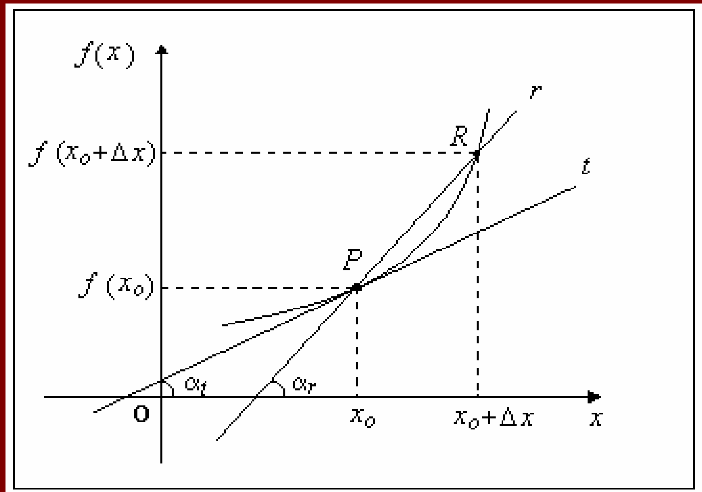
LE DERIVATE

- La pendenza di un tratto di strada:

- è misurata dal coefficiente angolare della retta se il tratto è rettilineo.

LE DERIVATE

- La pendenza di un tratto *P,R* non rettilineo descritto da $y = f(x)$



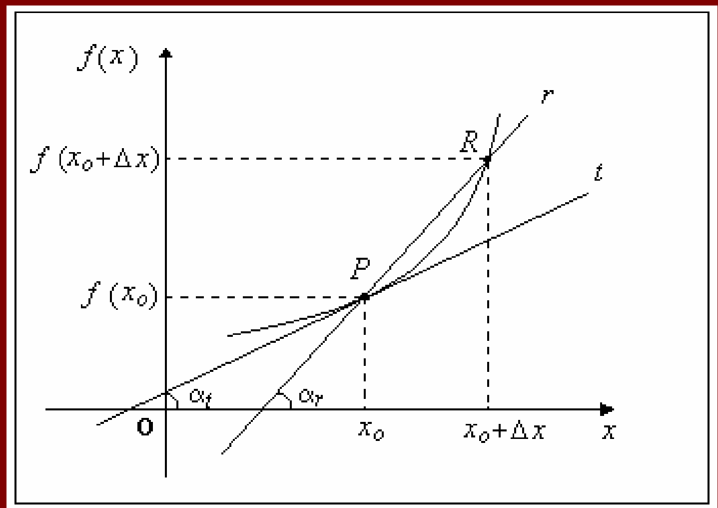
- è data dal coefficiente angolare della retta *r* passante per *P* e *R* espresso da

$$m_r = \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x} = \tan \alpha_r$$

LE DERIVATE

- La pendenza in un punto *P* di un tratto rettilineo o non rettilineo rappresentato da $y = f(x)$

$y = f(x)$



- è dato dal coefficiente angolare della retta tangente *t* (se esiste) in *P* alla curva:

$$m_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x} = \tan \alpha_t$$

LE DERIVATE

- ***Osservazioni***

1. Per far avvicinare il punto *R* al punto *P* sulla curva, occorre che la funzione $y = f(x)$ sia continua!
2. Poiché il punto *R* può avere ascissa maggiore o minore dell'ascissa di *P*, per definire la pendenza in *P* occorre che ci si possa avvicinare sia da destra che da sinistra a *P* ottenendo lo stesso risultato:

$$\lim_{\Delta x \downarrow 0} \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \uparrow 0} \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x}$$

LE DERIVATE

L'equazione della retta tangente in *P* è data da:

$$y - f(x_o) = f^{'}(x_o) * (x - x_o)$$

La pendenza in *P* alla curva viene indicata con: $f^{'}(x_o)$ utilizzando la simbologia di *Lagrange, e viene chiamata derivata prima della funzione in* x_o *.*

Esistono altri modi per indicare la derivata prima, ad esempio la notazione di Leibniz:

$$\frac{df}{dx}$$

LE DERIVATE

- Esempio 1
- Si consideri la curva senza punti “angolosi” descritta dalla funzione continua $y = f(x) = x^2$
- ed un generico punto $P\left(x, x^2\right)$ sulla curva. Si consideri un secondo punto sulla curva di
- coordinate $R\left(x+\Delta x, (x+\Delta x)^2\right)$. La pendenza in *P* alla curva è:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x = f'(x)$$

LE DERIVATE

- Analogamente per la funzione

$$y = f(x) = x^3$$

- si ottiene:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2\right) = 3x^2 = f'(x)$$

LE DERIVATE

- Generalizzando (usando la formula di Newton per lo sviluppo della potenza n-esima del binomio) si ottiene:
- $$\left(x^n\right)' = n\left(x^{n-1}\right)$$
- Per le altre funzioni elementari si ottiene:

$$\left(sinx\right)' = \cos x$$

$$\left(\cos x\right)' = -sinx$$

$$\left(a^x\right)' = a^x \ln a$$

LE DERIVATE

- La derivata prima e le operazioni algebriche.
- Date due funzioni derivabili nello stesso insieme si ha:

1. $$(f \pm g)'(x) = [f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$$
2. $$(f * g)'(x) = [f(x) \cdot g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$
3. $$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f(x)'g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

LE DERIVATE

- Esempio 2
- Per la funzione $y = \tan x = \dfrac{sinx}{\cos x}$ si ottiene:

$$(\tan x)' = \left(\frac{sinx}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x * \cos x - sinx * (-sinx)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{sin^2 x}{\cos^2 x} =$$

$$= 1/\cos^2 x = 1 + \tan^2 x$$

LE DERIVATE

- <u>La derivata delle funzioni composte ***(chain rule).***</u>
- Si consideri : $y = F(x) = f(g(x))$ ottenuta componendo le due funzioni

$$t = g(x) \qquad y = f(t)$$

- Usando "algebricamente" la notazione di Leibniz si ottiene:

$$\frac{dF}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{df}{dt} * \frac{dt}{dx} = f^{'}(t) * g^{'}(x) = f^{'}(g(x)) * g^{'}(x)$$

- La derivata di una funzione composta è data dal prodotto delle derivate delle funzioni componenti.

LE DERIVATE

- <u>La derivata delle funzioni inverse.</u>
- Sia $y = f(x)$ una funzione derivabile e dotata di funzione inversa $x = f^{-1}(y) = g(y)$
- Anche l'inversa è derivabile e risulta:

$$g'(y) = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{f'(x)}$$

LE DERIVATE

- Esempio 3.
- Si consideri la funzione $y = e^x$. Essa è invertibile e derivabile.
- La derivata della funzione inversa $x = \ln y$ è:
- $$(\ln y)' = \frac{1}{(e^x)'} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}$$

LE DERIVATE

- Le funzioni marginali
- L’aggettivo “marginale” accanto ad una funzione sta ad indicare la derivata prima della funzione.
- Ad esempio i “costi marginali” sono espressi dalla derivata della funzione dei costi.
- NOTA: IL VALORE DEL COSTO MARGINALE IN CORRISPONDENZA AD UN LIVELLO DI PRODUZIONE INDICA UN’APPROSSIMAZIONE DELLA VARIAZIONE DEI COSTI QUANDO SI AUMENTA LA PRODUZIONE DI UNA UNITA’ .

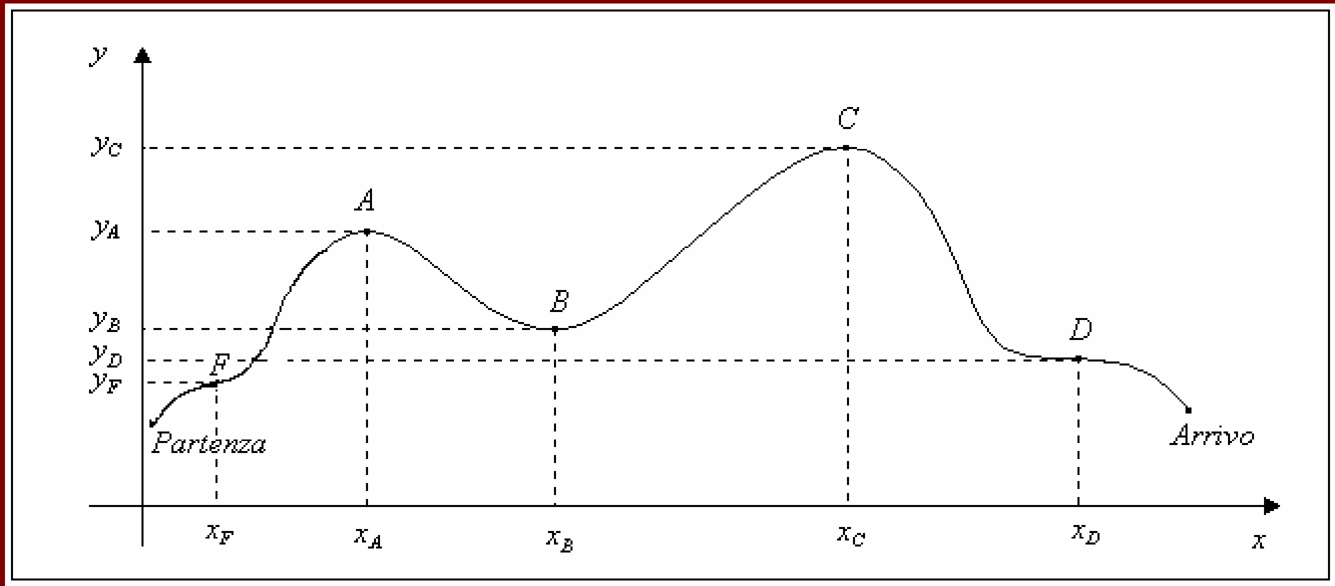
LE DERIVATE

- <u>Il segno della derivata prima.</u>
- Se la derivata prima di una funzione è positiva (negativa) allora la funzione è crescente (decrescente).
- *Si rammenti che la derivata prima indica il cefficiente angolare della retta tangente e si usi la prima proprietà del coefficiente angolare.*

LE DERIVATE

- Massimi e minimi relativi.
- Data una funzione $y = f(x)$ si dice che in x_o
- presenta un ***massimo relativo*** se $f(x_o) > f(x)$
- $\forall x \neq x_o \in D_f$ vicino a x_o.
- La funzione $y = f(x)$ presenta un ***minimo***
- ***relativo*** in x_o se $f(x_o) < f(x)$ $\forall x \neq x_o \in D_f$ vicino a x_o.

LE DERIVATE



- Nei punti *A* e *C* la funzione presenta due valori di massimo relativo mentre in *B* si ha un minimo relativo.

LE DERIVATE

- Come determinare i punti di max e min relativi.
- In corrispondenza ad un punto di max rel. si ha:

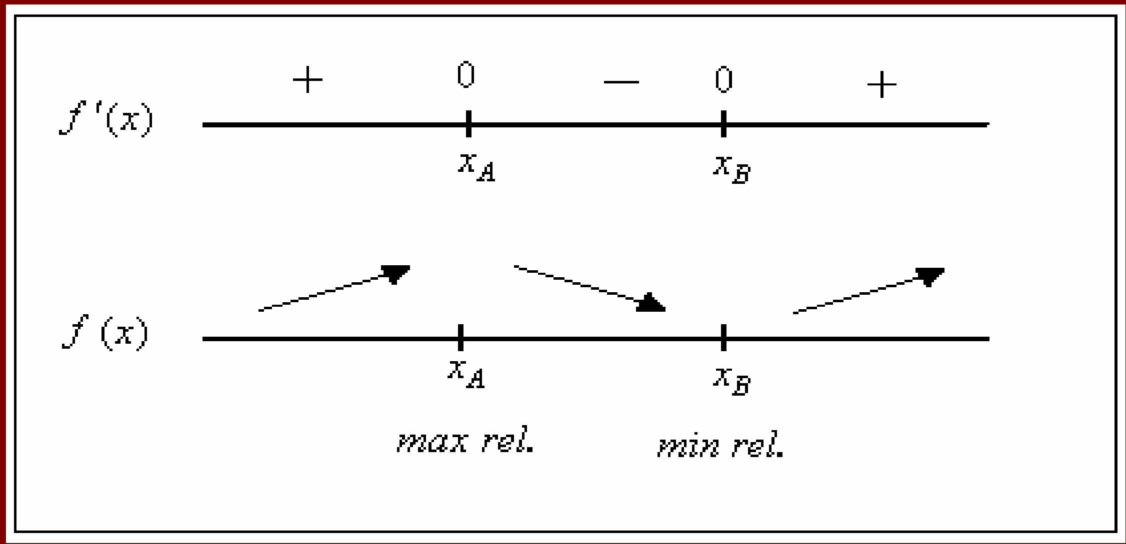
$x < x_A$	$x > x_A$
$f(x)$ crescente	$f(x)$ decrescente
$f^{'}(x) > 0$	$f^{'}(x) < 0$

- In corrispondenza ad un punto di min rel. si ha:

$x < x_B$	$x > x_B$
$f(x)$ decrescente	$f(x)$ crescente
$f^{'}(x) < 0$	$f^{'}(x) > 0$

LE DERIVATE

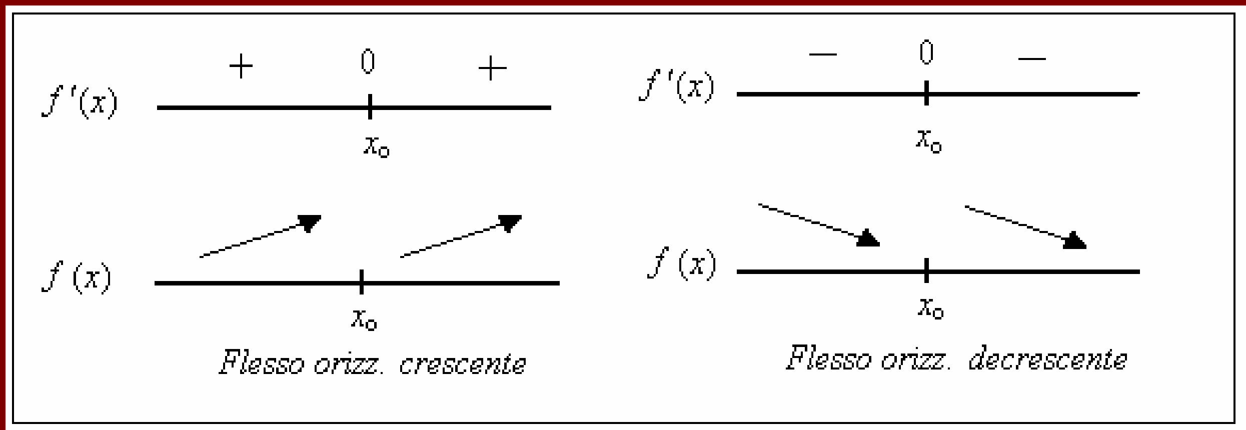
- Se la funzione è derivabile nei punti x_A e x_B si ha:



- Riassumendo: in corrispondenza ad un valore x_o in cui la funzione (derivabile) presenta un max o un min relativo, la derivata prima è nulla e il segno cambia passando da valori più piccoli a valori maggiori di x_o .

LE DERIVATE

- Se la derivata prima in x_o è nulla ma non cambia segno passando da valori più piccoli a valori più grandi di x_o allora in corrispondenza a quel valore la funzione presenta un punto di flesso orizzontale.



LE DERIVATE

- Procedura

1. Calcolo della derivata prima $y = f'(x)$ della funzione $y = f(x)$
2. risoluzione dell'equazione $f'(x) = 0$. Se tale equazione non ammette soluzioni, non esistono punti critici e il procedimento si conclude. Se esistono soluzioni si prosegue,
3. determinazione del segno della derivata prima nell'insieme *X*,
4. confronto del segno di $f'(x)$ vicino ad ogni valore estremale con le situazioni indicate nelle figure 7.15, 7.16, 7.17.
5. classificazione dei punti critici in punti di massimo e minimo relativo, flessi orizzontali.

LE DERIVATE

- Esempio 4
- Si consideri il caso seguente:
- funzione di domanda $p = 10 - 0.1q$
- funzione di costo $C_T(q) = 10 + q^3 - 6q^2 + 12q$
- funzione dei ricavi $R_T(q) = pq = -0.1q^2 + 10q$
- funzione dei guadagni

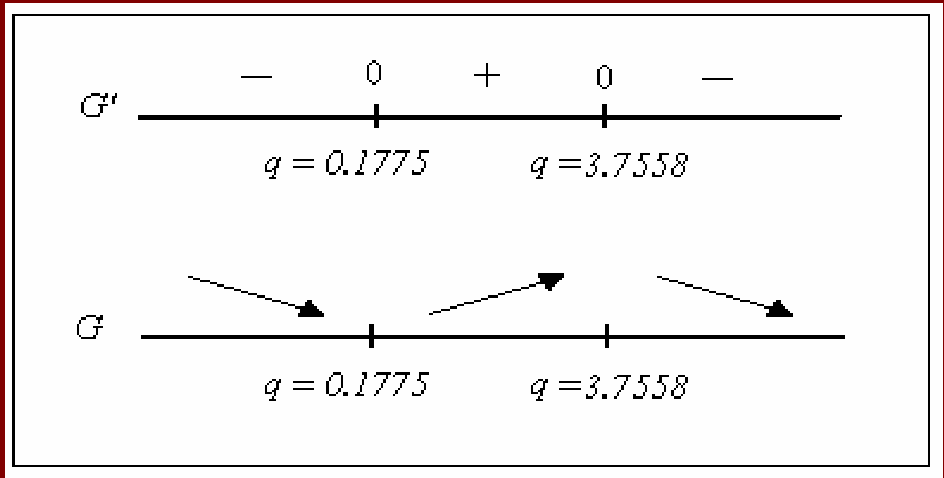
$$G_T(q) = R_T(q) - C_T(q) = -10 - q^3 + 5.9q^2 - 2q$$

LE DERIVATE

- Il procedimento per il calcolo del valore di *q* che massimizza i guadagni conduce a:

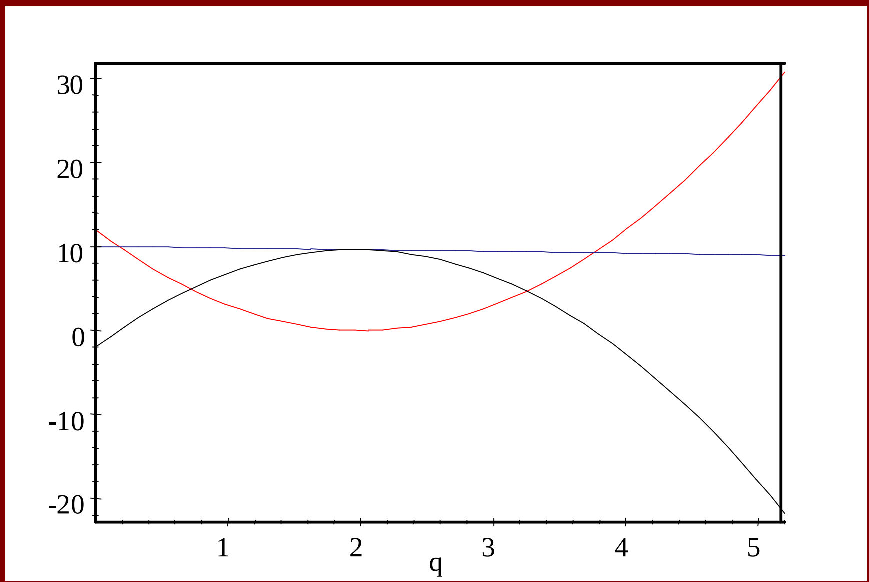
$$G'_T(q) = -3q^2 + 11.8q - 2$$

- I guadagni marginali si annullano in corrispondenza ai valori: *q*=0,1775 e *q*=3.7558
- Per il teorema sul segno di un trinomio di secondo grado si ha:



LE DERIVATE

- In corrispondenza al primo valore i profitti sono minimi, in corrispondenza a *q*=3.7558 i profitti sono massimi.
- Si osservi che in corrispondenza ad entrambi i valori i ricavi marginali sono uguali ai costi marginali.

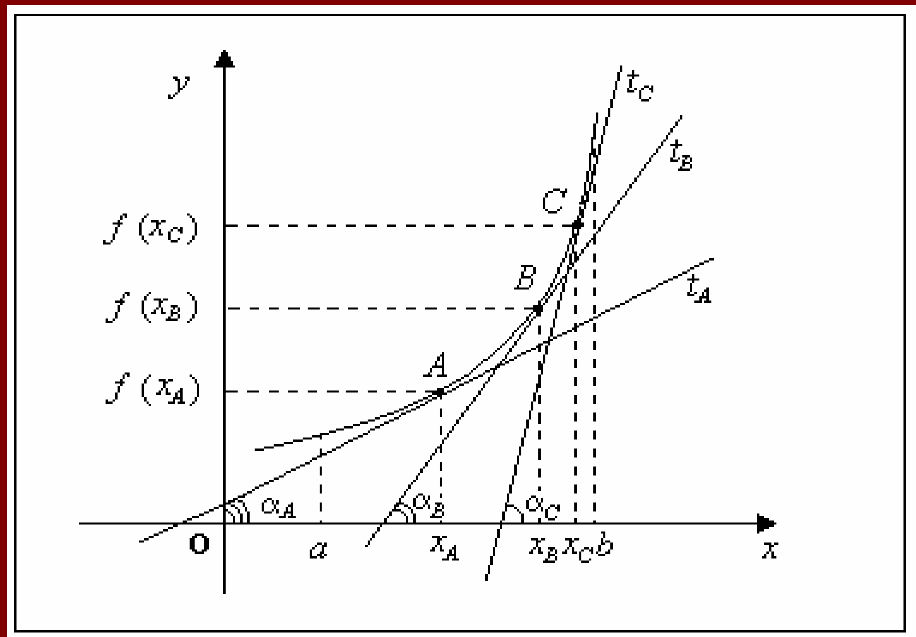


LE DERIVATE

- Derivando la derivata prima si ottiene la derivata seconda che può essere indicata con il simbolo: $y = f''(x)$
- Il segno della derivata seconda da indicazioni sulla concavità e convessità di una funzione e consente di individuare una procedura alternativa per il calcolo dei massimi e dei minimi relativi.

LE DERIVATE

- Dal grafico della curva ***<u>concava</u>*** si può verificare che al crescere di *x* il coefficiente angolare della retta tangente alla curva cresce; ovvero la derivata prima (=coeff. ang.) cresce al crescere di *x*.



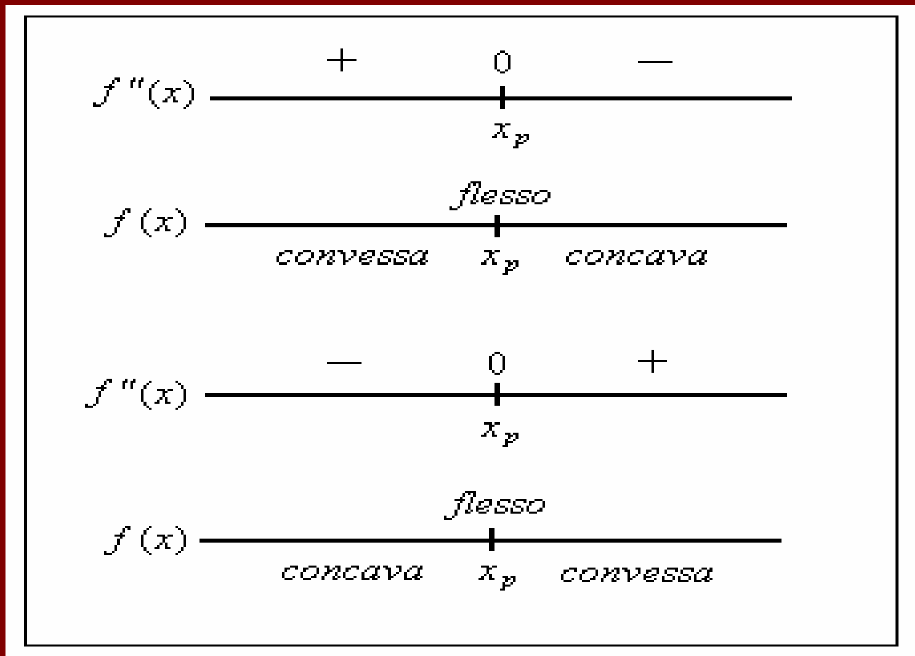
LE DERIVATE

- Se una funzione cresce la sua derivata è positiva. Ma la derivata della derivata prima è la derivata seconda. Quindi se una funzione è concava la sua derivata seconda è positiva.

- Attenzione a non legare il risultato alla crescenza della funzione. Se la funzione è decrescente e concava la derivata seconda è comunque positiva.

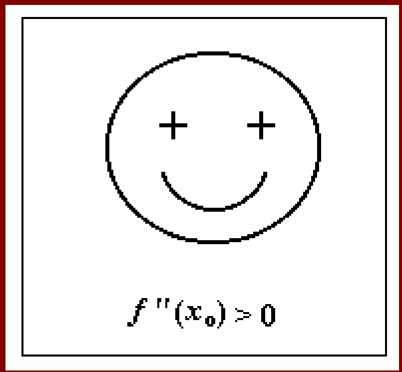
LE DERIVATE

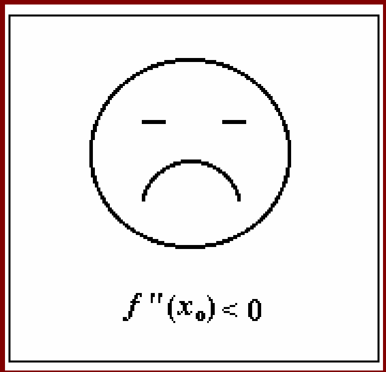
- Analogamente se la derivata seconda è negativa la funzione è ***convessa***.
- Si definisce ***flesso*** un punto in corrispondenza al quale la funzione cambia la sua concavità:



LE DERIVATE

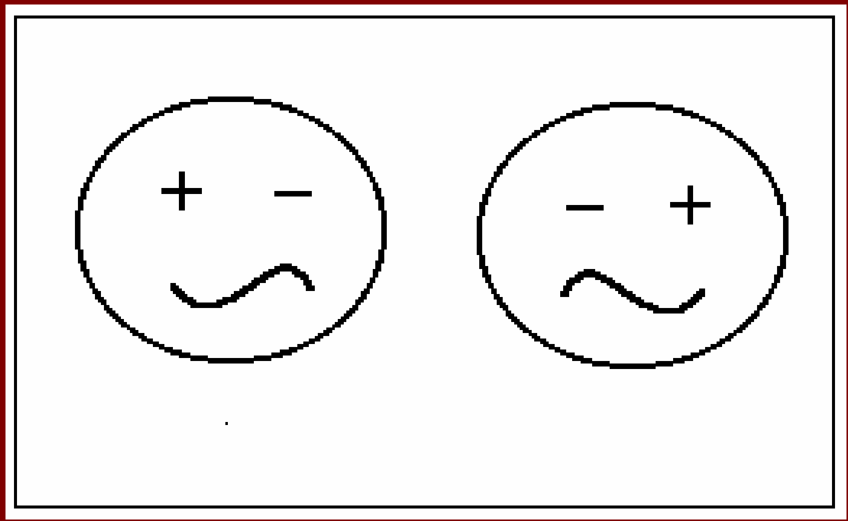
- Si osservi che in un punto di minimo relativo per una funzione “liscia” la funzione è concava, in un punto di max relativo la funzione è convessa, come riportato nelle “figure buffe” seguenti





LE DERIVATE

- Analogamente in un punto di flesso **orizzontale** si ha



LE DERIVATE

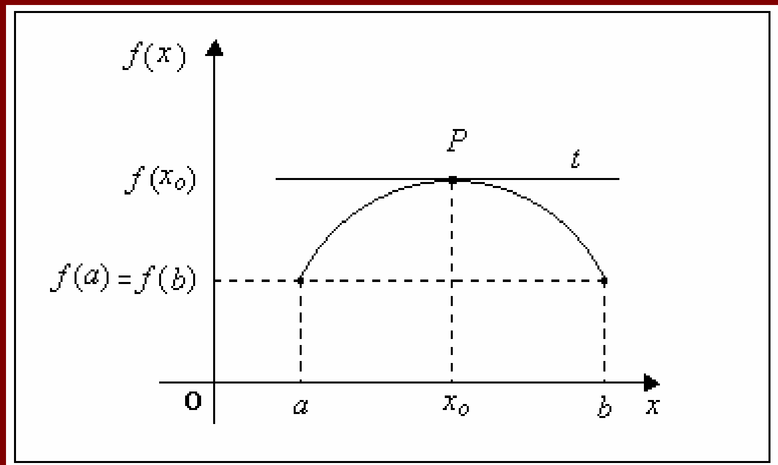
- **Teorema di Rolle**
- Si consideri una funzione $y = f(x)$

1. continua nell'intervallo chiuso $[a,b]$;
2. derivabile in $]a,b[$;
3. la funzione assume valori uguali negli estremi dell'intervallo $f(a) = f(b)$.

- Allora esiste **almeno** un punto interno all'intervallo nel quale la derivata prima della funzione si annulla: $f'(x_o) = 0$

LE DERIVATE

- Se la funzione è costante allora in ogni punto dell’intervallo la derivata prima è uguale a 0 e il teorema è dimostrato.
- Se la funzione non è costante almeno il minimo o il massimo della funzione viene raggiunto in un punto interno all’intervallo.



LE DERIVATE

- In quel punto la funzione è derivabile per ipotesi e in più nulla (per la condizione necessaria per i valori estremanti!).

- Si noti che ipotizzare il minimo raggiunto in un estemo dell’intervallo e il massimo nell’altro ci riporterebbe al caso della funzione costante per l’ipotesi 3 del teorema.

LE DERIVATE

- **<u>Teorema di Lagrange (</u>o del valor medio)**
- Si consideri una funzione $y = f(x)$

1. continua nell'intervallo chiuso $[a,b]$;
2. derivabile in $]a,b[$;

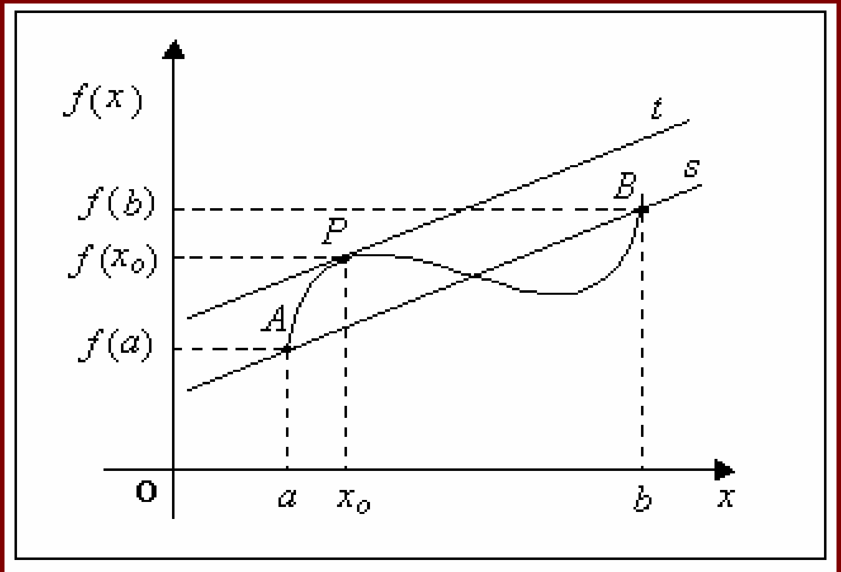
Allora esiste **<u>almeno</u>** un punto interno all'intervallo nel quale risulta:

$$f'(x_o) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

- Si osservi che Rolle è un caso particolare di Lagrange.

LE DERIVATE

- Graficamente si può descrivere il teorema dicendo che esiste un punto sulla curva che rappresenta geometricamente la funzione nel quale la retta tangente è parallela alla retta passante per gli estremi.



LE DERIVATE

- **<u>Teorema di Cauchy</u> (o degli incrementi finiti)**
- Si considerino due funzioni $y = f(x)$ e $y = g(x)$.
  Esse soddisfano le condizioni seguenti:
- Sono continue nell'intervallo $[a,b]$
- Sono derivabili nell'intervallo $]a,b[$

  $g'(x) \neq 0$ $\quad \forall x \in \;]a,b[$
- Allora esiste un punto interno all'intervallo in cui

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_o)}{g'(x_o)}$$

LE DERIVATE

- LE FORME INDETERMINATE.
- Nascono dal calcolo del limite di una combinazione algebrica di funzioni

$$\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty},+\infty-\infty,0\cdot\infty,0^{0},\infty^{0},1^{\infty}$$

- Tutte le forme indeterminate possono essere ricondotte alle prime 2.

LE DERIVATE

- TEOREMA DI DE L'HOSPITAL .
- Siano $f, g : A \rightarrow R$ due funzioni derivabili in *A*; sia x_o un punto di accumulazione per *A e* sia:

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = f(x_o) = 0 \text{ e } \lim_{x \to x_o} g(x) = g(x_o) = 0$$

- Il calcolo del rapporto dei limiti genera la f.i. $\frac{0}{0}$. Sia inoltre:

1. $g'(x_o) \neq 0$
2. $\exists \lim_{x \to x_o} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$

- Allora $\lim_{x \to x_o} \frac{f(x)}{g(x)} = l$