1 Limiti e continuità per funzioni di una variabile

Considerazioni introduttive

Consideriamo la funzione

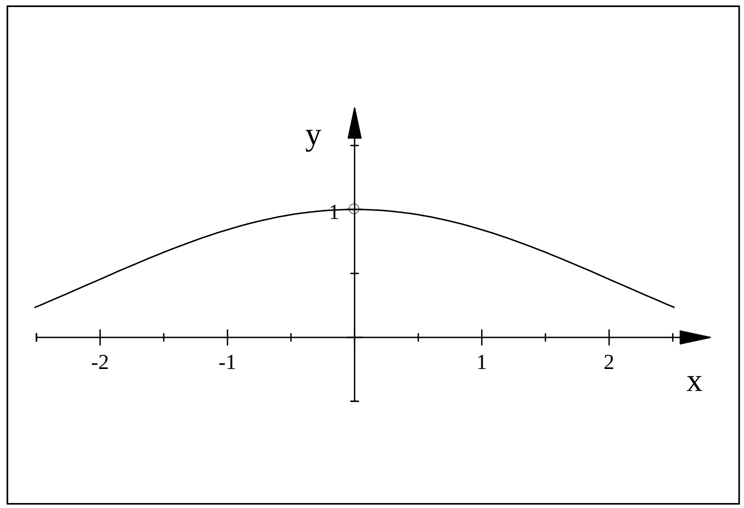
$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

il cui dominio naturale è $\Re \setminus \{0\}$.

Problema: non è possibile calcolare il valore di f per $x = 0$, perchè 0 non appartiene al dominio. E' possibile valutare il comportamento di f se la x, a partire da un valore "prossimo a" 0, si avvicina "quanto più possibile" a 0? Calcoliamo i valori di x in radianti, $\sin(x)$ e $\frac{\sin(x)}{x}$,a partire da $x = 1$ fino ad avvicinarci a $x = 0$.

x	$\sin x$	$\sin x/x$
$1,000000000000000$	$0,841470984807896$	$0,841470984807896$
$0,500000000000000$	$0,479425538604203$	$0,958851077208406$
$0,400000000000000$	$0,389418342308650$	$0,973545855771626$
$0,300000000000000$	$0,295520206661340$	$0,985067355537799$
$0,200000000000000$	$0,198669330795061$	$0,993346653975306$
$0,100000000000000$	$0,099833416646828$	$0,998334166468282$
$0,050000000000000$	$0,049979169270678$	$0,999583385413567$
$0,040000000000000$	$0,039989334186634$	$0,999733354665854$
$0,030000000000000$	$0,029995500202496$	$0,999850006749855$
$0,020000000000000$	$0,019998666693333$	$0,999933334666654$
$0,010000000000000$	$0,009999833334167$	$0,999983333416667$
$0,005000000000000$	$0,004999979166693$	$0,999995833338542$
$0,004000000000000$	$0,003999989333342$	$0,999997333335467$
$0,003000000000000$	$0,002999995500002$	$0,999998500000675$
$0,002000000000000$	$0,001999998666667$	$0,999999333333466$
$0,001000000000000$	$0,000999999833333$	$0,999999833333342$
$0,000500000000000$	$0,000499999979167$	$0,999999958333334$
$0,000100000000000$	$0,000099999999833$	$0,999999998333333$
$0,000050000000000$	$0,000049999999979$	$0,999999999583333$
$0,000010000000000$	$0,000010000000000$	$0,999999999983333$
$0,000005000000000$	$0,000005000000000$	$0,999999999995833$
$0,000001000000000$	$0,000001000000000$	$0,999999999999833$

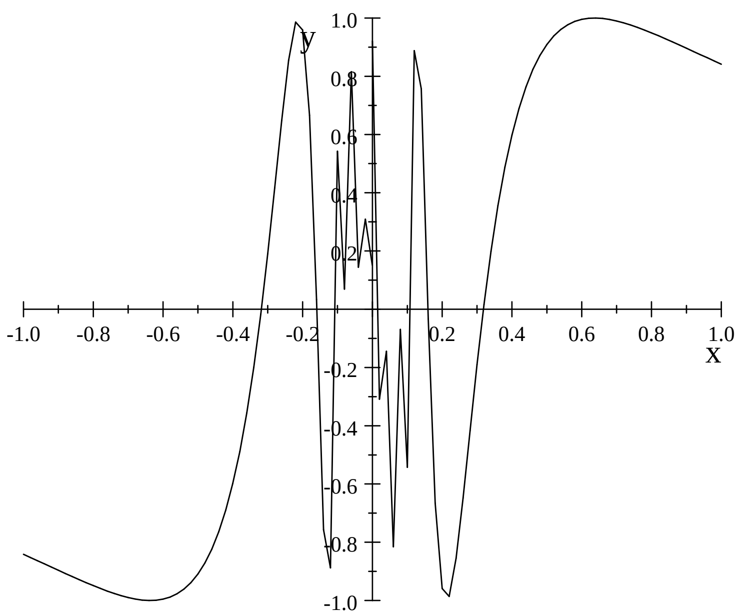
Il rapporto $\dfrac{\sin x}{x}$ si avvicina sempre più a 1, come si può riscontrare nel grafico della funzione



Possiamo riassumere questo comportamento dicendo che, per x che "tende" a 0, $\dfrac{\sin x}{x}$ "tende" a 1 cioè

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Se invece consideriamo altre funzioni, non sempre è possibile decidere il loro comportamento in prossimità di un dato punto usando un foglio di calcolo o un grafico. Esempio: $f(x) = \sin \frac{1}{x}$



x	$1/x$	$\sin 1/x$
$1,000000000000000$	$1,000000000000000$	$0,841470984807897$
$0,500000000000000$	$2,000000000000000$	$0,909297426825682$
$0,400000000000000$	$2,500000000000000$	$0,598472144103957$
$0,300000000000000$	$3,333333333333330$	$-0,190567962875485$
$0,200000000000000$	$5,000000000000000$	$-0,958924274663138$
$0,100000000000000$	$10,000000000000000$	$-0,544021110889370$
$0,050000000000000$	$20,000000000000000$	$0,912945250727628$
$0,040000000000000$	$25,000000000000000$	$-0,132351750097773$
$0,030000000000000$	$33,333333333333300$	$0,940529576628763$
$0,020000000000000$	$50,000000000000000$	$-0,262374853703929$
$0,010000000000000$	$100,000000000000000$	$-0,506365641109759$
$0,005000000000000$	$200,000000000000000$	$-0,873297297213995$
$0,004000000000000$	$250,000000000000000$	$-0,970528019541805$
$0,003000000000000$	$333,333333333333000$	$0,318846344358746$
$0,002000000000000$	$500,000000000000000$	$-0,467771805322476$
$0,001000000000000$	$1000,000000000000000$	$0,826879540532003$
$0,000500000000000$	$2000,000000000000000$	$0,930039504416137$
$0,000100000000000$	$10000,000000000000000$	$-0,305614388888252$
$0,000050000000000$	$20000,000000000000000$	$0,581984761994295$
$0,000010000000000$	$100000,000000000000000$	$0,035748797986561$
$0,000005000000000$	$200000,000000000000000$	$-0,071451895241553$
$0,000001000000000$	$1000000,000000000000000$	$-0,349993502171308$

LIMITI DI FUNZIONI

Estendiamo la definizione di limite dalle successioni alle funzioni. Una successione dipende da una variabile $n \in \mathbb{N}$, quindi l'operazione di limite serve a descrivere il suo comportamento asintotico, ovvero per $n \to +\infty$. Mentre per una funzione f definita per esempio su un intervallo (a, b) è possibile descrivere il suo andamento sia agli estremi dell'intervallo sia in qualsiasi punto tra a e b.

Intorno di un punto. Si chiama **intorno completo** di un numero reale o di un punto c un qualsiasi intervallo aperto che contenga c. In particolare gli intervalli aperti di *centro* c si chiamano **intorni circolari** di c. Se indichiamo con ε il raggio di tale intorno, lo indicheremo con

$$(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$$

e risulta essere l'insieme degli $x \in \mathbb{R}$ tali che

$$|x - c| < \varepsilon, \qquad \varepsilon > 0$$

Sia $f(x)$ una funzione definita in un intervallo $[a, b]$, escluso al massimo un punto c interno ad esso.

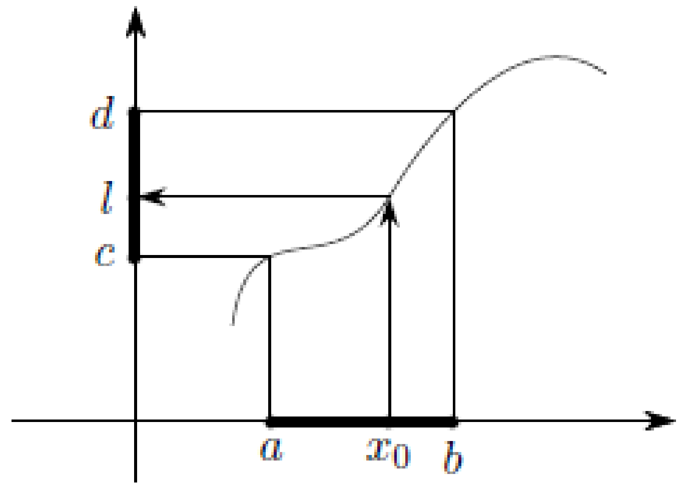
Limite finito di una funzione in un punto

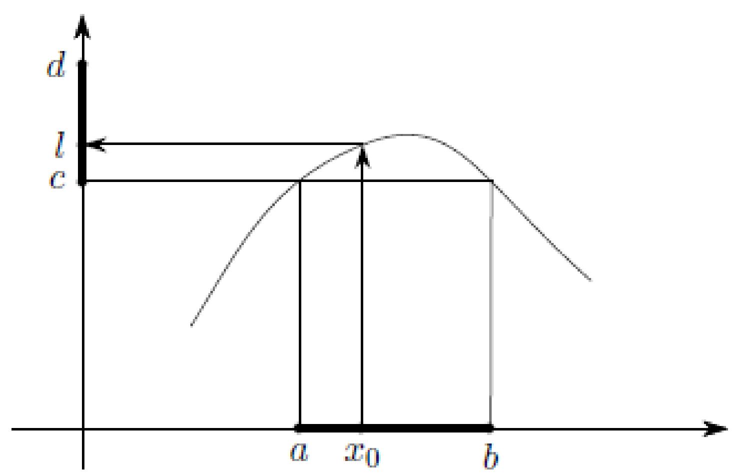
Definizione 1 *La funzione $f(x)$ per $x \to c$ ha per limite il numero l*

$$\lim_{x \to c} f(x) = l$$

quando in corrispondenza di un arbitrario numero positivo ε, si può sempre deteminare un intorno completo H del punto c, tale che, $\forall x \in [a, b]$ che cade in H, escluso eventualmente c, risulti soddisfatta la disequazione

$$|f(x) - l| < \varepsilon \ \text{ ovvero } \ l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$


d
l
c
a
x_0
b


d
l
c
a
x_0
b

Esempio 1. Verificare che risulta $\lim_{x \to 2} (2x - 1) = 3$. La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$.

Preso un $\varepsilon > 0$ arbitrario e piccolo, verifichiamo che la disequazione

$$|2x - 1 - 3| < \varepsilon$$

è verificata per tutti i valori di x che formano un intorno completo del punto 2.

$$|2x - 4| < \varepsilon \rightarrow 4 - \varepsilon < 2x < 4 + \epsilon$$

$$2 - \varepsilon/2 < x < 2 + \varepsilon/2 \text{ intorno del punto } 2$$

Osservazione. $f(2) = 3$ e perciò in questo caso risulta che $\lim_{x \to 2} (2x - 1) = f(2)$: **il limite coincide con il valore della funzione nel punto** $x = 2$.

Esempio 2. Verificare che risulta $\lim_{x \to 2} \dfrac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$. La funzione è definita per $x > 0$ con $x \neq 2$

Preso un $\varepsilon > 0$ arbitrario e piccolo, verifichiamo che la disequazione

$$\left| \frac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}} - 2\sqrt{2} \right| < \varepsilon$$

è verificata per tutti i valori di x che formano un intorno completo del punto 2, escluso $x = 2$ dove la funzione non è definita.

Ma poichè $x \neq 2$

$$\frac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}} = \frac{(x-2)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)} = \sqrt{x}+\sqrt{2}$$

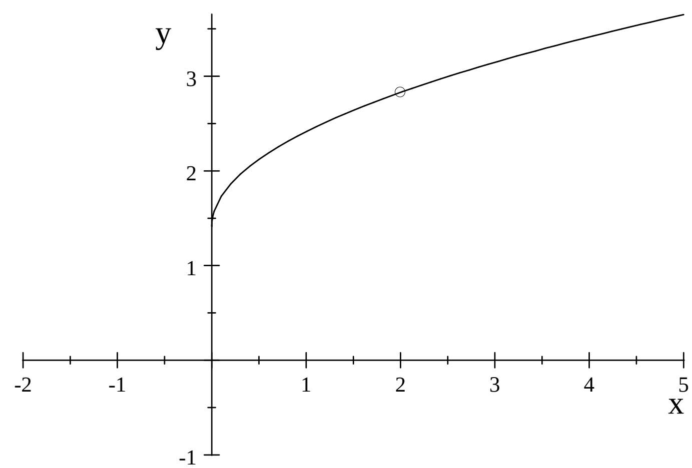
e possiamo scrivere che

$$\left|\sqrt{x}+\sqrt{2}-2\sqrt{2}\right|<\varepsilon \text{ cioè } \sqrt{2}-\varepsilon<\sqrt{x}<\sqrt{2}+\epsilon$$

Quindi risolvendo il sistema e supponendo che $\varepsilon<\sqrt{2}$ si trova che

$$\left(\sqrt{2}-\varepsilon\right)^2<x<\left(\sqrt{2}+\epsilon\right)^2 \text{ intorno di 2.}$$

Osservazione. **Non esiste il valore della funzione per $x = 2$ ma esiste il suo limite.**



Esempio 3. Data la funzione, definita su $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{per } x \neq 1 \\ 0 & \text{per } x = 1 \end{cases}$$

verificare che

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

Quindi dobbiamo verificare prefissato un $\varepsilon > 0$ che

$$|f(x) - 2| < \varepsilon$$

sia soddisfatta in tutti i punti di un intorno del punto 1 escluso al più 1 stesso.

Per $x \neq 1$ si ha $f(x) = 2$ quindi verifichiamo che

$$|2 - 2| < \varepsilon \text{ ossia } \varepsilon > 0$$

ed è soddisfatta in qualsiasi intorno del punto 1.

Osservazione. In questo caso abbiamo

$$f(1) = 0 \text{ mentre } \lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

quindi **il limite della funzione nel punto** 1 **è diverso dal valore della funzione calcolato nello stesso punto.**

Limite infinito di una funzione in un punto

Definizione 2 *Si dice che la funzione $f(x)$ per $x \to c$ ha per limite infinito*

$$\lim_{x \to c} f(x) = \infty$$

quando in corrispondenza di un numero positivo M fissato a piacere, è possibile determinare un intorno H completo del punto c, tale che, $\forall x \in [a, b] \cap H$ con $x \neq c$ risulti soddisfatta la disequazione

$$|f(x)| > M$$

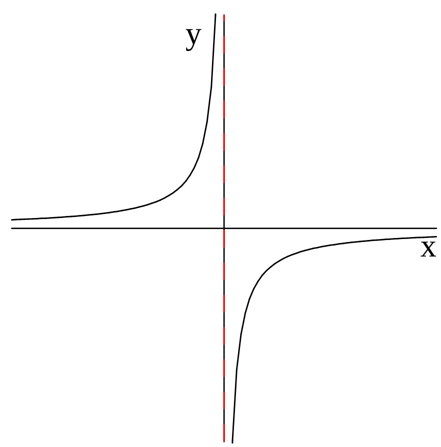
Esempio. Verificare che $\lim_{x \to 0} \left(-\frac{1}{x} \right) = \infty$. Dominio $x \neq 0$

Verifichiamo che $\left|-\frac{1}{x}\right| > M$, qualunque sia il numero $M > 0$ per tutti gli x che formano un intorno di 0.

$$\left|-\frac{1}{x}\right| > M \rightarrow |x| < \frac{1}{M} \rightarrow -\frac{1}{M} < x < \frac{1}{M}$$

In questo caso avremo che

$$\left(-\frac{1}{x}\right) > 0, \text{ per } x < 0; \qquad \left(-\frac{1}{x}\right) < 0, \text{ per } x > 0$$



Limite destro e limite sinistro

Definizione 3 *Si dice che* l *è il limite destro della funzione* $f(x)$ *per* $x \to c$ *e si scrive*

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = l$$

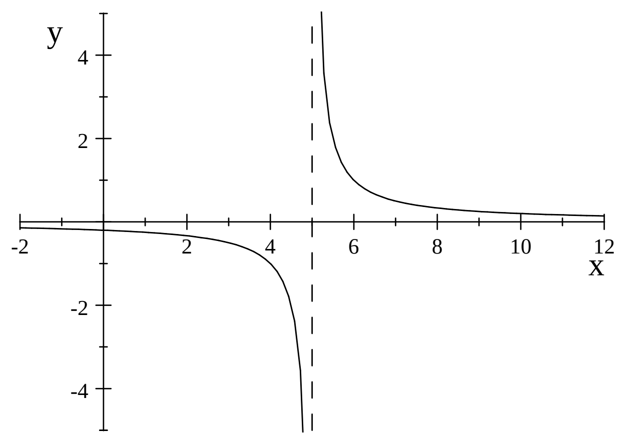
quando in corrispondenza di un arbitrario numero positivo ε*, si può sempre determinare un intorno* **destro** H *di* c*, tale che,* $\forall x \in [a, b] \cap H$ *escluso eventualmente* c *risulti soddisfatta la disequazione*

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

Osservazione 4 *Se l' intorno H è un intorno* **sinistro** *del punto* c*, allora si dice che* l *è il limite sinistro di* $f(x)$*per* $x \to c^-$*. Analoghe definizioni si possono dare per limiti infiniti di una funzione in un punto.*

Osservazione 5 *Se il limite destro e il limite sinistro di $f(x)$ per $x \to c$ esistono e sono uguali e pari a l allora l è il limite di $f(x)$ per $x \to c$.*

- *Asintoti verticali.* Quando $f(x) \to \pm\infty$ per x che tende a c da destra e/o da sinistra, si dice che la retta di equazione $x = c$ è **asintoto verticale** per il grafico di f. *Esempio.* $f(x) = 1/(x - 5)$



Limite finito (o infinito) di una funzione all'infinito

Definizione 6 *Sia f una funzione definita in $\mathbb{R}$. Si dice che la funzione $f(x)$ per $x \to \infty$ ha per limite il numero l*

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = l$$

quando in corrispondenza di un arbitrario numero positivo ε, si può sempre deteminare un numero $N > 0$ tale che per ogni x che verifica $|x| > N$ si abbia

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

Se questa è soddisfatta soltanto:

- *per $x > N$, allora:* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$

- *per* $x < -N$*, allora:* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l.$

Definizione 7 *Si dice che per* $x \to \infty$ *la funzione* $f(x)$ *ha per limite infinito,*

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

quando in corrispondenza di un arbritrario $M > 0$ *è sempre possibile determinare un numero* $N > 0$ *tale che per ogni* x *che verifica* $|x| > N$ *si abbia*

$$|f(x)| > M$$

In particolare se $x > N$, risulta:

- per $f(x) > M$, allora: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

- per $f(x) < -M$, allora: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

Mentre se $x < -N$, risulta:

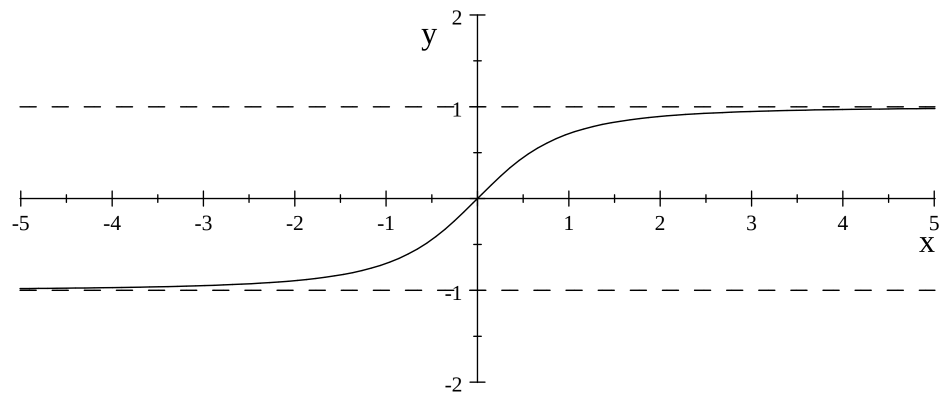
- per $f(x) > M$, allora: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

- per $f(x) < -M$, allora: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

- *Asintoti orizzontali.* Quando $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = l$ la retta di equazione $y = l$ ha un ruolo importante è prende il nome di *asintoto orizzontale.*

Esempio 1. Sia data la funzione

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$



Il dominio di $f(x)$ sarà $\mathbb{R}$. In questo caso non esistono asintoti verticali.

Dato che

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{|x| \left(\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right)} = 1$$

la retta $y = 1$ è asintoto orizzontale. Inoltre

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{|x| \left(\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right)} = -1$$

la retta $y = -1$ è asintoto orizzontale.

- *Asintoti obliqui.* Possono aversi solo nel caso di funzioni definite in intervalli illimitati. Se si ha

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty(-\infty)$$

potrebbe esistere asintoto obliquo. In questo caso il grafico della funzione si accosta a quello di una retta di equazione

$$y = mx + q \quad \text{con } m \neq 0$$

Affinchè questa retta sia un asintoto obliquo della funzione occorre che esistano e siano finiti entrambi i seguenti limiti:

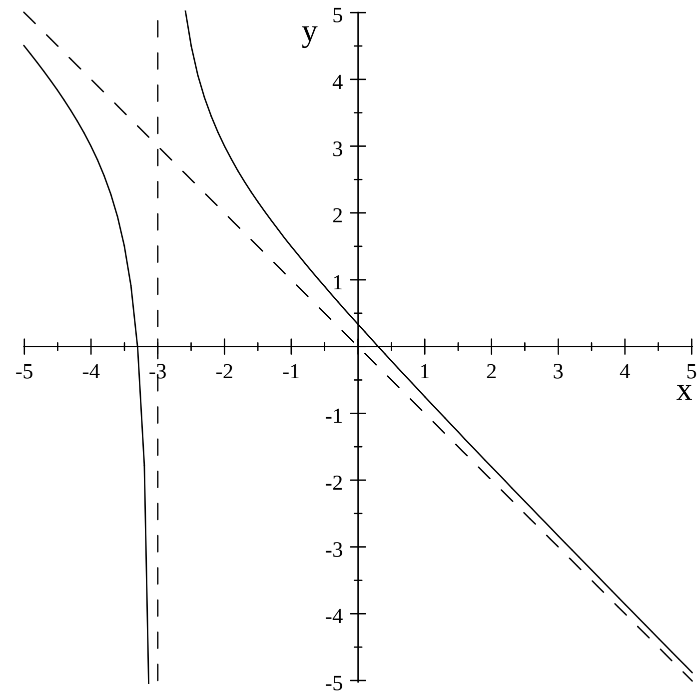
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0 \;\text{ e }\; \lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx) = q$$

In maniera analoga si procede se

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty(-\infty)$$

Esempio 2. Sia data la funzione

$$f(x) = \frac{1 - 3x - x^2}{x + 3}$$



Il dominio della funzione sarà $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$. Essendo

$$\lim_{x \to -3^{\pm}} \frac{1 - 3x - x^2}{x + 3} = \pm\infty$$

la retta $x = -3$ è asintoto verticale. Inoltre

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1 - 3x - x^2}{x + 3} = \mp\infty$$

non ci sono asintoti orizzontali ma possono esserci asintoti obliqui. Avremo

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1 - 3x - x^2}{x^2 + 3x} = -1$$

$$\begin{aligned} q &= \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{1 - 3x - x^2}{x + 3} + x \right) = \\ &= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x + 3} = 0 \end{aligned}$$

Pertanto la funzione ha come asintoto obliquo la sola retta $y = -x$ per $x \to \pm\infty$.

Definizione 8 *Una funzione* f *che ha limite pari a* 0 *per* $x \to c$ *(finito o infinito) si chiama* **infinitesimo** *per* $x \to c$ *(finito o infinito).Una funzione* f *che ha limite pari a* $\pm\infty$ *per* $x \to c$ *(finito o infinito) si chiama* **infinito** *per* $x \to c$ *(finito o infinito).*

Teorema 9 (unicità del limite) *Se esiste il limite di una funzione per* $x \to c$ *(finito o infinito), esso è unico.*

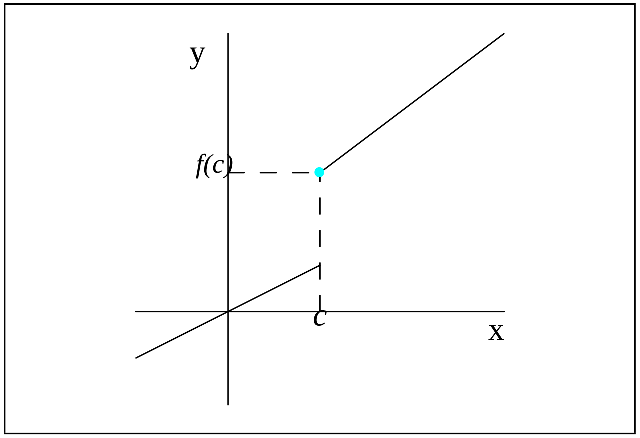
Teorema 10 *Siano* $a < c < b$ *e* f *monotona nell'intervallo* (a, b)*. Allora i limiti*

$$\lim_{x \to c^+} f(x) \text{ e } \lim_{x \to c^-} f(x)$$

esistono e sono entrambi finiti. Esistono anche (finiti o infiniti)

$$\lim_{x \to a^+} f(x) \text{ e } \lim_{x \to b^-} f(x)$$

Esempio



Il limite destro, $x \rightarrow c^+$, coincide con $f(c)$, il valore che la funzione assume nel punto c, che coincide con il *minimo* di f nell'intervallo $[c, b)$ dove $b = +\infty$. il limite sinistro di c invece è strettamente minore di $f(c)$. Risulta quindi che

$$\lim_{x \to c^-} f(x) \leq f(c) \leq \lim_{x \to c^+} f(x)$$

Teorema 11 *(***Permanenza del segno***)* *Se per $x \to c$ la funzione ha un limite finito l non nullo, esiste un intorno del punto c per ogni x del quale, escluso al più c, la funzione $f(x)$ assume valori dello stesso segno del suo limite. Il terorema vale anche se $l = \pm\infty$.*

Teorema 12 *(***Confronto***)* *Siano f, g, e h tre funzioni che, in un opportuno intorno di c, soddisfano le disuguaglianze*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x).$$

1. *Se* $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} h(x) = l$, allora anche $\lim\limits_{x\to c} g(x) = l$

2. *Il teorema vale anche se* $l = +\infty$ oppure $l = -\infty$.

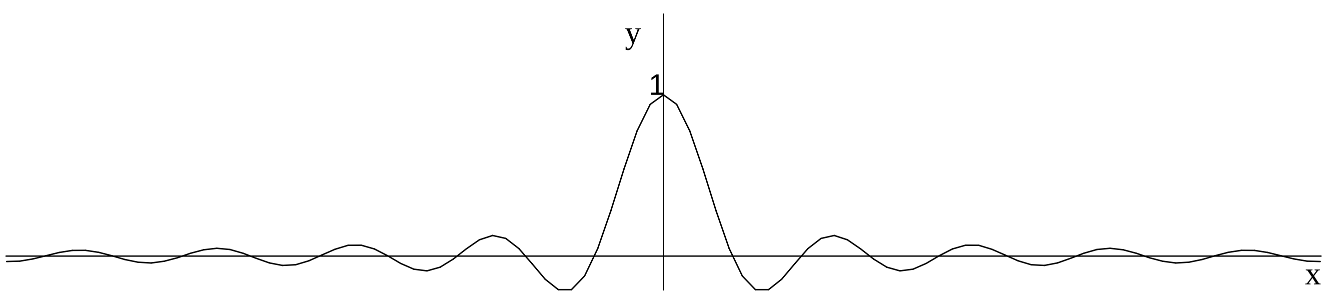
Esempio. 1° limite notevole. Provare che

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=0}$$

Infatti sappiamo che $-1 \le \sin x \le 1$ e per $x > 0$

$$-\frac{1}{x} \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{1}{x}$$

Ma $\lim_{x\to+\infty}(-1/x) = 0$ e $\lim_{x\to+\infty}(1/x) = 0$, quindi per il confronto anche $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x} = 0$.



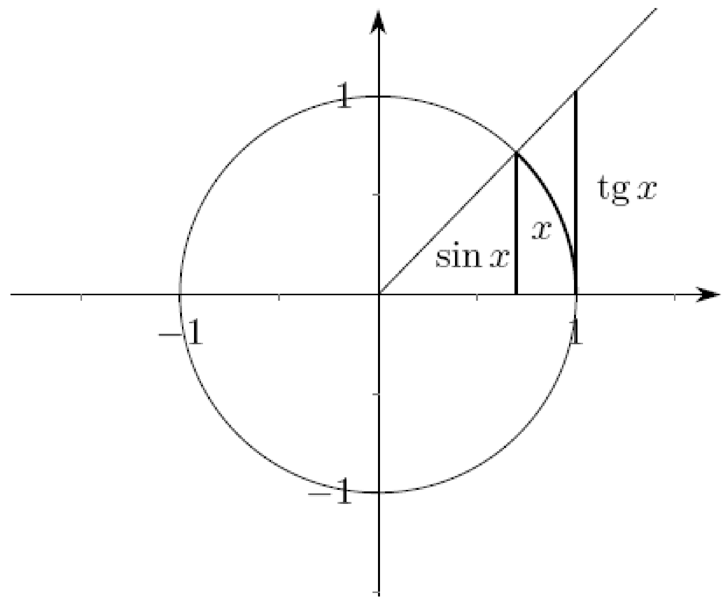
Esempio. 2° limite notevole. Provare che

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

Osserviamo preventivamente che la funzione $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ ha come dominio naturale $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ed è una funzione *pari* (simmetrica rispetto all'asse y). Quindi basterà calcolare il limite di $f(x)$ per $x \to 0^+$.

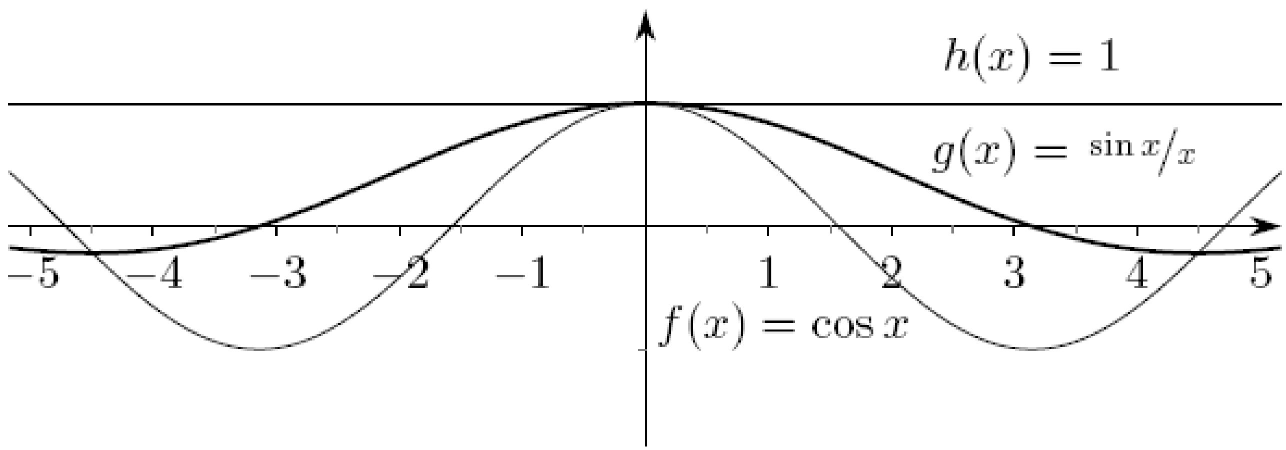
Per le note proprietà trigonometriche si ha , per $0 < x < \pi/2$

$$\sin x < x < \tan x$$



Ora dividiamo per $\sin x$ (sempre positivo e non nullo per $0 < x < \pi/2$) la disuguaglianza $\sin x < x < \tan x$ e otteniamo

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$



Passando ai reciproci abbiamo

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

Per il teorema del confronto, essendo $\lim_{x \to 0^+} \cos x = 1$, uguale per la funzione costante pari a 1, avremo che $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Limiti e operazioni algebriche (insieme $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$)

Definiamo per i simboli $\pm\infty$ le operazioni di somma e prodotto e $a \in \mathbb{R}$

$+\infty + (+\infty) = +\infty$	$-\infty + (-\infty) = -\infty$	$A + (\pm\infty) = \pm\infty$
$(\pm\infty) \cdot (\pm\infty) = +\infty$	$(\mp\infty) \cdot (\pm\infty) = -\infty$	$A \neq 0,\ A \cdot \infty = \infty$
$\frac{A}{\infty} = 0$	$\frac{\infty}{A} = \infty$	$A \neq 0, \frac{A}{0} = \infty$

Esistono forme come già introdotto nelle successioni che sono *indeterminate:*

$$\infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}$$

e altre forme di indeterminazione di tipo *esponenziale* che possono presentarsi quando si deve calcolare un limite della forma $\boxed{\lim_{x\to c} [f(x)]^{g(x)}}$ e sono

$$0^0, \ \infty^0, \ 1^\infty.$$

Date due funzioni f, g definite sullo stesso intervallo, possiamo costruire le funzioni *somma, prodotto* e *quoziente*

$$f + g \quad f \cdot g \quad f/g \text{ (con } g \neq 0\text{)}$$

Se $L, M \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ possiamo affermare che se

$$\lim_{x \to c} f(x) = L, \quad \lim_{x \to c} g(x) = M$$

allora

$$\boxed{\lim_{x \to c} f(x) + g(x) = L + M, \ \lim_{x \to c} f(x)g(x) = LM, \ \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}}$$

tranne se se verificano le forme indeterminate già introdotte.

Confronti: richiamo simboli "o" e " $\sim$ "

Supponiamo che f, g siano *infinitesimi* (oppure *infiniti*) per $x \to c$ con $g \neq 0$.Consideriamo il limite di f/g. avremo 4 possibilità:

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} 0 & (a) \\ L \text{ finito e non nullo} & (b) \\ \pm\infty & (c) \\ \text{non esiste} & (d) \end{cases}$$

$(a) \implies f$ è *infinitesimo di ordine superiore a* g (oppure f è *infinito di ordine inferiore a* g) e si scrive

$$f(x) = o(g(x)) \quad \text{per } x \to c$$

$(b) \implies f$ è *dello stesso ordine di* g per $x \to c$. In particolare, se $L = 1$, le due funzioni si dicono *asintotiche* per $x \to c$ e si scrive

$$f(x) \sim g(x) \quad \text{per } x \to c$$

$(c) \implies f$ è *infinitesimo di ordine inferiore a* g (oppure f è *infinito di ordine superiore a* g) e si scrive

$$g(x) = o(f(x)) \quad \text{per } x \to c$$

$(d) \implies f$ e g *non sono confrontabili.*

La relazione " $\sim$ " esprime un'*equivalenza* di comportamento di fronte all'operazione di limite e possiede le tre proprietà:

- riflessiva: $f(x) \sim f(x)$ per $x \to c$;

- simmetrica: $f(x) \sim g(x)$ per $x \to c$ se e solo se $g(x) \sim f(x)$ per $x \to c$; quindi le due funzioni sono asintotiche;

- transitiva: se $f(x) \sim g(x)$ per $x \to c$ e $g(x) \sim h(x)$ per $x \to c$ allora $f(x) \sim h(x)$ per $x \to c$.

Il simbolo "o" gode invece della proprietà transitiva:

- se $f(x) = o(g(x))$ per $x \to c$ e $g(x) = o(h(x))$ per $x \to c$, allora $f(x) = o(h(x))$ per $x \to c$.

Il simbolo asintotico è particolarmente utile nel calcolo dei limiti. Infatti è possibile sostituire nel calcolo del limite di un prodotto o di un quoziente, ogni funzione con una ad essa asintotica (più semplice) in modo da facilitare il calcolo. Se $f_1(x) \sim f_2(x) \quad$ per $x \to c$ e $g_1(x) \sim g_2(x) \quad$ per $x \to c$ è immediato che

$$\lim_{x \to c} f_1(x) g_1(x) = \lim_{x \to c} f_2(x) g_2(x) \;\text{ e }\; \lim_{x \to c} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f_2(x)}{g_2(x)}$$

Esempio: Il rapporto tra due polinomi nella variabile n, per $n \to +\infty$, è asintotico al rapporto dei termini di grado massimo

$$\frac{-n^3 + n^2 - 3n + 4}{2n^4 + 2n^3 - 4} \sim \frac{-n^3}{2n^4} = -\frac{1}{2n} \to 0$$

Gerarchie di infiniti.

Se $\alpha < \beta$ avremo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{x^\beta} = \lim_{x\to+\infty} x^{\alpha-\beta} = 0, \qquad \lim_{x\to0^+} \frac{x^\alpha}{x^\beta} = \lim_{x\to0^+} x^{\alpha-\beta} = +\infty$$

e quindi per $\alpha < \beta$ si ha

$$x^\alpha = o\left(x^\beta\right) \quad \text{per } x \to +\infty, \quad x^\beta = o\left(x^\alpha\right) \quad \text{per } x \to 0^+$$

Quindi tra le *potenze* di x, per $x \to +\infty$, sono *trascurabili* quelle con esponente *minore,* mentre per $x \to 0$ quelle con esponente *maggiore.*

Anche le *esponenziali* con base diversa si posso "ordinare". Per esempio

$$2^x = o\left(3^x\right) \quad \text{per } x \to +\infty, \quad \text{infatti } \frac{2^x}{3^3} = \left(\frac{2}{3}\right)^x \to 0$$

.

Osservazione. Si possono confrontare tra loro le tre famiglie di funzioni: esponenziali, potenze e logaritmi.

Teorema 13 *Ogni infinito esponenziale è d'ordine superiore a ogni infinito potenza; ogni infinito potenza è di ordine superiore ad ogni infinito logaritmico. Ossia per ogni* $\alpha > 1, \beta > 0, \gamma > 0$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\alpha^x}{x^\beta} = +\infty \quad \textit{e} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\beta}{(\ln x)^\gamma} = +\infty}$$

Esempi. Si vogliano calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(3^x - x^4\right), \quad \lim_{x\to+\infty} \left(x^2 - \ln x\right)$$

1. $\lim_{x \to +\infty} \left(3^x - x^4\right) = 3^x \left(1 - \dfrac{x^4}{3^x}\right) \to (+\infty)\,(1-0) = +\infty.$

2. $\lim_{x \to +\infty} \left(x^2 - \ln x\right) = x^2 \left(1 - \dfrac{\ln x}{x^2}\right) \to (+\infty)\,(1-0) = +\infty$

Calcolo di alcuni limiti usando i limiti notevoli visti in precedenza.

1. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1 \;\; \to \lim_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x} = \lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} \dfrac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1$

2. $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2} \to \lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} \dfrac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos^2 x}{x^2 (1 + \cos x)} =$
$\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin^2 x}{x^2} \dfrac{1}{(1 + \cos x)} = \dfrac{1}{2}$

3. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = 0 \to \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}\frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)} =$
$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\frac{\sin x}{(1+\cos x)} = 1\cdot\frac{0}{2} = 0$

4. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1$

5. $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = 1$ Il calcolo di questo limite fornisce l'occasione per mostrare la tecnica del cambiamento di variabile, di frequentissima applicazione. Supponiamo di voler calcolare

$$\lim_{x\to c} f\left[g(x)\right]$$

sapendo che $\lim_{x\to 0} g(x) = k$. Poniamo $y = g(x)$ e calcoliamo $\lim_{y\to k} f(y)$. E' possibile fare il cambio di variabile se $\lim_{y\to k} f(y) = f(k)$, ovvero se f è **continua** in k e vale anche nel caso in cui k sia $\pm\infty$. Poniamo

$$\arcsin x = t \text{ e quindi } x = \sin t$$

se $x \to 0$ allora $t \to 0$ e quindi avremo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\sin x} = 1$$

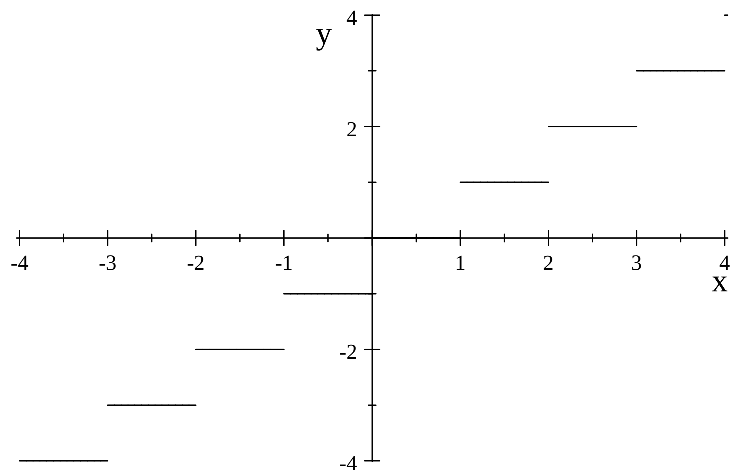
6. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ Poniamo $e^x - 1 = t \to x = \ln(t+1)$ e se $x \to 0$ allora anche $t \to 0$. Quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\ln(t+1)} = 1$$

FUNZIONI CONTINUE

Osserviamo il grafico della funzione parte intera

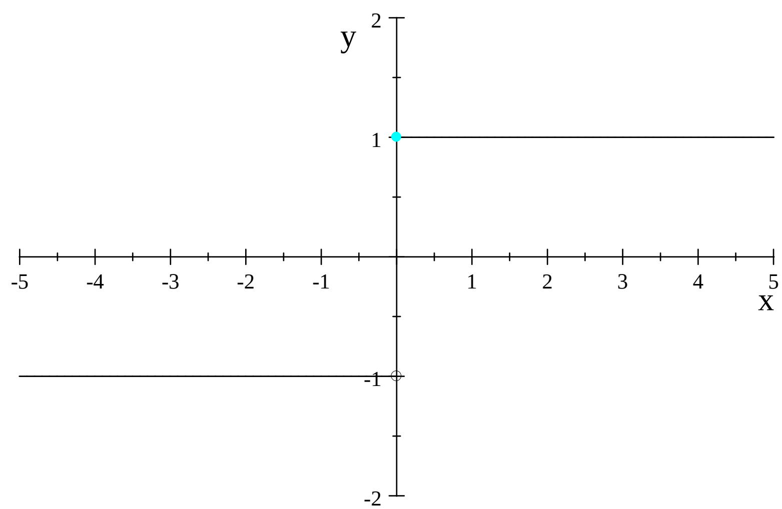
$$f(x) = \lfloor x \rfloor$$



Il grafico procede a salti. La funzione è *discontinua* nei punti di ascissa intera.

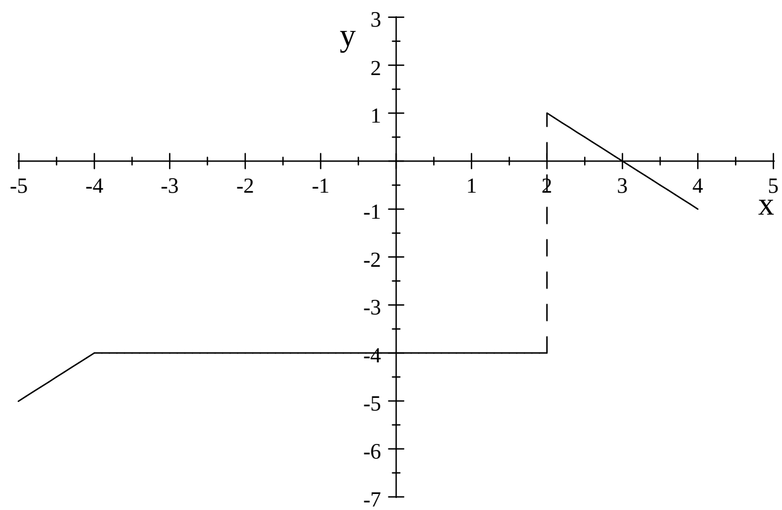
Altrettanto per le funzioni

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad x \geq 0 \\ -1 & \text{if} \quad x < 0 \end{cases}$$



discontinua in $x = 0$ e

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{if } x \leq -4 \\ -4 & \text{if } -4 < x < 2 \\ 3 - x & \text{if } 2 \leq x < 4 \end{cases}$$



continua in tutto l'asse reale escluso il punto $x = 2$.

Una funzione f è **continua** in un punto x_0, se, variando *di poco* x_0, cioè considerando il punto $x_0 + \Delta x$ molto vicino a x_0, il corrispondente valore della $f(x)$ cioè $f(x_0 + \Delta x)$ differisce *poco* da $f(x_0)$

$$x = x_0 + \Delta x$$

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

La differenza $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ prende il nome di **incremento della funzione** nel passaggio della variabile indipendente dal valore x_0 al valore $x_0 + \Delta x$.

Definizione 14 *Siano f definita in un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$. Si dice che f è* **continua** *in x_0 se*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Si dice che f è *continua in un insieme* I se f è continua in tutti i punti di I.

Dalle operazioni sui limiti e dalla definizione di continuità in un punto si possono trarre le seguenti considerazioni:

a) se f e g sono due funzioni entrambe continue in x_0 allora anche la loro somma $f + g$ e il loro prodotto $f \cdot g$ sono funzioni continue in x_0;

b) se f e g sono due funzioni entrambe continue in x_0 e $g(x_0) \neq 0$ allora anche la funzione quoziente f/g è continua in x_0;

c) se f e g sono due funzioni entrambe continue in x_0 e $f(x_0) > 0$, anche la funzione potenza f^g è continua in x_0.

Per le *funzioni composte* vale il seguente teorema.

Teorema 15 *Se f è continua in $x_0 \in I$ e g è continua in $y_0 = f(x_0)$, allora $g \circ f$, $(g[f(x)])$, è continua in x_0.*

Osservazione. Le funzioni elementari *potenza, esponenziali, logaritmiche, seno e coseno* sono **continue** in *ogni punto del loro dominio.* Infatti $\forall x_0 \in D$ si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} x^\alpha &= x_0^\alpha, \quad \lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}, \quad \lim \log_a x = \log_a x_0, \\ \lim_{x \to x_0} \sin x &= \sin x_0, \quad \lim_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0 \end{aligned}$$

Punti di discontinuità

Richiedere che una funzione sia continua in un punto x_0 equivale a richiedere che i due limiti

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \text{ e } \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

- *esistono* e sono *finiti*,

- sono *uguali*,

- il loro valore comune è proprio $f(x_0)$.

Se *almeno* una delle tre condizioni non è soddisfatta si dice che f è *discontinua* in x_0 oppure che x_0 è un *punto di discontinuità.*

1. **Discontinuità di prima specie.** Se

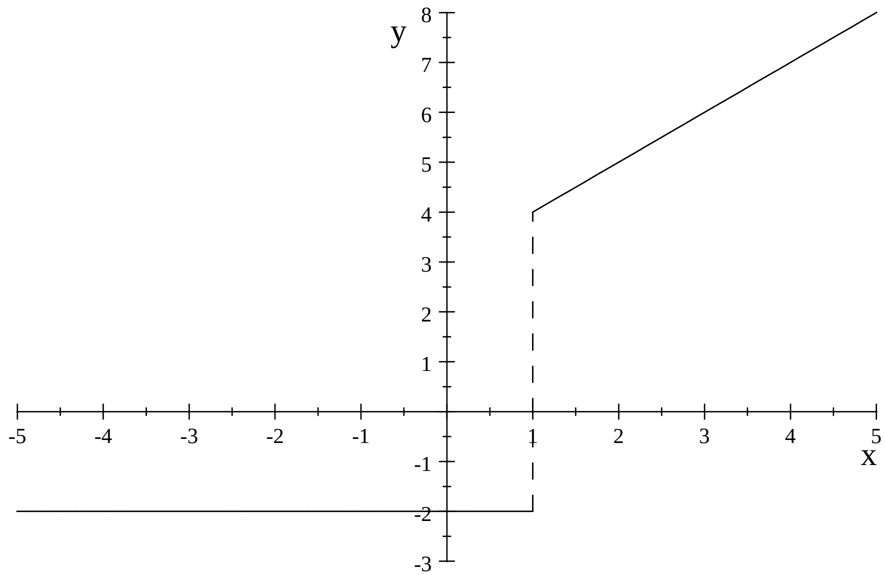
$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l_1 \text{ e } \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l_2 \quad (l_1 \neq l_2)$$

   si dice che la funzione f ha in x_0 una discontinuità di prima specie. La differenza

$$l_2 - l_1$$

   si chiama *salto* della funzione in corrispondenza di x_0. Ad esempio la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{if} \quad x \geq 1 \\ -2 & \text{if} \quad x < 1 \end{cases}$$



ha nel punto $x_0 = 1$ una discontinuità di prima specie essendo

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 4 \text{ e } \lim_{x \to 1} f(x) = -2$$

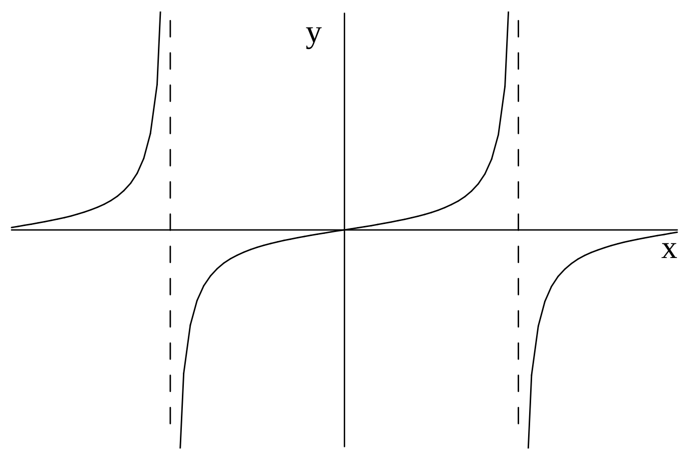
con salto pari a 6.

2. **Discontinuità di seconda specie.** Se almeno uno dei due limiti

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

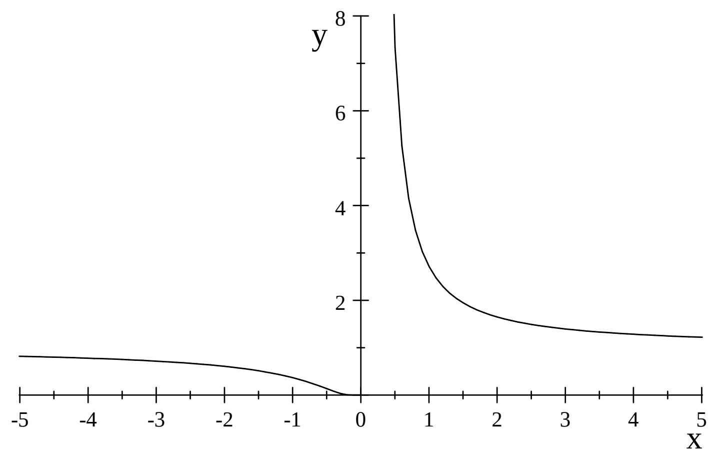
o non esiste oppure se esiste è infinito, si dice che la f ha nel punto x_0 una discontinuità di seocnda specie. Ad esempio la funzione

$$f(x) = \tan x$$



ha in $x_0 = \pi/2 + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) discontinuità di seconda specie. Anche

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}}$$



ha nel punto $x_0 = 0$ ($D = \mathbb{R}/\{0\}$) una discontinuità di seconda specie essendo

$$\lim_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$$

3. **Discontinuità di terza specie.** Se esiste ed è finito il limite della funzione in x_0

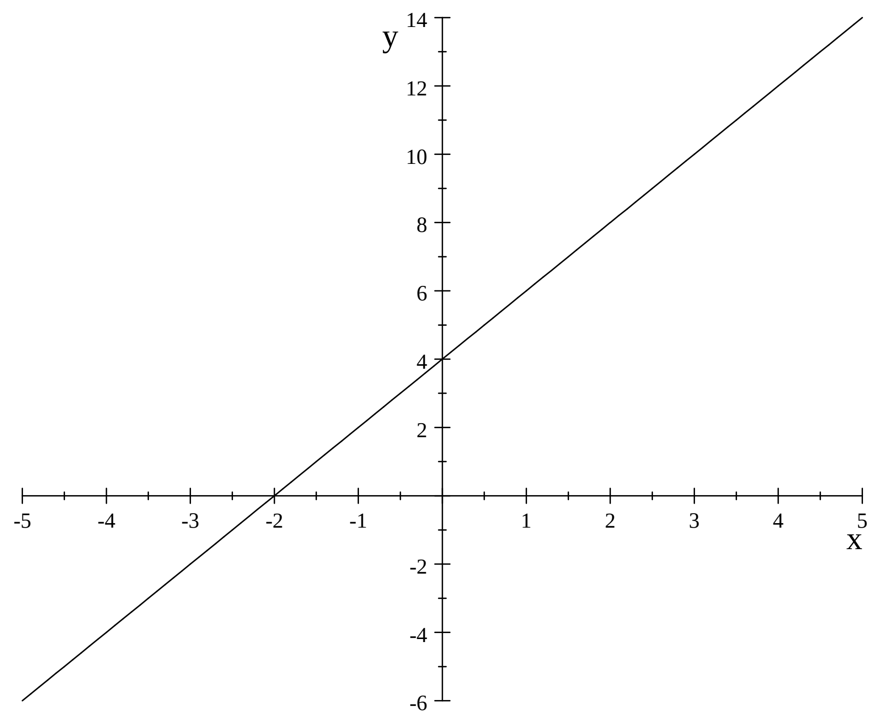
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

ma, o non esiste $f(x_0)$ oppure $f(x_0) \neq l$, di dice che la funzione f ha in x_0 una discontinuità di terza specie o *eliminabile.* Infatti è possibile eliminare tale discontinuità attribuendo alla funzione nel punto x_0 il valore del limite in quel punto

$$f(x) = \begin{cases} f(x) & \text{per} \quad x \neq x_0 \\ l & \text{per} \quad x = x_0 \end{cases}$$

Ad esempio, la funzione

$$f(x) = \frac{2x^2 - 8}{x - 2}$$



è continua $\forall x \neq 2$ e ha nel punto $x_0 = 2$ una discontinuità di terza specie: infatti, pur non esistendo $f(2)$, esiste ed è finito il suo limite:

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x^2 - 8}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{2(x-2)(x+2)}{x-2} = 8$$

Tale funzione può essere resa continua anche nel punto $x_0 = 2$ definendola come

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2-8}{x-2} & \text{per} \quad x \neq 2 \\ 8 & \text{per} \quad x = 2 \end{cases}$$

Osservazione. Se una funzione è discontinua nel punto x_0, può darsi che uno dei due limiti destro o sinistro coincida con $f(x_0)$. In tal caso diremo che la f è *continua da destra o da sinistra in* x_0.

Continuità delle funzioni inverse.

Ricordiamo brevemente che data una funzione $f : X \to Y$, con $X, Y \subseteq \mathbb{R}$, la sua inversa se esiste è unica ed è la funzione $f^{-1} : Y \to X$ tale che

$$y = f(x) \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y) \qquad \forall x \in X, \forall y \in Y$$

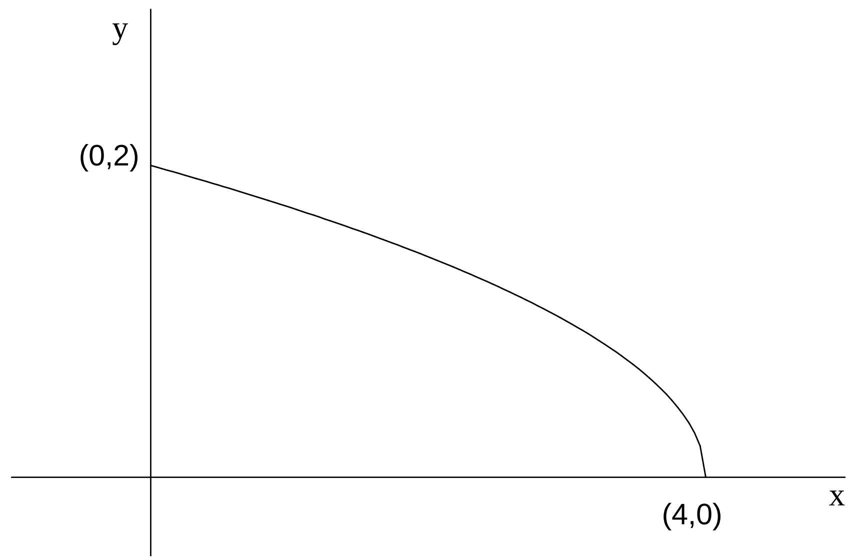
Riguardo alla continuita di f^{-1} vale il seguente teorema

Teorema 16 *Se una funzione* $f : (a, b) \to (c, d)$ *biunivoca e continua. Allora la sua inversa* f^{-1} *è anch'essa continua in* (c, d).

Se f continua in (a, b) è invertibile, allora deve essere *strettamente monotona.*

Esempio. Consideriamo la funzione

$$f(x) : [0,4] \longrightarrow [0,2] \ \ / \ x \longrightarrow \sqrt{4-x}$$

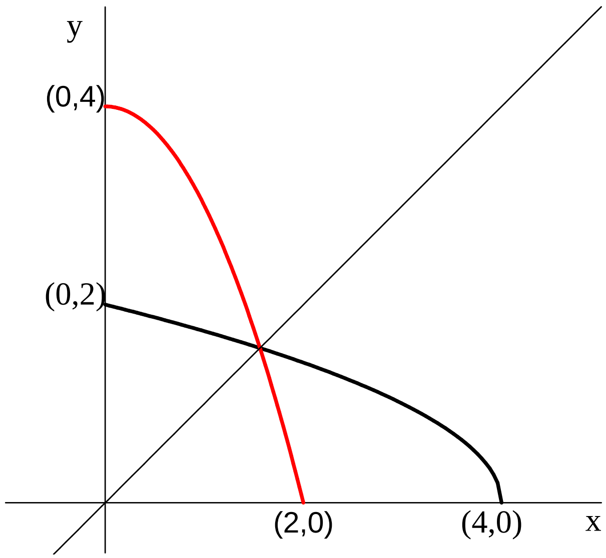


Essa è continua e strettamente decrescente in $[0,4]$. La sua funzione inversa

$$f^{-1}(x) : [0,2] \longrightarrow [0,4]$$

$$y = \sqrt{4-x} \rightarrow x = 4 - y^2 \rightarrow f^{-1}(x) = 4 - x^2$$

il grafico dell'inversa è il simmetrico di quello di f rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante



La f^{-1} è chiaramente continua in $(0, 2)$ e strettamente decrescente.

Teoremi fondamentali sulle funzioni continue.

Teorema 17 *(***Esistenza degli zeri)** *Sia f una funzione continua nell'intervallo $[a, b]$. Se i valori di f negli estermi dell'intervallo sono di segno opposto, cioè se $f(a) \cdot f(b) < 0$, allora f ha almeno uno zero in (a, b), ossia esiste almeno un punto $c \in (a, b)$ tale che*

$$f(c) = 0$$

Se f è strettamente monotona allora lo zero è unico.

Il metodo usato per dimostrare questo teorema si chiama anche *metodo di bisezione* ed è anche un metodo pratico per trovare una approssimazione di uno zero, nel caso non sia possibile trovarlo con i metodi tradizionali dell'algebra. Si considera il punto medio,m_0 di $[a, b]$: se $f(m_0) = 0$ allora abbiamo finito.

Se invece $f(m_0) \neq 0$ si considera il nuovo intevallo $[a_1, b_1] = [a_0, m_0]$ se $f(a_0) \cdot f(m_0) < 0$, altrimenti $[a_1, b_1] = [m_0, b_0]$: in ogni caso si avrà $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$. Ripetendo il discorso su $[a_1, b_1]$, o si conclude con un punto c come richiesto o si procede ancora. Segnaliamo che, anche in casi semplici, è possibile che "occorrano tutti i passi" della dimostrazione, cioè che non si concluda in un numero finito di passi: basta considerare la funzione $f(x) = x^2 - 2$, nell'intervallo $[0, 2]$, con $f(0) = -2$ e $f(2) = 2$; intale intervallo la funzione si annulla per il numero irrazionale $c = \sqrt{2}$.

Teorema 18 (Dei valori intermedi) *Sia f una funzione continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Allora f assume tutti i valori compresi tra $f(a)$ e $f(b)$.*

Presi due punti c e d arbitrariamente tra a e b, il teorema si può applicare anche all'intervallo $[c, d]$: se ne deduce che la funzione assume tutti i valori compresi tra due suoi valori qualunque. Per questo si chiama "*teorema di tutti i valori*".

Teorema 19 *(**Weierstrass**) Se f è una funzione continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$,allora assume massimo e minimo, ossia esistono almeno due punti x_1 e x_2 in $[a, b]$,tali che, $\forall x \in [a, b]$ si ha*

$$m := f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) =: M$$

Osservazione 1. Il massimo e il minimo di una funzione continua in un intervallo chiuso $[a, b]$ possono cadere tanto nei punti interni all'intervallo, quanto negli estremi di esso, oppure uno all'interno l'altro in un estremo.

Perciò se la funzione f è strettamente crescente (decrescente) in $[a, b]$, essa raggiunge il massimo (minimo) nell'estrmo destro b, mentre raggiunge il minimo (massimo) nell'estremo sinistro a.

Osservazione 2. Una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ assume, almeno uno volta, qualunque valore compreso tra il suo minimo e il suo massimo (per il teorema degli zeri).