figura sono pareto-ottimali, in quanto per ogni punto della zona tratteggiata esiste un punto sulla frontiera a nord-est, che è preferibile per entrambi i giocatori. Per questo motivo, in generale, le soluzioni pareto-ottimali si chiamano anche *di frontiera*.

Si tratta ora di scegliere, su tale frontiera, un punto che possa corrispondere alla soluzione cooperativa del gioco. Notiamo che nella figura 1 la zona pareto-ottimale si riduce ad un punto (l'origine), che è preferibile per entrambi i giocatori a qualsiasi altro punto della regione ammissibile.

La scelta della soluzione corrisponde alla definizione di una funzione che, soddisfacendo opportuni criteri di razionalità, porta il feasible set in qualche punto della frontiera pareto-ottimale.

Nash propose in [120] sei criteri (razionalità individuale, appartenenza al feasible set, pareto-ottimalità, indipendenza da alternative irrilevanti e da trasformazioni lineari, simmetria) e dimostrò che esiste un'unica funzione, soddisfacente tali criteri, che porta la regione ammissibile in uno o più punti della frontiera pareto-ottimale.

Indichiamo con S il feasible set e con (v_1^*, v_2^*) il valore di min-max nel gioco bimatriciale.

La funzione di cui Nash ha dimostrato esistenza ed unicità è la seguente:

$$\max_{(p_1, p_2) \in S} (p_1 - v_1^*)(p_2 - v_2^*) \ .$$

Geometricamente (v. fig. 2) ogni soluzione di Nash corrisponde ai punti di tangenza fra il feasible set e le iperboli equilatere riferite agli assi con origine in (v_1^*, v_2^*). Ovviamente. se S è convesso, la soluzione è unica. Questo avviene, ad esempio, nel caso della figura 1 (dove, ricordiamo, la regione ammissibile corrisponde alla parte tratteggiata nella sola zona a nord-ovest del punto di max-min $(-4,-4)$). In tal caso, la soluzione cooperativa di Nash è il punto $(0,0)$.

LE STRATEGIE DI MINACCIA SECONDO NASH

Nash ha dato in [122] un diverso concetto di soluzione, basato sulla minaccia ("Nash threat solution").

Una minaccia è *effettiva* se è credibile e se tende a rafforzare la posizione di colui che minaccia nei confronti della persona minacciata.

Così, la minaccia di uccidere qualcuno è generalmente più efficace della minaccia di arrabbiarsi, perché nel primo caso l'aspirante killer minaccia concretamente la sua vittima, cosa invece che non accade nel secondo caso. D'altra parte però, la minaccia di distruggere il mondo intero non è molto credibile e non può verificarsi realmente.

Nash, nella sua trattazione, suggerisce la seguente procedura:

1) il giocatore I comunica la strategia di minaccia x;

2) il giocatore II, ignorando la strategia x, comunica la strategia di minaccia y;

3) il giocatore I ed il giocatore II trattano. Se non vengono ad un accordo, essi attuano le loro strategie di minaccia x e y.

Le soluzioni del gioco, nel caso di strategia di minaccia, vengono determinate con lo stesso metodo precedentemente illustrato, ma spostando l'origine degli assi nel punto (v_1^*, v_2^*) ottenuto nel modo seguente.

Sia $(p_1(s_1^h, s_2^k), p_2(s_1^h, s_2^k))$ l'elemento corrispondente alla h-esima riga ed alla k-esima colonna della matrice dei pagamenti.

Costruiamo la matrice D il cui elemento corrispondente a quello riportato sopra, è

$$d_{hk} = p_1(s_1^h, s_2^k) - p_2(s_1^h, s_2^k) \ .$$

La matrice D esprime dunque la differenza fra i pagamenti, riferita al primo giocatore. Ovviamente la matrice riferita al secondo giocatore è $-D$.

Tali matrici rappresentano quindi un gioco a somma zero. Siano x^* e y^* le strategie corrispondenti ad una soluzione mista di min-max per D. Siano v_1^* e v_2^* le vincite che l'uso di tali strategie assicura ai due giocatori nella bimatrice originaria. Il punto (v_1^*, v_2^*) è la nuova origine degli assi cercata.

Le intersezioni fra il feasible set e le iperboli equilatere riferite agli assi aventi origine in tale punto, costituiranno la *Nash threat solution*.

Consideriamo ad esempio il gioco bimatriciale espresso in tabella 7 e rappresentato in figura 3.

$$\begin{array}{cc} A\backslash B & \begin{array}{cc} \quad\mathrm{I} \quad & \quad \mathrm{II} \quad \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \end{array} & \begin{bmatrix} (6,24) & (-8,-24) \\ (-18,-6) & (24,6) \end{bmatrix} \end{array}$$

Tabella 7

Come si può verificare, questo gioco ha un punto di equilibrio nelle strategie miste, con

$$x_1 = \frac{3}{4}\,, \quad x_2 = \frac{1}{4}\,, \qquad y_1 = \frac{1}{2}\,, \quad y_2 = \frac{1}{2}$$

cui corrisponde una vincita di 0 per entrambi i giocatori: $v^* = (0, 0)$.

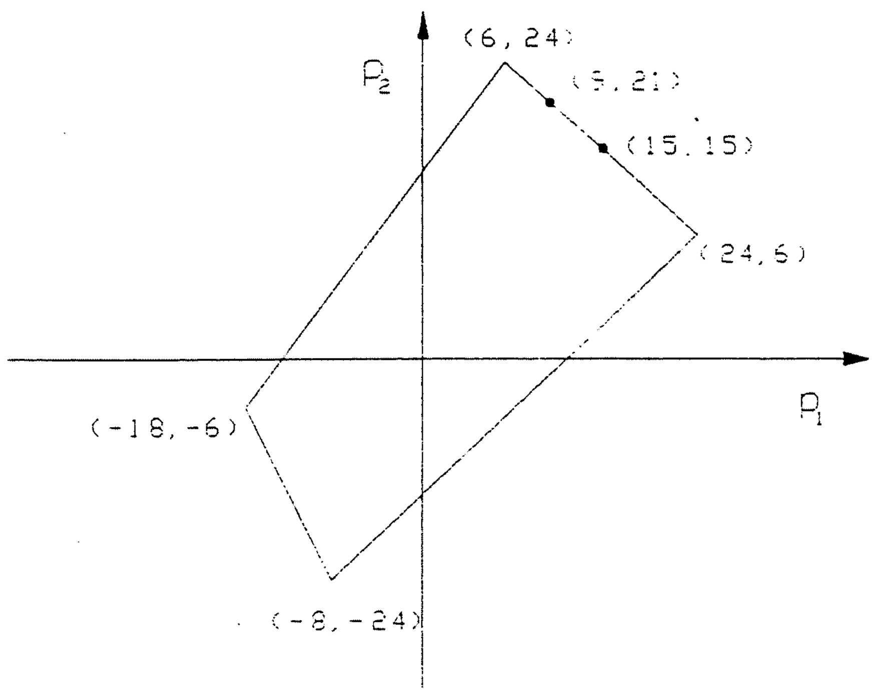

FIGURA 3

Posizionando gli assi nel punto di equilibrio, la soluzione cooperativa di Nash porta ad entrambi i giocatori una vincita di 15: $v = (15, 15)$.

Se invece ammettiamo, come modello di contrattazione, quello di Nash con minaccia, dobbiamo inizialmente costruire la matrice delle differenze:

$$D = \begin{bmatrix} -18 & 16 \\ -12 & 18 \end{bmatrix}$$

Tabella 8

Si noti che la seconda riga domina la prima e la prima colonna (riferita al secondo giocatore) domina la seconda. Pertanto, -12 corrisponde al punto di sella nelle strategie pure (s_2^1, s_1^2).

Utilizzando tali strategie pure nel gioco bimatriciale, si ottengono le vincite $(-18, -6)$ che corrispondono alla nuova origine degli assi. L'iperbole equilatera riferita a questi nuovi assi e tangente al feasible set ha il punto di tangenza in $(9, 21)$. Tale punto è la Nash threat solution.

TRASFERIBILITÀ DELL'UTILITÀ

Consideriamo il seguente gioco. Due automobilisti viaggiano in direzioni opposte su una strada a tre corsie. Ognuno ha dinanzi a sé un'auto da superare. Se nessuno sorpassa, ciascuno perde 10 secondi di tempo. Se uno sorpassa e l'altro no, chi sorpassa non perde nulla, mentre l'altro resta a -10. Se infine entrambi sorpassano, guadagnano l'"eternità".

$$\begin{array}{ccc} & \text{N} & \text{S} \\ \begin{array}{c}\text{N}\\ \text{S}\end{array} & \multicolumn{2}{c}{\left[\begin{array}{cc} (-10,-10) & (-10,0) \\ (0,-10) & (-\infty,-\infty) \end{array}\right]} \end{array}$$

Tabella 9

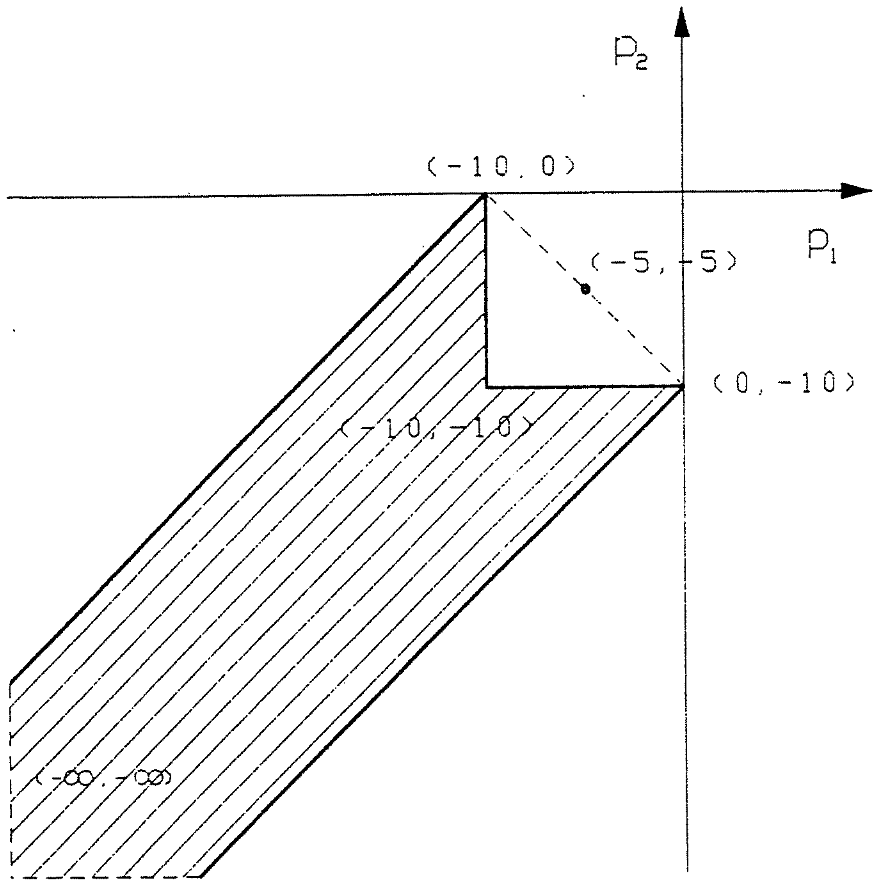

FIGURA 4

La matrice è rappresentata in tabella 9: la rappresentazione geometrica è in figura 4.

Il gioco ha evidentemente un punto di sella nelle strategie pure, con vincite $(-10, -10)$. Questo punto di sella "prudenziale" non può però essere migliorato per entrambi i giocatori se l'utilità non è trasferibile. Notiamo infatti in figura 4 che il feasible set è concavo e si riduce ai due segmenti che escono dal punto $(-10, -10)$ (ricordiamo che le frontiere del feasible set si ottengono congiungendo fra loro i punti sulle righe o sulle colonne della bimatrice, ma non diagonalmente, e che i tratti $(-10, 0)$, $(-10, -10)$, $(0, -10)$ sono in realtà curvilinei).

I punti $(-10, 0)$ e $(0, -10)$ costituiscono due soluzioni in equilibrio nel senso di Nash. Nemmeno la Nash threat solution porta un miglioramento. Consideriamo infatti la matrice delle differenze, in tabella 10.

$$\begin{bmatrix} 0 & -10 \\ 10 & 0 \end{bmatrix}$$

Tabella 10

Tale matrice ha un punto di sella nelle strategie pure, corrispondente al sorpasso per entrambi, cioè all'eternità.

Centriamo gli assi in $(-\infty, -\infty)$, cioè, indicativamente, in un punto della bisettrice a sud-ovest, molto lontano dall'origine. Le iperboli equilatere raggiungono ancora il feasible set in $(0, -10)$ e $(-10, 0)$. Osserviamo dunque come la non trasferibilità dell'utilità porti all'impossibilità di raggiungere soluzioni cooperative soddisfacenti per entrambi.

Una soluzione migliore potrebbe venire modificando le regole del gioco. Supponiamo ad esempio che vi sia un terzo giocatore: l'ente preposto alla gestione delle strade. Se negli obiettivi di tale ente v'è la massimizzazione del flusso di traffico e la minimizzazione del numero di incidenti, un suo intervento potrebbe consistere nell'imporre alla strada in questione un divieto alternativo di sorpasso, come in figura 5.

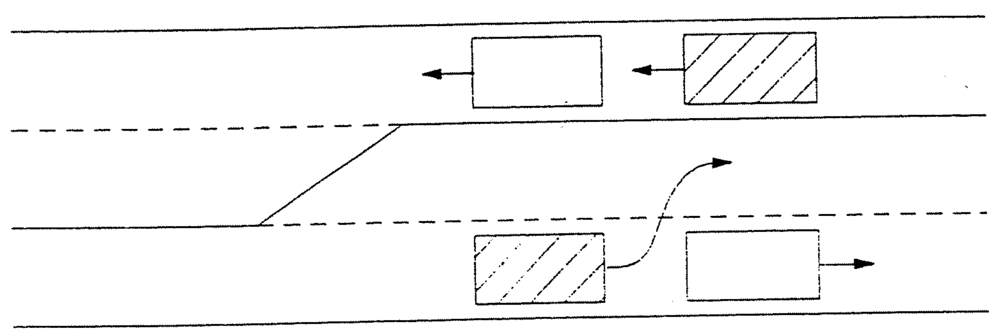

FIGURA 5

In tal modo, entrambe le automobili otterrebbero in media un ritardo di 5 secondi. L'utilità sarebbe allora resa trasferibile (quest'operazione corrisponde all'ampliamento del feasible set nell'involucro convesso di quello originario). La tangenza dell'iperbole si avrebbe allora in $(-5, -5)$.

Esercizi

ESERCIZIO N. 1: **Il problema del disarmo** ("Si vis pacem, para bellum")

Supponiamo che vi siano due grandi potenze in grado di controllare, più o meno direttamente, i punti-chiave del quadro strategico mondiale. Il problema per ciascuna di tali potenze sia quello di potenziare o non potenziare i propri armamenti attraverso la costruzione di una nuova arma, rivoluzionaria rispetto a quelle esistenti attualmente.

Se entrambi, o se nessuno, li potenzia, ne risulterà una situazione di equilibrio in cui nessuno attacca l'altro. Se invece uno dei due lo fa e l'altro no, si crea una situazione di disequilibrio che indurrà il paese meglio armato ad attaccare, vincendo.

Detto C il costo della nuova arma, ipotizziamo che il guadagno netto conseguente da un'eventuale vittoria possa essere quantificato in nC (con n reale maggiore di 1), mentre la perdita conseguente ad una sconfitta sia $-\infty$. Costruire:

- la matrice dei pagamenti;
- il grafico corrispondente;
- la soluzione competitiva di Nash;
- la soluzione cooperativa di Nash;

– la soluzione di minaccia secondo Nash.

ESERCIZIO N. 2: **Il dilemma del prigioniero**

Il classico "dilemma del prigioniero" è simile a quello del terrorista presentato in questo paragrafo. La relativa matrice può essere così rappresentata:

$$\begin{bmatrix} (-5,-5) & (-10,0) \\ (0,-10) & (-9,-9) \end{bmatrix}$$

Risolvere il problema come nell'esercizio precedente.

ESERCIZIO N. 3: **Un modello di marketing più vicino alla realtà**

Riprendiamo in esame il problema del marketing esaminato nel paragrafo 2.1 e modifichiamo le regole nel modo seguente.

Poniamo che se una ditta fa un investimento su una piazza, mentre l'altra non investe niente, il profitto lordo per la vincitrice sia di 500.000 dollari. Il profitto netto si otterrà sottraendo dai 500.000 dollari l'importo che la ditta ha investito in pubblicità. L'altra vincerà zero. Se invece entrambe le ditte investono su tutte e due le piazze, il profitto lordo per ognuna sarà calcolato in proporzione alle quote investite su ciascuna piazza. I profitti netti si calcoleranno come sopra.

A titolo di esempio, rappresentiamo in tabella 11 i calcoli necessari per stabilire le vincite delle due ditte A e B nel caso che A investa 400.000 dollari sulla prima piazza e niente sulla seconda, mentre B investa 200.000 dollari sulla prima e niente sulla seconda. Le cifre nella tabella sono espresse in migliaia di dollari.

vincita di A			
I		II	
P. L.	S. P.	P. L.	S. P.
333	-400	0	0
profitto netto totale $-67+0=-67$			

vincita di B			
I		II	
P. L.	S. P.	P. L.	S. P.
167	-200	0	0
profitto netto totale $-33+0=-33$			

P. L.: profitto Lordo; S. P.: Spesa Pubblicitá

Tabella 11

Per capire la ripartizione del profitto lordo ottenuto sulla prima piazza, notiamo che $400 : 200 \simeq 333 : 167$ e $333 + 167 = 500$.

Diamo in tabella 12 la matrice dei pagamenti risultante.

L'esercizio consiste in:

- verificare l'esattezza della tabella 12;

- cogliere e giustificare le simmetrie in tale matrice;

– escludere le strategie dominate (di riga e di colonna);

– nella matrice risultante (che si ridurrà ad una sola colonna) individuare la strategia ottima di A e le conseguenti vincite per A e per B.

	B	I	II	I	II	I	II
A		200	0	100	100	0	200
I	II						
400	0	−67	−33	0	400	100	300
300	100	400	0	225	175	267	133
200	200	350	50	266	124	350	50
100	300	267	133	225	175	400	0
0	400	100	300	0	400	−67	−33

Tabella 12

Conclusioni

In questo paragrafo abbiamo visto che, mentre nei giochi a somma zero fra due persone esiste una precisa strategia vincente, nei giochi più generali le strategie possono essere diverse e dipendono dalle regole del gioco e dal modello di contrattazione che si presume verrà adottato.

Gli esempi qui proposti sono ancora lontani dalla realtà, ma già abbiamo visto nell'esercizio n. 3 come, con semplici ritocchi, i modelli di teoria dei giochi possano essere avvicinati quanto si vuole ai casi reali. In particolare, sappiamo che il problema del disarmo è stato affrontato negli ambienti decisionali russi e statunitensi proprio con tecniche analoghe a queste (v. ad es. [24] e [29]). Ovviamente, le matrici erano più articolate e consideravano vari livelli di armamento, nonché dislocazioni ottime, reazioni psicologiche dell'avversario, ecc. V'è da aggiungere che la soluzione cooperativa raggiunta dopo la "perestroika" è stata possibile grazie alla disponibilità di entrambe le parti in causa a consentire controlli incrociati (cioè delegazioni di una parte che potessero ispezionare le basi militari dell'altra parte). In effetti, è proprio sulle possibilità di controlli incrociati che si basano le soluzioni cooperative. Per altri esempi in merito rimando a [27] e [78].

Un'ulteriore considerazione riguarda l'introduzione di un terzo giocatore (come abbiamo visto nel gioco del sorpasso), che può rendere convesso il feasible set, con un conseguente vantaggio per entrambi i giocatori iniziali. In effetti, accade sovente che un terzo giocatore possa favorire una soluzione più conveniente per entrambi. Ricordiamo, ad esempio, l'intervento del Governo nella contrattazione tra datore di lavoro e sindacati, intervento che può consentire un accordo attraverso una mediazione che comporti vantaggi economici aggiuntivi (ad es. sgravi fiscali).

Ancora, è fondamentale la presenza del mediatore in moltissime compravendite. Tale mediatore, oltre che suggerire soluzioni esogene, può infatti intervenire personalmente nella contrattazione, rinunciando ad una parte della sua percentuale, pur di far raggiungere l'accordo ed ottenere comunque un compenso (v. ad es. compravendite di beni immobili, di giocatori di squadre sportive, ecc.).

Osserviamo, infine, che l'introduzione di un $(n+1)$-esimo giocatore può in generale rendere a somma zero ogni gioco a somma non costante (basta infatti porre

$$p_{n+1}(s_1, \ldots, s_n) = -\sum_{i=1}^{n} p_i(s_1, \ldots, s_n)$$

per tutti i vettori $(s_1, \ldots, s_n)$).

Capitolo 4

GIOCHI IN FORMA CARATTERISTICA

4.1 Fondamenti

UN ESEMPIO

Supponiamo che tre industrie abbiano delle specializzazioni differenti per la produzione di alcune componenti. La produzione di un certo bene di largo consumo, basato su tali componenti, può essere allora avvantaggiata da una cooperazione. Ad esempio, il costo unitario di produzione sia, per la prima ditta, di 1 unità di capitale per la prima componente, di 3 per la seconda e di 4 per la terza, mentre gli stessi costi per la seconda ditta siano rispettivamente di 3, 1 e 4 e per la terza di 2, 3 e 3.

La produzione unitaria costa 8 unità di capitale per ciascuna industria. Se la prima e la seconda ditta si accordassero per una produzione congiunta, ove la prima fornisce la prima componente e la seconda le altre due, il costo unitario diverrebbe $1+1+4=6$. Analogamente, una collaborazione fra la prima e la terza ditta porterebbe ad un costo unitario di $1+3+3=7$, mentre una collaborazione fra la seconda e la terza ditta darebbe $2+1+3=6$. Infine, una collaborazione globale fra le ditte, ove ciascuna fornisse il contributo per essa meno costoso, darebbe un costo unitario di $1+1+3=5$.

Una coalizione fra la prima e la seconda azienda porterebbe quindi ad un risparmio pari a $8-6=2$ unità di capitale per ogni singolo bene prodotto, e così via per le altre coalizioni.

FUNZIONE CARATTERISTICA

In generale, detta $v(S)$ la vincita data dalla collaborazione per la coalizione S (*funzione caratteristica del gioco*), si ha *:

$$v(1,2)=v(2,3)=2\ ;\quad v(1,3)=1\ ;\quad v(1,2,3)=3\ .$$

Ovviamente, i singoli giocatori non hanno alcun "vantaggio di coalizione" e pertanto $v(1)=v(2)=v(3)=0$.

Notiamo che la funzione caratteristica è *superadditiva* in quanto

$$v(1)+v(2)\leq v(1,2)\ ,\quad v(1)+v(2,3)\leq v(1,2.3)\ ,\quad \ldots\ :$$

in generale

$$v(S)+v(R)\leq v(S\cup R)$$

per tutte le coalizioni disgiunte S, R ("l'unione fa la forza").

*Per motivi di semplicità adottiamo d'ora innanzi le espressioni: $v(1,2)$, $v(2,3)$, ecc. in luogo di quelle matematicamente corrette: $v(\{1,2\})$, $v(\{2,3\})$, ecc.

A questo punto è facile prevedere che le tre ditte formeranno la coalizione più conveniente, cioè quella globale. Ma il problema nasce qui: come ripartire fra le tre partecipanti la vincita ottenuta ($v(1,2,3) = 3$)?

Può aver senso un accordo in cui ciascuna prenda per sé un'unità di vincita. D'altra parte, la seconda ditta può osservare che il suo contributo è più importante di quello delle altre due. Infatti, se essa si toglie dalla coalizione globale, il guadagno per la coalizione delle altre due ($v(1,3)$) scende ad 1. Se invece una qualsiasi delle altre si toglie dalla coalizione globale, il vantaggio per la coalizione delle rimanenti diventa 2. La seconda azienda può quindi chiedere per sé una quota superiore ad 1, minacciando, in caso di non accettazione, di togliersi dal gruppo.

Quale può essere una ragionevole aspettativa dell'esito della contrattazione? Facciamo degli esempi paradossali.

La ripartizione $(1,3,-1)$ non è ovviamente accettabile per la terza ditta, che preferirebbe mettersi da sola, ottenendo una vincita non negativa. Le ripartizioni $(1,1,0)$ e $(1,2,1)$ non sono ripartizioni effettive, in quanto la somma delle quote è diversa dalla vincita del gruppo totale.

IMPUTAZIONI

Ogni ripartizione accettabile deve dunque essere un vettore reale $x = (x_1, x_2, x_3)$ tale che

$x_i \geq v(i)$per tutti gli i da 1 a 3 (*razionalità individuale*)

$\sum_{i=1}^{3} x_i = v(1,2,3)$ (*razionalità di gruppo*).

Ogni vettore reale che soddisfa tali condizioni si chiama *imputazione*.

DOMINANZA FRA IMPUTAZIONI

Consideriamo ora l'imputazione $(0.8, 1.1, 1.1)$. La prima e la seconda industria possono rifiutarla ed imporre, in sua vece, l'imputazione $(0.85, 1.15, 1)$. Infatti, tale imputazione è, per ciascuna di esse, più conveniente. Inoltre, se la terza ditta insistesse per mantenere la prima imputazione, le prime due potrebbero coalizzarsi fra loro ed imporla comunque, in quanto $v(1,2) = 2 \geq 0.85 + 1.15$. Esse hanno cioè la forza di ottenere da sole quella distribuzione. Si può dunque dire che l'imputazione $(0.85, 1.15, 1)$ *domina*, rispetto alla coalizione $(1, 2)$, l'imputazione $(0.8, 1.1, 1.1)$.

È ragionevole aspettarsi che ogni imputazione che sia dominata, rispetto ad una certa coalizione, da un'altra imputazione, sia da scartare, in quanto la coalizione insoddisfatta si metterà da sola ed otterrà ciò che chiede.

In generale, diciamo che un'imputazione *domina* un'altra imputazione se esiste almeno una coalizione rispetto alla quale la prima imputazione domina la seconda.

Nel nostro caso possiamo verificare che l'imputazione $(0.75, 1.5, 0.75)$ non è dominata, perché nessuna coalizione di due aziende può ottenere, congiuntamente, più di quanto le verrebbe assegnato da tale imputazione ($0.75 + 1.5 \geq v(1,2)$, $1.5 + 0.75 \geq v(2,3)$ e $0.75 + 0.75 \geq v(1,3)$). D'altra parte, anche l'imputazione $(0.5, 2, 0.5)$ non è dominata, in quanto la coalizione $(1, 3)$, pur potendo ottenere congiuntamente $0.5 +$

$0.5 = v(1,3)$, non ha alcuna distribuzione interna che sia più soddisfacente per entrambe: se aggiungiamo qualcosa all'una, dobbiamo toglierla all'altra. Per lo stesso motivo, tutte le imputazioni con $x_2 = 2$ non sono dominate.

NUCLEO

L'insieme di tutte le imputazioni non dominate si chiama *nucleo* ("core").

Il nucleo, introdotto da Gillies nella sua tesi di laurea [83], è una generalizzazione per giochi n-persone della curva dei contratti di Edgeworth [48]. Esso ha certe caratteristiche di stabilità, ma, come vedremo, esistono dei giochi il cui core è vuoto.

INSIEMI STABILI

Un concetto di stabilità ancora più difficile da ottenere è stato introdotto da von Neumann e Morgenstern in [171] con gli *insiemi stabili* ("stable sets"). Ognuno di tali insiemi è costituito da tutte e sole le imputazioni non dominate (soddisfacenti, cioè, la "stabilità interna") tali che, per ogni imputazione non appartenente allo stable set, ne esista almeno una dello stable set che la domina ("stabilità esterna"). Anche per gli insiemi stabili non è garantita l'esistenza e l'unicità (v. [102] e [103]).

NUCLEOLO

Un altro concetto di soluzione, importante per i suoi impieghi nei modelli di prescrizione in ambito sociale, è il *nucleolo* ("nucleolus"), introdotto da Schmeidler in [149].

Riprendiamo il nostro esempio e consideriamo una generica imputazione, ad esempio la $(0.5, 1, 1.5)$. Osserviamo che $v(1,2) = 2$, mentre $x_1 + x_2 = 1.5$. Pertanto, la coalizione $(1,2)$ potrebbe assicurarsi una vincita superiore di 0.5 a quella che le viene assegnata da quella imputazione. Diciamo allora che il *rimpianto* $c(1,2)$ della coalizione $(1,2)$ rispetto all'imputazione $(0.5, 1, 1.5)$ è 0.5. Rispetto alla stessa imputazione, il rimpianto della coalizione $(1,3)$ è $c(1,3) = v(1,3) - x_1 - x_3 = -1$: in questo caso, non si tratta allora di rimpianto, ma di soddisfazione. Continuando nei calcoli, otteniamo:

$$\begin{array}{ll} c(1,2) = 0.5 & c(1) = c(2,3) = -0.5 \\ c(2) = c(1,3) = -1 & c(3) = -1.5\ . \end{array}$$

Pertanto, la coalizione che è peggio trattata da questa imputazione è la $(1,2)$, con un rimpianto di 0.5. Scriveremo allora che $c_M(0.5, 1, 1.5) = 0.5$. Per simmetria, anche $c_M(1.5, 1, 0.5) = 0.5$. Se ripetiamo gli stessi calcoli rispetto all'imputazione $(3, 0, 0)$ otteniamo che il massimo rimpianto compete questa volta alla coalizione $(2,3)$ ed è $c_M(3,0,0) = 2$. Quindi quest'ultima imputazione è meno preferibile della (0.5,1,1.5), in quanto produce un danno maggiore ($c_M(3,0,0) > c_M(0.5, 1, 1.5)$).

È possibile verificare che, di tutte le possibili imputazioni, quella per la quale il massimo rimpianto c_M è minimo, è l'imputazione $\left(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Per tale imputazione c_M vale $-1/3$.

Il nucleolo è l'insieme delle imputazioni che minimizzano il massimo rimpianto.

Nel nostro esempio, tale insieme è composto da un unico elemento, ma ciò non vale in generale. È possibile dimostrare che se l'insieme dei vettori dei pagamenti è non vuoto, compatto e convesso (cioè nei casi più usuali), il nucleolo è non vuoto e consiste in un'unica imputazione.

FORMALIZZAZIONE

Sia $N = \{1, \ldots, n\}$ l'insieme dei giocatori di un gioco cooperativo fra n persone e sia $\mathcal{P}(N)$ l'insieme delle parti di N (*coalizioni*). Come è noto, tale insieme si compone di 2^n elementi, considerando anche la coalizione vuota $\emptyset$.

Supponiamo che sia possibile assegnare ad ogni coalizione $S \in \mathcal{P}(N)$ una vincita $v(S)$, con la condizione $v(\emptyset) = 0$. Si dirà allora che il gioco è espresso in *forma caratteristica* v. In particolare se avviene che:

$$v(S) + v(R) \leq v(S \cup R)$$

per tutte le $S, R \in \mathcal{P}(N)$ tali che $S \cap R = \emptyset$, si dirà che la funzione caratteristica del gioco è *superadditiva*.

Esistono anche giochi con v *subadditiva*, ad esempio per la ripartizione di costi, e giochi con v qualsiasi, quando alcune collaborazioni non sono convenienti.

I giochi in cui tutte le disuguaglianze sono sostituite da uguaglianze si chiamano *inessenziali*; altrimenti, si chiamano *essenziali*.

Per tutte le funzioni superadditive è facile verificare che:

$$\sum_{i \in S} v(i) \leq v(S) \qquad \text{per tutte le } S \in \mathcal{P}(N).$$

Un gioco in forma caratteristica si dice *a somma costante* se

$$v(S) + v(N - S) = v(N) \qquad \text{per tutte le } S \in \mathcal{P}(N).$$

Un'*imputazione* è un vettore $(x_1, \ldots, x_n)$ tale che

$$x_i \geq v(i) \quad \text{per tutti gli } i \text{ da } 1 \text{ a } n \ (\textit{razionalità individuale})$$

e

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = v(N) \qquad (\textit{razionalità di gruppo}).$$

Si dice che l'imputazione x *domina* l'imputazione y tramite S se

$$x_i > y_i \qquad \text{per tutti gli } i \in S$$

e

$$v(S) \geq \sum_{i \in S} x_i \ .$$

Si dice che x *domina* y se esiste almeno una coalizione S per cui x domina y tramite S.

Per le definizioni di *insiemi stabili*, *nucleo* e *nucleolo* rimandiamo alle pagine precedenti. In particolare, ricordiamo che ognuna di tali soluzioni può essere vuota, oppure può essere composta da più di un elemento.

Un importantissimo teorema che consente di costruire il core è il seguente.

L'imputazione $x = (x_1, \ldots, x_n)$ appartiene al core se e solo se

$$\sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \qquad \text{per tutte le } S \in \mathcal{P}(N).$$

Nel caso dell'esempio utilizzato in questo paragrafo, il core è dunque l'insieme delle imputazioni per cui vale:

$$\begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \\ x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1 + x_3 \geq 1 \\ x_2 + x_3 \geq 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \ . \end{cases}$$

Ad esempio è facile vedere che il vettore $(0, 0, 3)$ è un'imputazione che non appartiene al core. Chi ha un po' di dimestichezza con la geometria dello spazio potrà verificare che tale insieme è costituito dall'involucro convesso dei punti $(0, 2, 1)$, $(1, 2, 0)$ e $(1, 1, 1)$, cioè dall'insieme delle imputazioni $(1-a, 1+a+b, 1-b)$ che si ottengono facendo variare in tutti i modi possibili i parametri reali a e b nell'intervallo $[0, 1]$.

Vi sono giochi a nucleo vuoto. Ad esempio, è facile verificare che nel gioco a tre persone in cui le vincite dei singoli giocatori sono nulle, mentre tutte le altre valgono 1, il core è vuoto. Osserviamo, infatti, che deve valere:

$$\begin{cases} x_i \geq 0 \qquad (i = 1, 2, 3) \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 + x_3 \geq 1 \\ x_2 + x_3 \geq 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \ . \end{cases}$$

Sommando le tre disuguaglianze centrali, si ottiene:

$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 3$$

e questo è in contraddizione con l'ultima uguaglianza.

In generale, si può provare che ogni gioco essenziale a somma costante ha core vuoto.

Esercizi

ESERCIZIO N. 1: **Proprietà della funzione caratteristica**

Consideriamo il gioco a tre persone così definito:

$$\begin{array}{lll} v(\emptyset) = 0 & v(1) = v(2) = a & v(3) = b \\ v(1,2) = c & v(1,3) = v(2,3) = d & v(1,2,3) = e \end{array}$$

con a, b, c, d ed e parametri reali.

- Trovare le condizioni perché il gioco sia inessenziale.
- Trovare le condizioni perché v sia superadditiva.
- Trovare le condizioni perché il core sia non vuoto.
- Trovare un'imputazione che non appartiene al core.
- Se $a = 0$, $b = 1$, $c = 2$, $d = 3$ ed $e = 4$, trovare il massimo rimpianto rispetto all'imputazione $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Esercizio n. 2: **Costi di trasporto**

Modificare il gioco fra le tre ditte produttrici introducendo dei costi di trasporto e, per questo nuovo gioco, rispondere ai quesiti dell'esercizio precedente.

Esercizio n. 3: **Costruzione di una funzione caratteristica**

Nella tabella 13 è riportato un gioco a tre persone in forma normale. La matrice a sinistra riporta i pagamenti per i tre giocatori nel caso che il giocatore 3 usi la mossa s_1^3; la matrice a destra riporta i pagamenti per i tre giocatori nel caso che il giocatore 3 usi la mossa s_2^3. Si noti che il gioco è a somma costante 3, pertanto $v(1,2,3) = 3$.

Il giocatore 3 sceglie s_1^3:

$$\begin{array}{cc} 1\backslash 2 & \begin{array}{cc} \quad s_1^2 \quad & \quad s_2^2 \quad \end{array} \\ \begin{array}{c} s_1^1 \\ s_2^1 \end{array} & \begin{bmatrix} (0,0,3) & (1,1,1) \\ (1,1,1) & (3,0,0) \end{bmatrix} \end{array}$$

Il giocatore 3 sceglie s_2^3:

$$\begin{array}{cc} 1\backslash 2 & \begin{array}{cc} \quad s_1^2 \quad & \quad s_2^2 \quad \end{array} \\ \begin{array}{c} s_1^1 \\ s_2^1 \end{array} & \begin{bmatrix} (2,1,0) & (0,2,1) \\ (0,1,2) & (1,2,0) \end{bmatrix} \end{array}$$

Tabella 13

Supponiamo che i giocatori 2 e 3 si coalizzino contro il giocatore 1. Le possibili mosse del nuovo giocatore $(2,3)$ sono la coppia (s_i^2, s_j^3) ove i e j possono assumere i valori 1 e 2. I pagamenti del giocatore $(2,3)$ sono la somma dei pagamenti del giocatore 2 e del giocatore 3. La nuova matrice dei pagamenti è riportata nella tabella 14.

$(2,3)$ 1	(s_1^2, s_1^3)	(s_1^2, s_2^3)	(s_2^2, s_1^3)	(s_2^2, s_2^3)
s_1^1	$(0,3)$	$(2,1)$	$(1,2)$	$(0,3)$
s_2^1	$(1,2)$	$(0,3)$	$(3,0)$	$(1,2)$

TABELLA 14

La matrice può essere semplificata eliminando l'ultima colonna, in quanto questa è uguale alla prima. Inoltre, dal punto di vista del giocatore $(2,3)$, la terza colonna è dominata dalla prima. La matrice può quindi ridursi alle prime due colonne. Esiste un unico punto di sella nelle strategie miste che assegna alle varie mosse le seguenti probabilità:

$$s_1^1 = s_1^2 s_2^3 = \frac{1}{3} \qquad \text{e} \qquad s_2^1 = s_1^2 s_1^3 = \frac{2}{3}\,.$$

Le vincite corrispondenti sono $v(1) = \frac{2}{3}$ e $v(2,3) = \frac{7}{3}$.

L'esercizio consiste in:

- completare la costruzione della funzione caratteristica per le altre coalizioni, cioè calcolare $v(2)$, $v(3)$, $v(1,2)$ e $v(1,3)$ usando il metodo descritto sopra.

- Verificare che il nucleo è vuoto (ricordare l'ultima osservazione di questo paragrafo).
- Trovare il massimo rimpianto rispetto all'imputazione $(1, 1, 1)$.

Conclusioni

Abbiamo visto quanto sia importante, nei giochi cooperativi in forma caratteristica, il modo di distribuire fra i membri della coalizione il plus-valore ottenuto dalla collaborazione. Tale distribuzione può in certi casi esistere ed essere unica, ma vi sono giochi in cui non è garantita né l'esistenza né l'unicità di una soluzione che sia dotata di opportune caratteristiche di stabilità. Volendo avere comunque una ragionevole aspettativa della vincita a priori su cui possa contare un giocatore prima di entrare nel gioco, occorrerà basarsi su altri criteri. È quanto vedremo nel prossimo paragrafo.

4.2 Valori

IL VALORE DI UN GIOCO SECONDO SHAPLEY

Riprendiamo l'esempio utilizzato nel paragrafo precedente:

$$v(1) = v(2) = v(3) = 0 \; ; \qquad v(1,2) = v(2,3) = 2 \; ;$$
$$v(1,3) = 1 \; ; \qquad v(1,2,3) = 3 \; .$$

Supponiamo che la contrattazione avvenga nel modo seguente.

Inizialmente, il giocatore 2 si rivolge al giocatore 1 e gli propone di unirsi a lui. Il signor 1 risponde: "Qual'è l'apporto che mi dai?" Il signor 2 risponde: "Se tu giocassi da solo, vinceresti 0; la nostra coalizione vince 2, pertanto l'apporto che ti dò è $(2-0=)\,2$". A questo punto si avvicina il signor 3 e chiede: "Posso unirmi a voi?". Quelli rispondono in coro: "Che cosa ci dai?" E lui: "Insieme a me, vincete 3; senza di me vincete 2, quindi l'apporto che vi dò è 1". Ora, se ad ogni giocatore che si aggiunge si assegnasse un compenso pari all'apporto che lui dà alla coalizione, si avrebbe: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$.

Successione delle coalizioni			contributi dei giocatori			contributi pesati		
			1	2	3	1	2	3
(1),	(1,2),	(1,2,3)	0	2	1	0	2/6	1/6
(1),	(1,3),	(1,2,3)	0	2	1	0	2/6	1/6
(2),	(1,2),	(1,2,3)	2	0	1	2/6	0	1/6
(2),	(2,3),	(1,2,3)	1	0	2	1/6	0	2/6
(3),	(1,3),	(1,2,3)	1	2	0	1/6	2/6	0
(3),	(2,3),	(1,2,3)	1	2	0	1/6	2/6	0
					Totali	5/6	8/6	5/6
					Totale	3		

TABELLA 15

La successione delle aggiunte potrebbe però svolgersi diversamente (ad esempio, prima 3 si aggiunge a 1, poi 2 si aggiunge a $(1,3)$; in tal caso la ripartizione sarebbe: $x_1 = 0$, $x_3 = 1$, $x_1 = 2$). Schematizziamo in tabella 15 i possibili ordinamenti e le conseguenti vincite.

Se consideriamo equiprobabili tutti i possibili modi di formare la coalizione globale, allora la vincita attesa da ciascun giocatore sarà data dal contributo da lui apportato alle varie coalizioni, moltiplicato per la probabilità che egli si trovi in posizione "pivotale", cioè in fase di aggiunta ad una coalizione già costituita. Nel nostro caso, tale probabilità è $\frac{1}{6}$ per ciascun giocatore.

Ad esempio, il giocatore 1 è pivotale una volta nella prima riga (per la formazione della coalizione (1), a partire dalla coalizione vuota $\emptyset$); una volta nella seconda riga (per la stessa ragione di sopra); una volta nella terza riga (per la formazione della coalizione $(1,2)$, a partire dalla (2)) e così via fino alla fine, per un totale di sei volte.

Riportiamo nella terza colonna della tabella 15 i contributi dei giocatori alle varie coalizioni, pesati con le probabilità di pivotalità, cioè $\frac{1}{6}$. I totali relativi all'i-esimo giocatore daranno la sua vincita attesa ϕ_i. In questo caso sarà quindi $\phi_1 = \frac{5}{6}$, $\phi_2 = \frac{4}{3}$ e $\phi_3 = \frac{5}{6}$. Tale vincita è dunque riferita ad un preciso modello di contrattazione: aggiunte equiprobabili di singoli giocatori a coalizioni in formazione ed assegnazione al giocatore entrante del contributo da lui apportato.

La ripartizione assegnata da questo schema di contrattazione è nota come *valor Shapley*, dal lavoro di Shapley [154].

Gioc.	contributo dell'i-esimo giocatore alle coalizioni di 1 giocatore	alle coalizioni di 2 giocatori	alle coalizioni di 3 giocatori
1	$v(1) - v(\phi) = 0$	$v(1,2) - v(2) = 2$ $v(1,3) - v(3) = 1$ totale 3	$v(1,2,3)-$ $-v(2,3) = 1$
2	$v(2) - v(\phi) = 0$	$v(1,2) - v(1) = 2$ $v(2,3) - v(3) = 2$ totale 4	$v(1,2,3)-$ $-v(1,3) = 2$
3	$v(3) - v(\phi) = 0$	$v(1,3) - v(1) = 1$ $v(2,3) - v(2) = 2$ totale 3	$v(1,2,3)-$ $-v(1,2) = 1$
coeff.	$\frac{0!\,2!}{3!} = \frac{1}{3}$	$\frac{1!\,1!}{3!} = \frac{1}{6}$	$\frac{2!\,0!}{3!} = \frac{1}{3}$

Gioc.		ϕ_i
1	$\frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 1 =$	$\frac{5}{6}$
2	$\frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot 2 =$	$\frac{8}{6}$
3	$\frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 1 =$	$\frac{5}{6}$
	Totale	3

TABELLA 16

La vincita ϕ_i che il valor Shapley assegna all'i-esimo giocatore è in generale espressa nel modo seguente:

$$\phi_i = \sum_{\text{tutte le } S \subseteq N} \frac{(s-1)!\,(n-s)!}{n!}[\,v(S) - v(S - \{i\})\,]$$

ove s è il numero dei giocatori della coalizione S e la somma è estesa a tutte le coalizioni S delle quali l'i-esimo giocatore fa parte. (Ricordiamo che $x!$ equivale a $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots x$, con la convenzione $0! = 1$.)

Riportiamo in tabella 16 il calcolo del valor Shapley effettuato sui dati dell'esempio, utilizzando direttamente la formula di Shapley.

Shapley ha inoltre fornito una giustificazione assiomatica del suo "valore", cioè ha provato che quella sopraccitata è l'unica funzione in grado di garantire il rispetto di tre proprietà: simmetria, uomo di paglia a mani vuote e additività.

La prima proprietà prescrive che il valore non dipende da permutazioni dei giocatori (ad esempio, se si scambiano fra loro l'etichetta del giocatore 2 con quella del giocatore 3, alla fine il valore sarà $\frac{5}{6}$ per il giocatore 2 e $\frac{4}{3}$ per il giocatore 3).

La seconda prescrive che, se un giocatore non apporta nessun contributo ad alcuna coalizione, gli venga assegnato solo quello che lui ottiene giocando da solo (cioè $\phi_i = v(i)$ se i è uno "straw-man", o "dummy-player").

La terza proprietà prescrive che, se un gioco è composto dalla somma di due giochi v' e v'', la vincita di ogni giocatore nel gioco cumulato è la somma delle vincite ottenute nei due giochi componenti:

$$\phi_i(v' + v'') = \phi_i(v') + \phi_i(v'') \qquad \text{per tutti gli } i \in N\,.$$

Mentre le prime due condizioni sono universalmente accettate, la terza è meno ovvia. Per questo motivo altri autori hanno proposto successivamente altri valori del gioco, basati su differenti presupposti assiomatici e/o modelli di contrattazione. Il valor Shapley resiste peraltro tuttora, in quanto trova molteplici applicazioni a varie situazioni reali (v. ad es. il prossimo paragrafo). Dell'innumerevole letteratura che fa riferimento al valor Shapley mi limiterò qui a citare alcuni risultati di carattere computazionale.

Shapley aveva provato che la sua soluzione coincide con il baricentro dell'insieme delle imputazioni in tutti i giochi a due persone, o a tre persone a somma costante, o simmetrici. Questo risultato non vale, però, in generale per tutti gli altri giochi. Una diversa formulazione del valor Shapley [57] ha consentito di costruire un simplesso dello spazio euclideo n-dimensionale, il cui baricentro coincide con il valor Shapley. Tale nuova formulazione ha reso possibile la costruzione di un algoritmo efficiente per il calcolo automatico di tale valore, estendendo ai giochi subadditivi un analogo algoritmo già proposto in [51] per i giochi superadditivi.

Come si è detto, ulteriori valori furono proposti dopo Shapley. Qui riporteremo solo il più noto, il valore di Banzhaf normalizzato [10]. Inoltre, citeremo come "valore" una generalizzazione della soluzione cooperativa di Nash, di cui sono garantite esistenza ed unicità.

IL VALORE NORMALIZZATO DI BANZHAF

Questo valore assegna ad ogni giocatore una vincita proporzionale al contributo totale da lui dato a tutte le possibili coalizioni. Per capire meglio, esprimiamo in tabella 17 il calcolo del valore normalizzato di Banzhaf ϕ nell'ultimo esempio presentato. Nelle prime tre colonne sono riportati gli stessi totali della tabella 16. La quarta colonna dà la somma delle righe. Poiché la somma totale (in basso) è 14, mentre la vincita della coalizione globale N è $v(N) = 3$, occorre moltiplicare ciascun elemento per $\frac{3}{14}$. Si ottiene così: $\phi_1 = \frac{6}{7}$, $\phi_2 = \frac{9}{7}$ e $\phi_3 = \frac{6}{7}$.

Contributo dell'i-esimo giocatore	Giocatore 1	Giocatore 2	Giocatore 3	Totali
alle coalizioni di 1 giocatore	0	0	0	
alle coalizioni di 2 giocatori	3	4	3	
alle coalizioni di 3 giocatori	1	2	1	
Contributo totale	4	6	4	14
Banzhaf ϕ_i	6/7	9/7	6/7	3
	Coefficiente			3/14

TABELLA 17

In generale, la formula che esprime il *valore normalizzato di Banzhaf* è:

$$\phi_i = K \sum_{\text{tutte le } S \subseteq N} [v(S) - v(S - \{i\})]$$

ove K è un coefficiente che consente di "far quadrare i totali" e si ottiene dividendo $v(N)$ per la somma dei contributi totali:

$$K = v(N) / \sum_{h=1}^{n} \sum_{\text{tutte le } S \subseteq N} [v(S) - v(S - \{h\})] .$$

Nel nostro esempio è $K = \frac{3}{14}$.

Come si può notare questo valore, a differenza di quello di Shapley, non tiene conto dell'ordinamento con cui le coalizioni vengono formate (il primo si basa su combinazioni, il secondo su permutazioni). Per tale motivo, mentre il valor Shapley è più adatto a descrivere situazioni reali di contrattazione, quello di Banzhaf viene meglio impiegato in fase prescrittiva, cioè quando si vogliono fissare leggi che stabiliscano una ripartizione del guadagno fra i componenti di un certo organismo.

Una caratterizzazione assiomatica del valore di Banzhaf normalizzato è dovuta a Owen [129]. In essa vengono mantenuti i primi due assiomi di Shapley, mentre il terzo viene sostituito da altri tre assiomi.

IL VALORE DI UN GIOCO SECONDO NASH

La soluzione cooperativa di Nash citata nel paragrafo 2.2 può essere generalizzata a giochi n-persone in forma caratteristica, con utilità trasferibile. Infatti, per la struttura delle imputazioni, la regione ammissibile di tali giochi è data da:

$$\begin{cases} x_1 + \ldots + x_n = v(N) \\ x_i \geq v(i) \qquad \text{per tutti gli } i \text{ da } 1 \text{ a } n. \end{cases}$$

Sostituendo tutte le disuguaglianze con uguaglianze, si ottiene il punto di max-min (o di minaccia) dove va traslata l'origine degli assi. L'intersezione fra la regione ammissibile e le iperboloidi equilatere è unica ed è posizionata in $(\phi_1, \ldots, \phi_n)$, ove

$$\phi_i = v(i) + \frac{v(N)}{n} .$$

Questo può essere considerato il *valore di Nash* per giochi n-persone. Notiamo che tale valore coincide con il baricentro del simplesso che costituisce la regione ammissibile, di cui si era parlato a proposito del valor Shapley.

Ovviamente, il valore di Nash è poco significativo per giochi a più di due persone, in quanto non tiene conto delle vincite delle coalizioni di s giocatori, con $1 < s < n$. Nel caso del nostro esempio è facile verificare che $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = 1$. Per questo motivo, Nash sta attualmente studiando una diversa generalizzazione del suo "valore".

UNIONI A PRIORI

Un importante problema nasce nell'applicazione dei valori a situazioni in cui esiste una propensione o un'avversione, da parte di certi giocatori, a creare alleanze con altri. È infatti ovvio che alcune coalizioni sono talora possibili in teoria, ma difficilmente attuabili in pratica. In generale, tutti i giocatori che possono contare un maggior indice di gradimento da parte degli altri, hanno in pratica un potere maggiore.

Un primo tentativo per risolvere questo problema è dovuto a Myerson [118], che utilizzò la teoria dei grafi. Risultati più significativi sono riportati in [128], ove vengono studiate le variazioni del valor Shapley connesse a diverse distribuzioni di probabilità di formazione delle coalizioni (per un'applicazione v. [32]). Quanto sopra è stato anche realizzato per il valore di Banzhaf (v. [130]).

Per ulteriori lavori su coalizioni non equiprobabili rimando a [23], [43], [82], [94], [112], [113], [124] e [179].

ALTRI VALORI

Oltre a quelli qui presentati, sono stati proposti altri valori (meno utilizzati). Essi si possono trovare in [2], [8], [45], [47], [85], [100], [104], [108], [125], [148] e [166]. Ulteriori valori per una particolare classe di giochi verranno presentati nel prossimo paragrafo.

Esercizi

ESERCIZIO N. 1: **Shapley, Banzhaf, Nash**

Calcolare i valori di Shapley, Banzhaf e Nash per i giochi dati negli esercizi del paragrafo 4.1.

ESERCIZIO N. 2: **Baricentri**

Verificare se e come i risultati di [57] sui baricentri possano essere estesi al valore di Banzhaf normalizzato.

ESERCIZIO N. 3: **Un nuovo valore**

Cercare una caratterizzazione assiomatica e/o un modello di contrattazione che possano giustificare il seguente valore (che ho inventato ora). Per una traccia, si può far riferimento al valor Shapley, la cui assiomatizzazione è anche riportata in [126].

Si ponga $v(i) = 0$ per tutti gli i da 1 a n (eventualmente, usando la traslazione $v'(S) = v(S) - \sum_{i \in S} v(i)$). Il valore ϕ_i per l'i-esimo giocatore è:

$$\phi_i = K[\, v(N) - v(N - \{i\})\,]$$

ove K è, come nel valore di Banzhaf normalizzato, un coefficiente di quadratura, che in questo caso vale:

$$K = \frac{v(N)}{\sum_{h=1}^{n} [\, v(N) - v(N - \{h\})\,]} \;.$$

Esercizio n. 4: **Un vostro valore**

Fate lo stesso lavoro dell'esercizio n. 3, ma con un valore inventato da voi.

Esercizio n. 5: **Unioni a priori**

Verificate se e come i risultati di Owen [128] e [130] sui giochi con unioni a priori, possano essere estesi ai giochi degli esercizi n. 3 e n. 4.

Conclusioni

Come si è visto, l'esistenza e l'unicità di una soluzione, che non erano garantite dal core e dagli stable sets, sono state assicurate dal valore. Con tale mezzo si ha dunque una ragionevole aspettativa della vincita che potrà avere ogni giocatore prima di entrare nel gioco. Non v'è un'unica funzione valore, in quanto i presupposti assiomatici e i modelli di contrattazione che la determinano possono essere diversi a seconda della situazione reale che si vuole descrivere. In particolare, alcuni valori adatti a rappresentare gli esiti di certe situazioni reali (ad es. i sistemi di voto) saranno presentati nel prossimo paragrafo.

4.3 Indici di potere

UN ESEMPIO

Supponiamo che un Parlamento sia composto da 10 seggi così divisi: 4 al partito A, 4 al partito B e 2 al partito C. Ogni decisione a maggioranza assoluta necessita di 6 voti, pertanto nessun partito può decidere da solo. D'altra parte, una coalizione fra due qualsiasi partiti è sufficiente a formare la maggioranza. Il partito C, con due soli seggi, è quindi nella stessa posizione degli altri due, rispetto alla formazione delle possibili coalizioni di maggioranza; il suo potere decisionale è cioè uguale a quello degli altri. La cosa si esprime dicendo che la ripartizione di potere $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ è la soluzione del *gioco di maggioranza* ("majority game") $(6; 4, 4, 2)$. Quale meccanismo di contrattazione può spiegare un simile risultato? In primo luogo dobbiamo notare l'estrema instabilità di questa distribuzione, in quanto basta una lieve propensione all'unione fra due partiti perché subentri una coalizione a due con un guadagno di $\frac{1}{2}$ a testa. D'altra parte, il partito escluso può reagire proponendo ad uno degli altri una coalizione con lui, con un pagamento più favorevole all'altro. Il terzo escluso può a sua volta intervenire e così via. In mancanza di una regola che determini a priori la coalizione finale, è allora ragionevole aspettarsi una ripartizione paritetica della vincita fra i tre partiti, per via della loro perfetta interscambiabilità.

Supponiamo ora che, per certe decisioni, sia necessaria una maggioranza di $\frac{2}{3}$. In tal caso il gioco diviene $(7;4,4,2)$ ed il terzo partito non è più decisivo al pari degli altri. Il suo contributo ad ogni possibile coalizione è addirittura nullo, in quanto le coalizioni di due partiti che comprendano C ((A,C) e (B,C)) sono di minoranza, mentre l'unica coalizione a tre di cui C fa parte (A,B,C) è vincente anche senza il contributo di C (in quanto la coalizione (A,B) è da sola di maggioranza). In questo caso è ragionevole prevedere la ripartizione di potere $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$. ($C$ è in questo caso un " dummy player ".)

Che possiamo dire, ora, del gioco $(6;5,3,2)$? Qui il primo giocatore è indispensabile per qualsiasi maggioranza, ma d'altra parte non può ottenere nulla da solo. Che divisione di potere possiamo assegnare ai tre partiti? Per cominciare, possiamo considerare B e C nella stessa posizione, essendo sia $5+3$ che $5+2$ maggiori di 6. È inoltre verosimile aspettarsi che A abbia un potere non inferiore agli altri due. Ma la divisione è $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ secondo Nash, ovvero $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$ secondo Deegan a Packel, ovvero $\left(\frac{3}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5}\right)$ secondo Banzhaf e Coleman, ovvero $\left(\frac{2}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)$ secondo Shapley e Shubik, ovvero $(1,0,0)$ secondo il valore introdotto nell'esercizio n. 3 del paragrafo precedente, o che altro?

GIOCHI SEMPLICI

Ogni gioco in forma caratteristica è detto *semplice* ("simple game") se la sua funzione caratteristica assume valori nell'insieme $\{0,1\}$, cioè se, per tutte le $S \subseteq N$, si ha $v(S) = 0$ oppure $v(S) = 1$. La coalizione si dice *perdente* nel primo caso, *vincente* nel secondo.

GIOCATORE CRUCIALE

In un gioco semplice si dice che il giocatore i è *cruciale* ("crucial") per la coalizione S se

$$v(S) = 1 \qquad \text{e} \qquad v(S - \{i\}) = 0$$

cioè se la coalizione S è vincente con lui e perdente senza di lui.

COALIZIONE MINIMALE VINCENTE

Ogni coalizione tale che tutti i suoi componenti sono per essa cruciali è detta *coalizione minimale vincente* ("minimal winning coalition").

L'insieme delle coalizioni minimali vincenti assume una particolare rilevanza nei giochi semplici, in quanto si può prevedere che ogni "dummy player" delle altre coalizioni verrà escluso dalla ripartizione della vincita.

GIOCHI DI MAGGIORANZA PONDERATA

I *giochi di maggioranza ponderata* sono una particolare classe di giochi semplici, così definita. Sia $(w_1, w_2, \ldots, w_n)$

un vettore reale a componenti non negative che chiameremo *pesi* ("weights"). Per ogni coalizione S chiamiamo

$$w(S) = \sum_{i \in S} w_i$$

il *peso della coalizione*. Fissiamo un numero reale q, che chiamiamo *quota di maggioranza* ("majority quota"), tale che

$$\frac{1}{2} w(N) < q \leq w(N) .$$

Chiamiamo *gioco di maggioranza ponderata* ("weighted majority game") $(q; w_1, \dots, w_n)$ il gioco la cui funzione caratteristica vale:

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \text{se } \ w(S) \geq q \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

I giochi di maggioranza ponderata sono particolarmente adatti a descrivere varie situazioni di voto: i pesi possono infatti essere seggi di partiti politici, azioni di investitori, millesimi condominiali e così via.

INDICI DI POTERE

Un *indice di potere* ("power index") è un valore per giochi semplici. Nel caso del valor Shapley, il relativo indice di potere è detto *indice di Shapley-Shubik*, dal lavoro [156]. Nel caso del valore di Banzhaf, il relativo indice di potere è detto *indice di Banzhaf-Coleman*, per via di successivi lavori di Coleman in merito (v. ad es. [34]). V'è inoltre l'*indice di Nash*, che ha poco interesse nei giochi semplici (a parte casi banali in cui un giocatore è vincente da solo, tale indice assegna infatti la quota $\frac{1}{n}$ ad ogni giocatore). Ulteriori indici sono stati introdotti solo come indici di potere per giochi semplici e quindi non rientrano nella categoria generale dei valori. Citiamo ad esempio [30], [31], [41], [42], [81], [89], [90], [92], [135], [136] e l'indice di Zipke riportato in [123]. In questa sede ci limiteremo a presentare l' *indice di Deegan-Packel* [42], per un motivo di completamento che vedremo in seguito in tabella 18.

Notiamo che la funzione esprimente l'indice di Shapley-Shubik non è altro che quella del valor Shapley, ove la somma è limitata al solo insieme delle coalizioni minimali vincenti e l'espressione $v(S) - v(S - \{i\})$ è sostituita dal numero 1. Analogamente per l'indice di Banzhaf-Coleman.

Introduciamo dunque l'indice di potere di Deegan-Packel.

Tale indice, che si basa sui primi due presupposti assiomatici del valor Shapley e su altri meno immediati, esprime la speranza matematica di vincita per ogni giocatore se:

- si scartano tutte le coalizioni che non sono minimali vincenti,
- si considerano equiprobabili tutte le coalizioni minimali vincenti,
- si suppone che i giocatori di ogni coalizione dividano fra loro pariteticamente il pagamento.

In formule:

$$\phi_i = \frac{1}{K} \sum \frac{1}{s}$$

dove la somma è estesa a tutte le coalizioni minimali vincenti di cui l'i-esimo giocatore fa parte, s è il numero dei membri della coalizione considerata e K è, come nel valore di Banzhaf, un coefficiente di quadratura, che in questo caso esprime il numero totale delle coalizioni minimali vincenti del gioco.

Consideriamo, ad esempio, il gioco di maggioranza ponderata $(6; 5, 3, 2)$ introdotto dianzi. L'insieme delle coalizioni minimali vincenti è $\{(A, B), (A, C)\}$ e quindi $K = 2$. Il giocatore A fa parte di entrambe le coalizioni minimali di due membri, mentre i giocatori B e C fanno parte, ciascuno, di una sola di tali coalizioni. Si ha quindi:

$$\phi_A = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\,, \qquad \phi_B = \phi_C = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\,.$$