FUNZIONI

Definizione 1 *Dati due insiemi A e B, si chiama* **funzione** *da A a B una legge che ad ogni elemento di A associa un (solo) elemento di B. L'insieme A si chiama* **dominio** *della funzione e l'insieme B* **codominio.**

Osservazione 2 *L'elemento di arrivo (*output*) deve essere* unico$\rightarrow$corrispondenza univoca *da A e B.*

Generalmente per indicare una funzione si scrive

$$f : A \rightarrow B$$

Se la funzione associa all'elemento $x \in A$ l'elemento $y \in B$ allora $f : x \longmapsto y$. L'elemento y, che si indica anche con il simbolo $f(x)$ si chiama *immagine* di

x tramite f, mentre x è una *controimmagine* di y. La variabile x è la variabile *indipendente*, mentre la variabile y si dice *dipendente.*

Funzioni reali di una variabile reale

- Leggi che associano ad un numero reale un unico numero reale y, aventi percio come dominio un sottinsieme A di $\mathbb{R}$ e come codominio $\mathbb{R}$.

Definizione 3 *Il* **grafico** *di una funzione* $f : A \to B$ *è l'insieme delle coppie* (x, y)*, con* $x \in A, y \in B$*, tali che* $y = f(x)$.

Legge univoca: *ogni retta verticale interseca il grafico di f al massimo in un punto. (ad esempio la circonferenza non è il grafico di una funzione!)*

Osservazione 4 *Quando una funzione reale, di variabile reale, viene definita senza specificarne il dominio, si sottointende che il dominio di f sia il più ampio sottoinsieme di $\mathbb{R}$ per cui sono possibili le operazioni indicate nell'espressione $f(x)$. Esso è detto* dominio naturale *o* insieme naturale di definizione *di f. Nel caso venga omessa l'indicazione del codominio è sottointeso sia $\mathbb{R}$.*

Esempi

- Il dominio di $f(x) = 3x^3 - 2x + 2$ è tutto $\mathbb{R}$
- Il dominio di $f(x) = \frac{1}{x-4}$ è $\mathbb{R}\setminus\{4\}$
- Il dominio di $f(x) = \sqrt{x-3}$ è $x \geqslant 3$,oppure $[3, +\infty)$

Osservazione 5 *Tuttavia quando si usano funzioni per costruire modelli per le applicazioni, può darsi che interessi considerare solo una parte dell'insieme naturale di definizione, ovvero un sottoinsieme* $A^{'}$ *del dominio* A*. Ad esempio consideriamo la funzione di prezzo* $p(x) = 100/x$ *che è definita per tutto* $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ *. Predere in considerazione il sottoinsieme del dominio dove* $x < 0$*, questo non ha alcun significato economico interessante. Ci concentreremo invece su quel sottoinsieme del dominio* $A^{'}$ *tale che* $x > 0$*.Quindi consideriamo semplicemente una* **restrizione** *di* $f(x)$ *all'insieme* $A^{'}$ *.*

- Una funzione $f : A \to B$ si dice **costante** se l'insieme $f(A)$ contiene un solo elemento (numero)

$$f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x \text{ è costante perchè } \forall x \to f(x) = 1$$

- Una funzione $f : A \rightarrow A$ si chiama **identità** se ad ogni elemento di A associa l'elemento stesso

$$f(x) = x \text{ oppure } f(x) = 10^{\log x}$$

- Una funzione $f : A \rightarrow B$ si dice

  - **suriettiva:** quando è $f(A) = B$ (esempio:$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \; f(x) = x^2$)

  - **iniettiva:** quando da $x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ (esempio: $f(x) = x + 1$)

  - **biunivoca:** se è iniettiva e suriettiva. (esempio: $f(x) = e^x$)

Funzioni elementari

Una funzione elementare si costruisce partendo da alcuni elementi base. Ad esempio

$$f(x) = \ln\left(\frac{e^{3x}}{2x^3+1}\right)$$

è elementare perchè è costruita a partire da elementi base (funzione logaritmo naturale, esponenziale e potenze di x), attraverso l'uso di operazioni come somma, divisione, composizione.

Consideriamo tre famiglie di funzioni semplici

- **funzioni algebriche**

- **funzioni esponenziali e logaritmi**

- **funzioni trigonometriche**

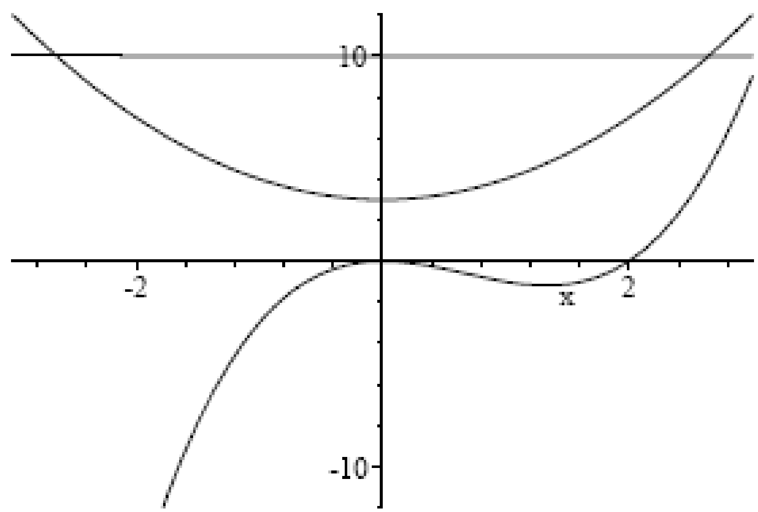
Funzioni algebriche

Polinomi: In questa classe le funzioni sono rappresentate da un polinomio

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$$

Poiché i polinomi coinvolgono solo somme e moltiplicazioni, essi accettano come input tutti i numeri reali. In altre parole, ogni polinomio ha lo stesso dominio naturale: l'insieme dei numeri reali. Per quanto riguarda il codominio dipende dall'espressione polinomiale coinvolta. Ad esempio:

$$
\begin{aligned}
f_1(x) &= 10 \\
f_2(x) &= 3 + x^2 \\
f_3(x) &= x^3 - 2x^2
\end{aligned}
$$



Grafici di f_1, f_2 e f_3

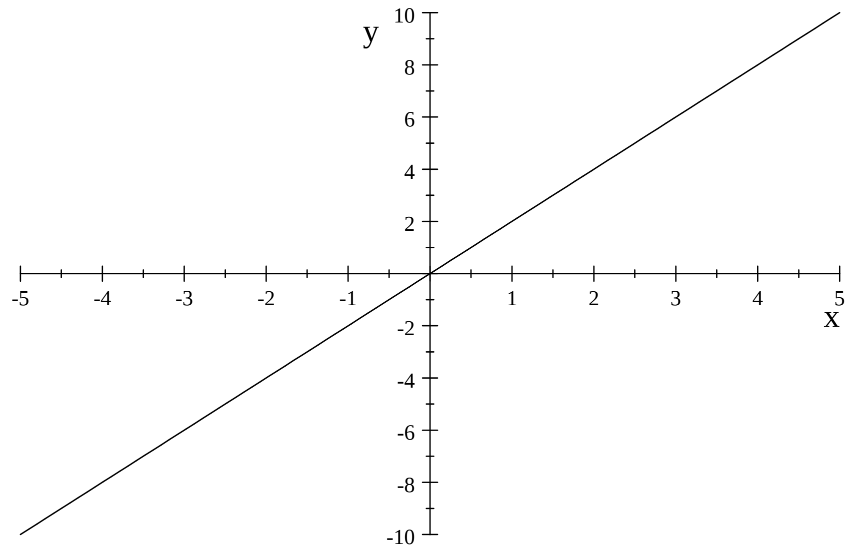
Seplicemente il codominio di f_1 è $\{10\}$, mentre di f_2 è l'intervallo $[3, +\infty)$. Cosa si può dire di f_3?Il grafico sembra suggerirci che la funzione sale senza limiti (tende a $+\infty$) quando $x \rightarrow +\infty$, mentre tende a $-\infty$ quando $x \rightarrow -\infty$.

Osservazione 6 *Per ogni polinomio, il termine di maggior potenza in x determina ciò che accade quando x tende a più o meno infinito.*

In questo caso possiamo concludere che il codominio della f_3 è proprio tutto $\mathbb{R}, (-\infty, +\infty)$.

Funzioni Lineari: I polinomi più semplici sono le costanti, come $f_1(x) = 10$. I polinomi più semplici ed interessanti sono le *funzioni lineari*, polinomi che presentano solo la prima potenza di x. Ad esempio

$$f(x) = 2x$$



Il grafico è ovviamente una retta. Generalizzando si ha dice che:

Definizione 7 *Una funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ è lineare se e solo se della forma*

$$f(x) = mx \qquad m \in \mathbb{R}$$

e gode delle seguenti proprietà

$$\begin{array}{ll} f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) & \textit{f è additiva} \\ f(ax) = af(x) & \textit{f è omogenea} \end{array}$$

La legge che lega la variabile dipendente a quella indipendente è una legge di *proporzionalità diretta* ovvero il loro rapporto è *costante.* m si chiama *coefficiente angolare o pendenza* della retta *(tangente trigonometrica* $m = \tan\alpha$).

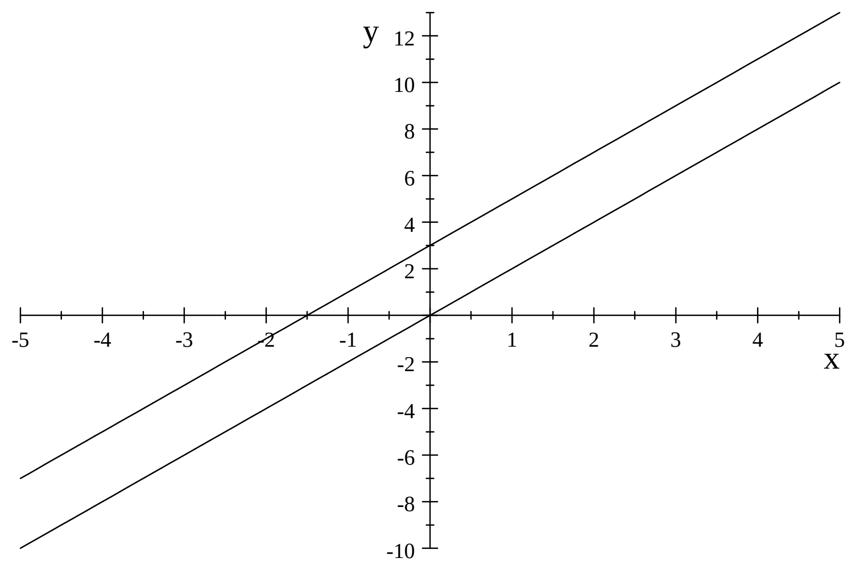
Funzioni lineari affini

$$f(x) = mx + q$$

il cui grafico è una retta che si ottiene traslando la funzione lineare $f(x) = mx$ di q verso l'alto se q è positivo o di $-q$ verso il basso se q è negativo. $q = f(0)$ è chiamata $intercetta$.

Esempio

$y_1 = 2x$ e $y_1 = 2x + 3$



Funzioni quadratiche: Le funzioni $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ date dalle legge

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ con } a \neq 0 \text{ e } b, c \in \mathbb{R}$$

rappresentano *parabole* con asse di simmetria parallelo all'asse delle ordinate $x = -\dfrac{b}{2a}$.Dominio e immagine variano a seconda dei valori dei coefficienti a, b e c.

1. Se $b, c = 0$ distinguiamo due casi:

   - se $a > 0$ abbiamo parabole con vertice nell'origine con la concavità rivolta verso l'alto;

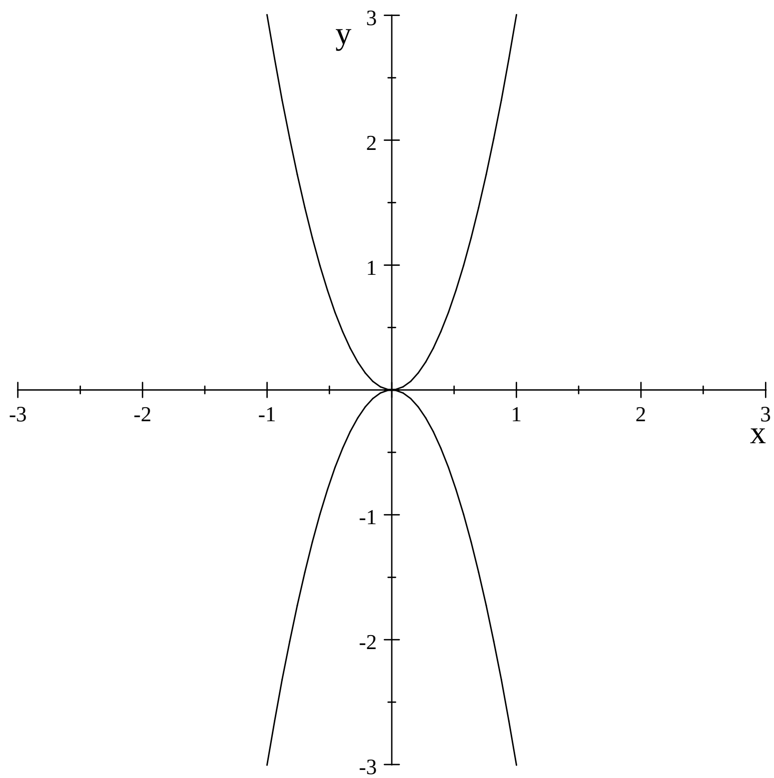
   - se $a < 0$ abbiamo parabole con vertice nell'origine con la concavità rivolta verso il basso;

2. Se $b = 0$ e $a \neq 0$ otteniamo parabole simmetriche rispetto all'asse delle y, con vertice proprio sull'asse y traslate verso l'alto per $c > 0$ e verso il basso per $c < 0$;

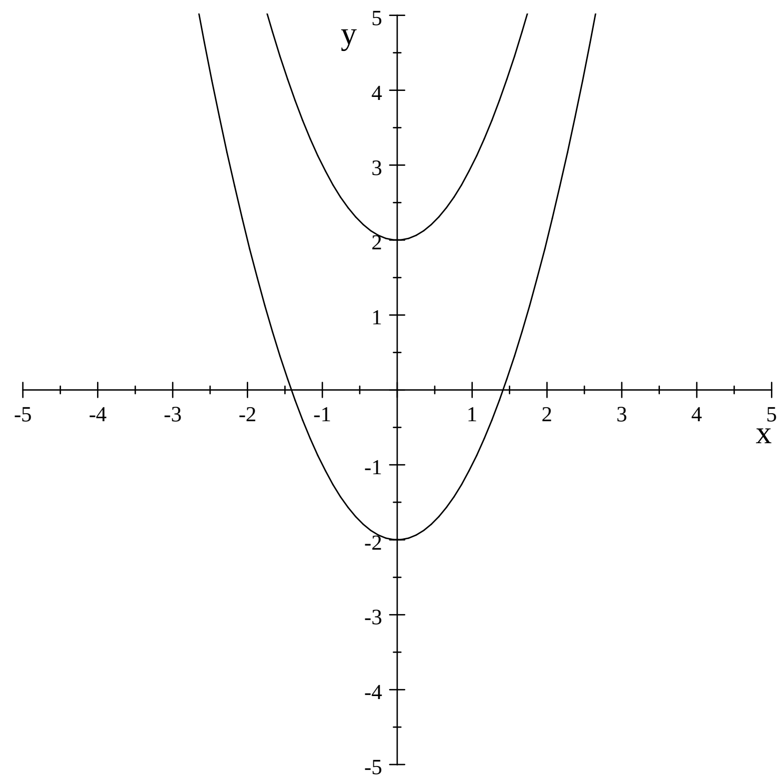
3. Se $c = 0$ avremo parabole passanti per l'origine degli assi, con la concavità determinata dal segno di a;

4. Se $a, b, c \neq 0$ otteniamo parabole generiche con *vertice* V avente corrdinate $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{2a}\right)$ dove $\Delta = b^2 - 4ac$.

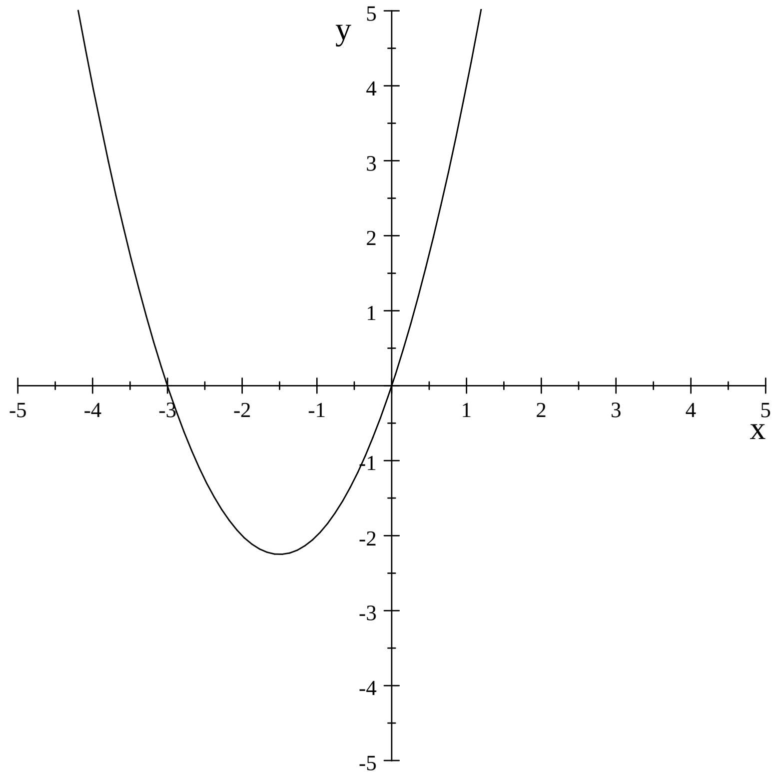
Esempi: $f(x) = 3x^2$ e $f(x) = -3x^2$;



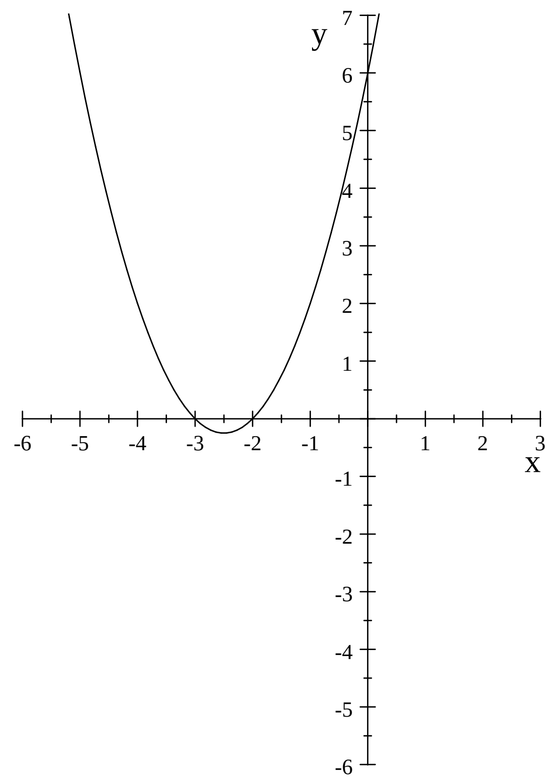
$f(x) = x^2 + 2$ e $f(x) = x^2 - 2$;



$$f(x) = x^2 + 3x$$



$$f(x) = x^2 + 5x + 6$$

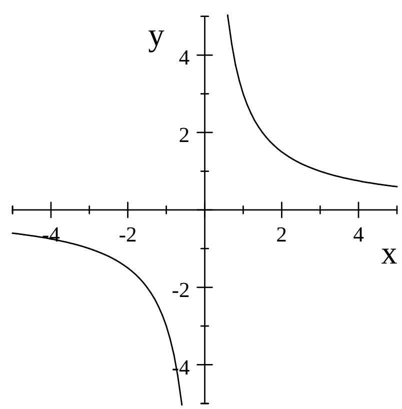


Proporzionalità inversa

Due variabili non nulle x e y sono inversamente proporzionali se il loro prodotto è costante, quindi $xy = k$. Le funzioni $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definite da

$$f(x) = \frac{k}{x} \text{ con } k \neq 0$$

rappresentano un'iperbole che ha come *asintoti* gli assi cartesiani.



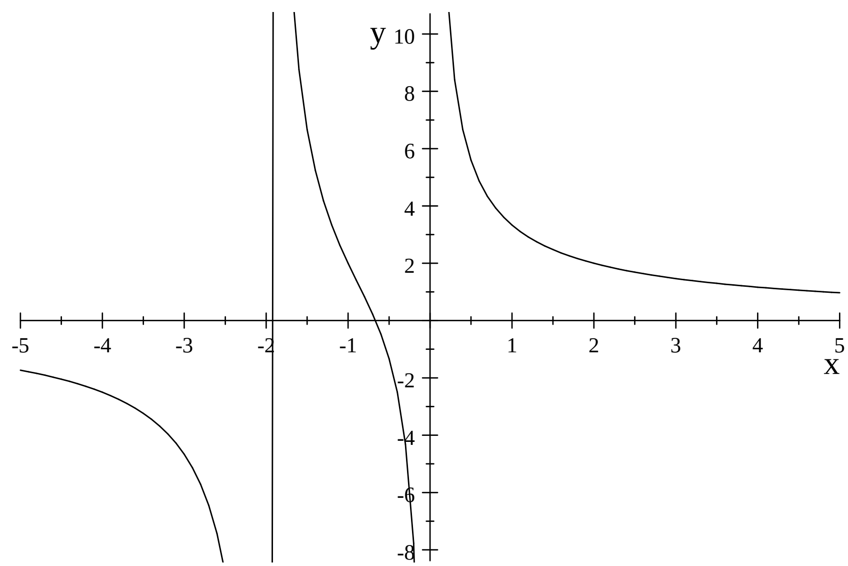
Osservazione 8 *I grafici dei polinomi lineari e quadratici (polinomi di primo, secondo) hanno forme definite, ma in generale i grafici dei polinomi possono assumere qualsiasi forma purché non spigolosa ed ininterrotta. Alcune restrizioni ci sono, per esempio, un polinomio di grado n può avere al più n radici questo graficamente significa che il grafico di un polinomio di grado n può intercettare l'asse delle x al più n-volte.*

Funzioni razionali.

Sommare o moltiplicare tra di loro polinomi da luogo ad un altro polinomio. Dividere due polinomi non dà (in generale) luogo ad un altro polinomio; il risultato è una funzione razionale.

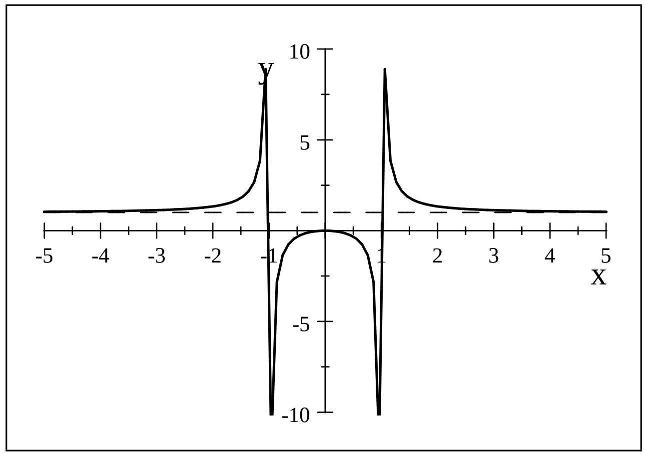
Una *funzione razionale* è una funzione la cui legge può essere scritta come quoziente di due polinomi.

Ad esempio $f(x) = \dfrac{6x+4}{x^2+2x}$



Osservazione 9 *Le funzioni razionali, al contrario dei polinomi hanno una nuova importante ere asintoti orizzontali e verticali.*

Ad esempio la funzione $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$

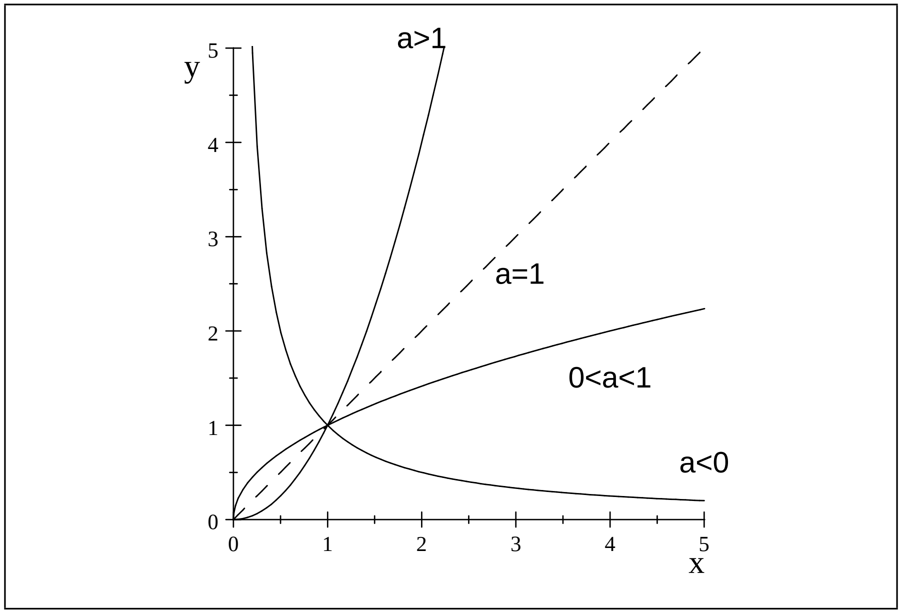


ha come asintoti verticali le rette $x = 1$ e $x = -1$ (punti del dominio??) e la retta $y = 1$ come asintoto orizzontale. L'asintoto orizzontale riflette il comportamento della $f(x)$ per valori grandi (positivi o negativi) della x.In questo caso, l'asintoto mostra che $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$.

Funzioni potenza

Le funzioni $f(x) = mx$, $f(x) = ax^2$ oppure $f(x) = k/x$ sono esempi di funzioni *potenza* che in generale scriveremo nella forma

$$f(x) = kx^\alpha \quad \text{con } \alpha \neq 0$$



I grafici mostrano funzioni

- *strettamente crescenti per* $\alpha > 0$, e *strettamente decrescenti per* $\alpha < 0$;

- *convesse per* $\alpha < 0$ e $\alpha > 1$, e *concave per* $0 < \alpha < 1$.

Comportamento asintotico.....

Funzioni Esponenziali e Logaritmiche

Le funzioni esponenziali e logaritmiche sono tra le più importanti nelle applicazioni economiche e finanziarie.

Come sono collegati tra loro logaritmi ed esponenziali.

Dato un numero reale positivo $a \neq 1$ (*base*) e per ogni $x \in \mathbb{R}_{++}$, il logaritmo in base a di x, $\log_a x$, è l'unica potenza a cui dobbiamo elevare a per ottenere x, cioè l'unico numero reale y tale che $a^y = x$

$$y = \log_a x \Longleftrightarrow x = a^y$$

Useremo questa proprietà per definire la funzione logaritmo a partire da quella esponenziale.

Ricordiamo alcune delle *proprietà* fondamentali spesso usate

$$a^x a^y = a^{x+y} \qquad (a^x)^y = a^{xy}$$

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y \quad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \quad \log_a (x)^y = y \log_a x$$

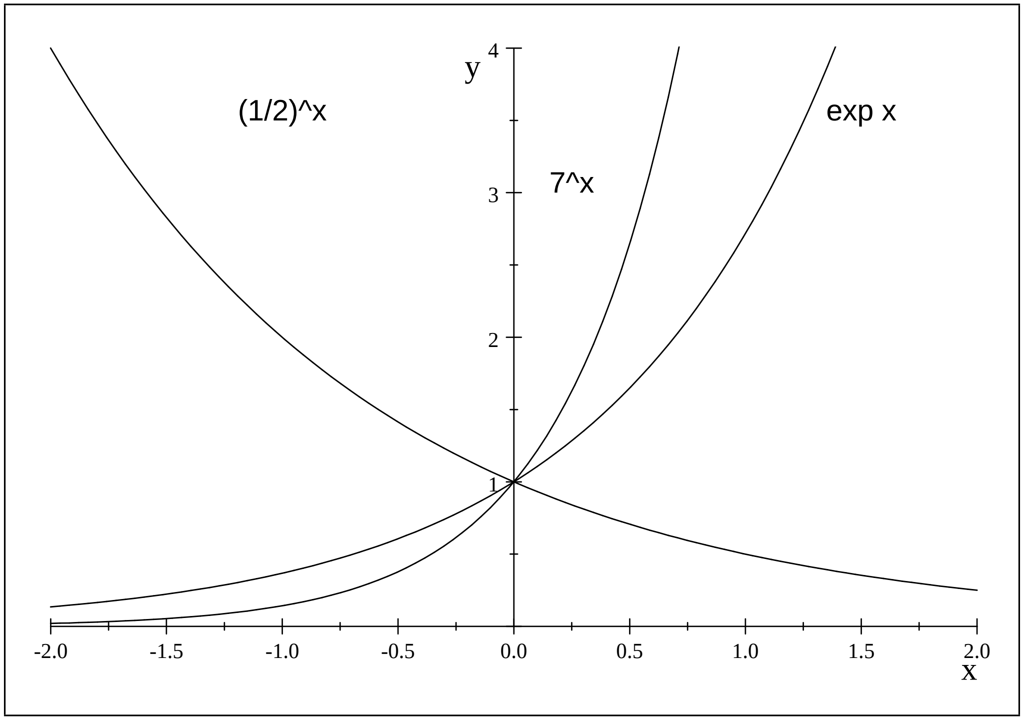
Funzioni Esponenziali

Una funzione *esponenziale* è definita da una espressione della forma

$$f(x) = a^x$$

dove la base a è un numero fissato positivo diverso da 1. La funzione $f(x) = e^x$ di base e , è chiamata la funzione esponenziale naturale.

Grafici di funzioni esponenziali: $\left(\frac{1}{2}\right)^x \quad 7^x \quad e^x$



Basi. Se $a > 0$ l'espressione a^x ha senso per tutti i valori reali di x. Quindi ogni numero positivo a definisce una funzione esponenziale.

Dominio e Codominio. Le funzioni esponenziali accettano come input ogni numero reale, così il loro dominio è $(-\infty, +\infty)$. I grafici ci dicono che tranne che per $a = 1$ il codominio della funzione esponenziale è $(0, +\infty)$.

Forma. La forma del grafico di una funzione esponenziale dipende dalla base a. Più grande è il valore di $a > 1$ più velocemente a^x cresce (se $a < 1$ la funzione decresce, se $a = 1$ la funzione è costante).

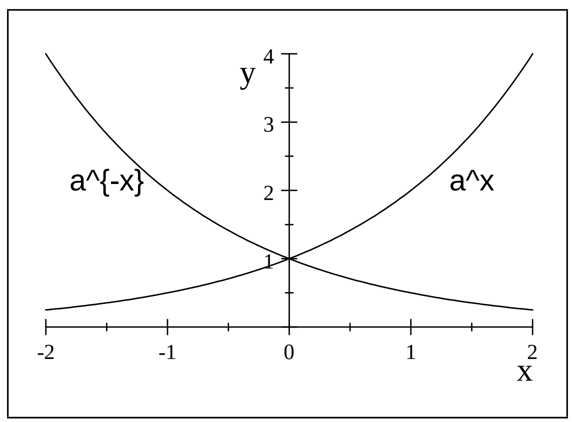
Punto in comune. Tutti i grafici delle funzioni $f(x) = a^x$ passano per il punto $(0, 1)$ cioè $f(0) = a^0 = 1$. Inoltre la funzione passa per il punto $(1, a)$ cioè $f(1) = a^1 = a$.

Monotonia. Le funzioni esponenziali sono monotone, cioè non crescenti o non decrescenti. In particolare, se $a > 1$ il grafico di a^x è crescente. Se $0 < a < 1$ il grafico di a^x è decrescente.

Osservazione 10 *Essendo*

$$\left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$$

due funzioni esponenziali che hanno basi l'una la reciproca dell'altra hanno grafici simmetrici rispetto all'asse delle ordinate.



Funzioni Logaritmiche

Le funzioni esponenziali e logaritmiche possono essere considerate "accoppiate" nel senso che ad una funzione esponenziale di base $a \neq 1$ corrisponde una funzione logaritmo con la stessa base. La seguente tavola collega insieme i valori di tale coppia per $a = 2$

Valori delle funzioni esponenziali e logaritmiche

Valori di 2^x

x	-2	-1	0	1	2	3	10	$13,28771$
2^x	$1/4$	$1/2$	1	2	4	8	1024	10.000

Valori di $\log_2 x$

x	$1/4$	$1/2$	1	2	4	8	1024	10.000
$\log_2 x$	-2	-1	0	1	2	3	10	13.28771

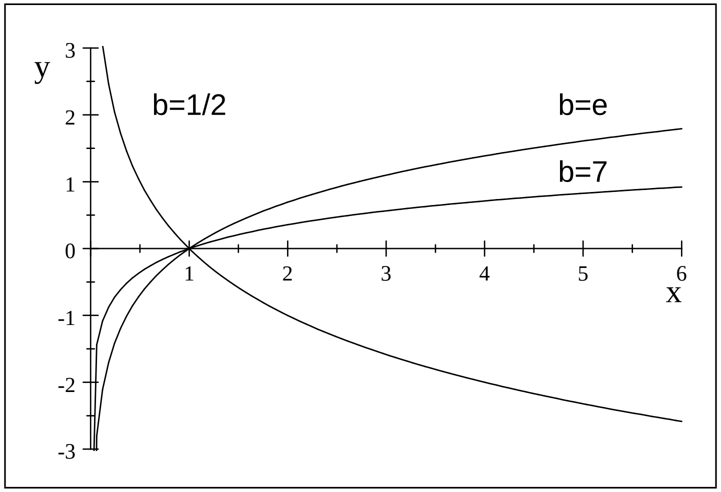
La funzione *logaritmo* in base a con $a > 0$ e $a \neq 1$, indicata da

$$f(x) = \log_a x$$

è definita dalle condizione

$$y = \log_a x \Longleftrightarrow a^y = x$$

La funzione con base $a = e$ è la funzione *logaritmo naturale* $\ln x$.*Grafici delle funzioni logaritmiche* $\log_{\frac{1}{2}} x \quad \log_7 x \quad \ln e$



Basi. Ogni numero positivo $a \neq 1$ può essere usato come base per le funzioni logaritmo

Dominio e Codominio. La funzione logaritmo ha come dominio $(0, +\infty)$.Il codominio invece è $(-\infty, +\infty)$.

Forma. Anche qui cruciale è la scelta della base a. Questa volta, maggiore è il valore di a più lenta è la crescita del grafico della funzione (mentre se $a < 1$ il grafico decresce). Il grafico di una funzione esponenziale cresce sempre più rapidamente al crescere di x, il grafico delle funzioni logaritmo ha la proprietà opposta: cresce sempre più lentamente al crescere della variabile x.

Punto in Comune. Il grafico di ogni funzione logaritmo passa per il punto $(1, 0)$, cioè $f(1) = log_a 1 = 0$. Analogamente, si ha che $f(b) = log_a a = 1$

Monotonia. Ogni funzione logaritmo è strettamente monotona. Se $a > 1$ il grafico di $f(x)$ è crescente. Se $0 < a < 1$ il grafico è decrescente.

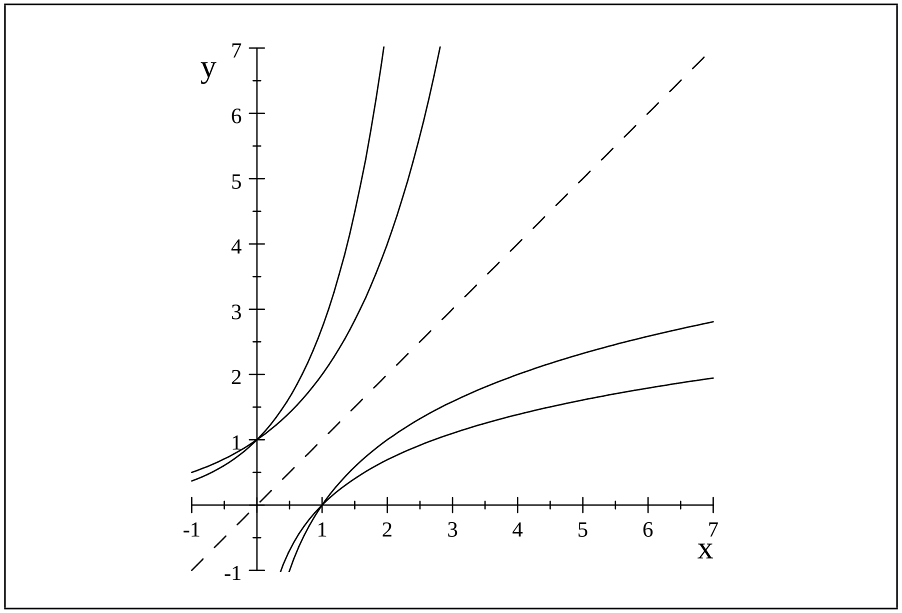
Osservazione 11 Funzioni Esponenziali e Logaritmiche come Inverse

La condizione

$$y = \log_a x \Longleftrightarrow= x = a^y$$

implica che le funzioni esponenziali e logaritimiche sono una inversa dell'altra.

Funzioni Inverse: il punto di vista grafico. Le funzioni $\ln x$ e $\log_2 x$ sono le inverse di e^x e 2^x rispettivamente. Da un punto di vista geometrico



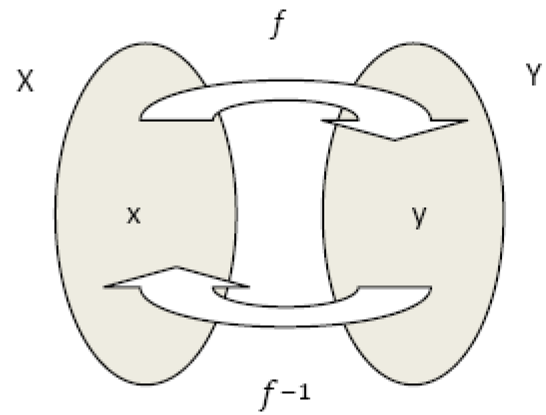
I grafici delle funzioni inverse sono *simmetrici* rispetto alla retta $y = x$.

Funzione inversa.

Data una funzione $f : X \to Y$, con $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ esiste un'altra funzione $g : Y \to X$ tale che a ogni $y \in Y$ associa esattamente il punto $x \in X$ tale che $y = f(x)$. g è anch'essa una funzione, quindi non deve associare più di un elemento di X a ciascun elemento di Y.

Definizione 12 *Una funzione $f : X \to Y$, con $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ si dice* **invertibile** *se e solo se esiste la sua funzione inversa f^{-1}. Questa è l'unica funzione $f^{-1} : Y \to X$ tale che*

$$y = f(x) \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y) \qquad \forall x \in X, \forall y \in Y$$



Teorema 13 *Una funzione è invertibile se e solo se essa è biunivoca.*

Ogni elemento del codominio di f ha al massimo una controimmagine

$$X = Dom(f) = \mathsf{Im}(f^{-1}) \ \text{ e } \ Y = \mathsf{Im}(f) = Dom(f^{-1})$$

La funzione inversa f^{-1} se esiste è sempre invertibile e ha come inversa la funzione f di partenza

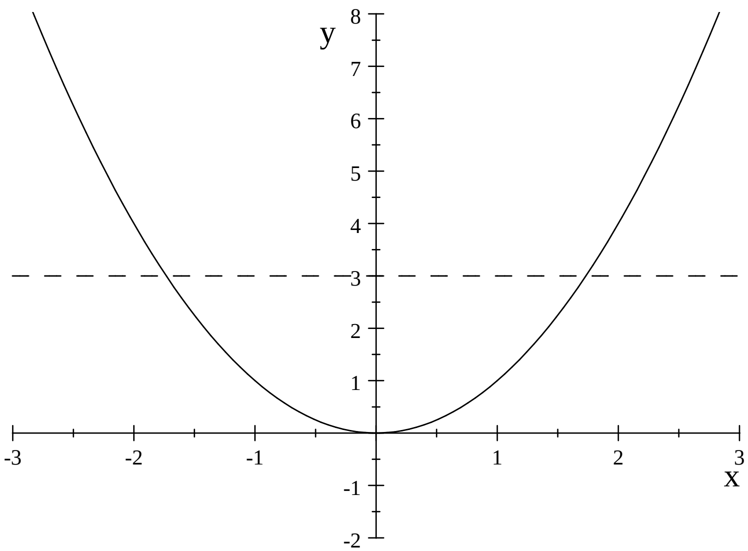
$$\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$$

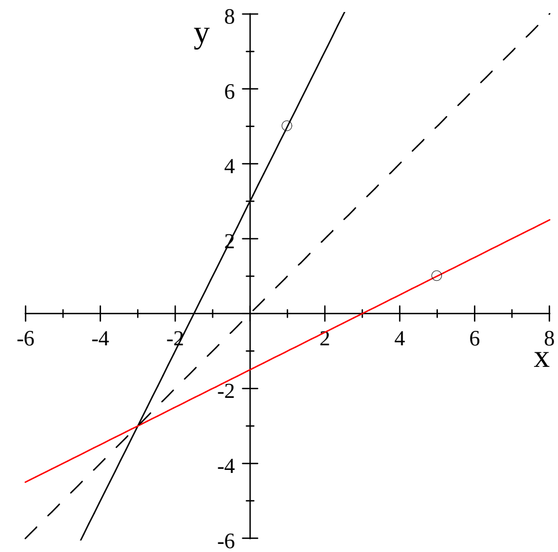
Regola: Data una funzione $f : X \to Y$, con $X, Y \subseteq \mathbb{R}$,rappresentata dall'equazione

$$y = f(x)$$

la funzione inversa $f^{-1} : Y \to X$ se esiste, si ricava risolvendo l'equazione $y = f(x)$ rispetto alla x; cioè esprimendo se possibile x in funzione di y, $x = f^{-1}(y)$.

Esempio. *Consideriamo le due funzioni* $f(x) = x^2$ e $g(x) = 2x + 3$





La funzione $f(x)$ non è biunivoca se consideriamo il suo dominio naturale, mentre $g(x)$ lo è. La sua inversa sarà:

$$y = 2x + 3 \rightarrow x = \frac{y - 3}{2} \rightarrow g^{-1}(x) = \frac{x - 3}{2}.$$

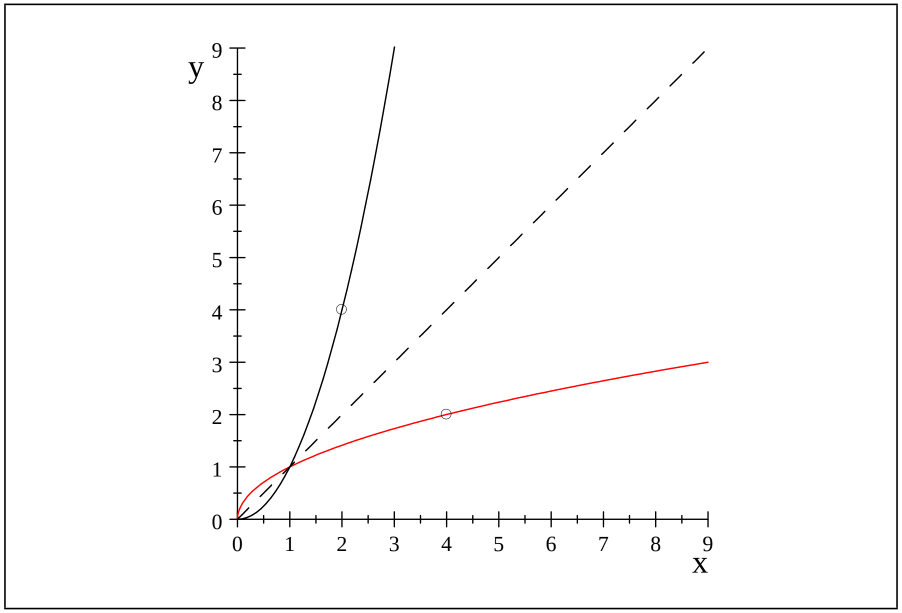
I due grafici sono simmetrici rispetto alla retta $y = x$. Ogni punto sui due grafici è l'immagine speculare di un punto sull'altro grafico. Ad esempio la coppia simmetrica di punti $(1, 5)$ e $(5, 1)$.

Osservazione 14 *Un punto (a, b) appartiene al grafico di f se e solo se il punto (b, a), la riflessione di (a, b) rispetto la retta $y = x$, appartiene al grafico di f^{-1}.*

Restringere il Dominio per Rendere Invertibile una Funzione

La funzione $f(x) = x^2$ non è biunivoca sul suo dominio naturale che è tutto $\mathbb{R}$. Tuttavia f diventa biiettiva se restringiamo il dominio all'insieme degli x non negativi. Con tale restrizione f è invertibile ed ha come inversa

$$y = x^2,\ x \in [0, +\infty) \to x = \sqrt{y} \to f^{-1} = \sqrt{x}$$

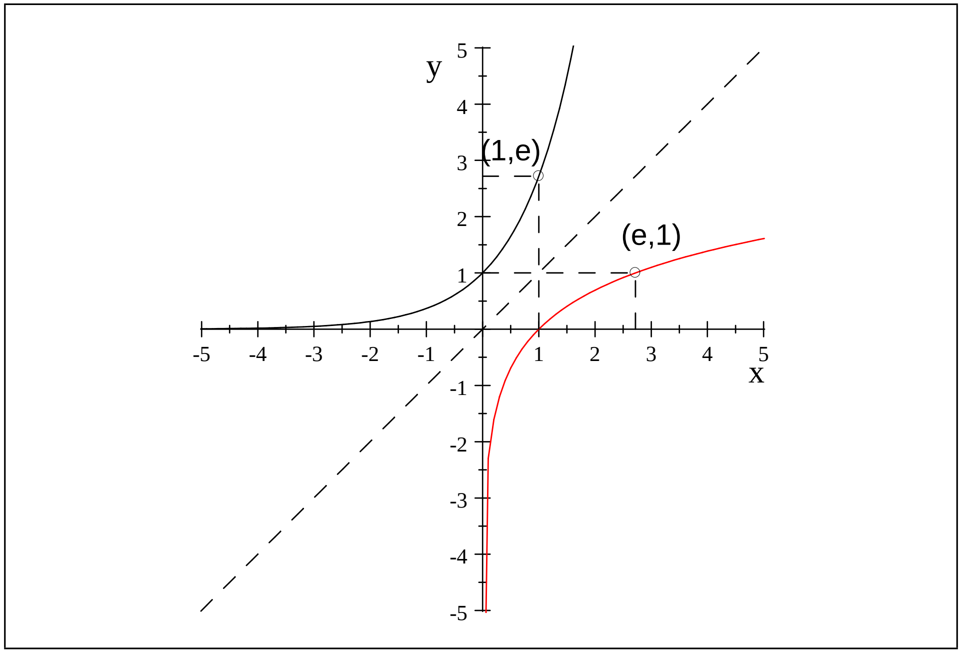


I grafici di f e g sono immagini simmetriche rispetto alla retta $y = x$. I punti indicati nel grafico mostrano che $f(2) = 4$ e $f^{-1}(4) = 2$.

Osservazione 15 *La funzione logaritmo in base a di x, $f(x) = \log_a x$ è vista come la* **funzione inversa della funzione esponenziale** $f(x) = a^x$:

$$f(x) = a^x \Longleftrightarrow f^{-1}(x) = \log_a x$$

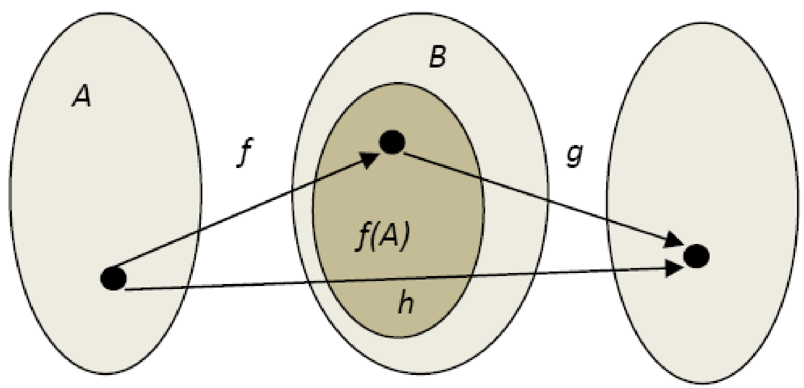
Poiche la fuzione esponenziale ha per dominio naturale $\mathbb{R}$ e immagine solo $\mathbb{R}_{++}$, il logaritmo deve avere $\mathbb{R}_{++}$ per dominio naturale e tutto $\mathbb{R}$ come immagine.



Funzione composta

Consideriamo due funzioni $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$, tale che $f(A) \subseteq B$. Ad ogni elemento $x \in A$, f associa un unico elemento $f(x)$ e poiche questo appartiene al dominio di g, ad esso g associa un unico elemento y, dato da $g\,[f(x)]$. Definiamo quindi una funzione $h : A \longrightarrow \mathbb{R}$

$$h(x) = (g \circ f)\,(x) = g\,[f(x)]$$



Proprietà della composizione.

- **L'ordine**. In generale $f \circ g$ e $g \circ f$ sono diversi tra loro;

- **Domini.** Poiché la composizione $g \circ f$ abbia senso, x deve essere un *input* ammissibile per la funzione f, cioè deve esistere $f(x)$. Adesso, per poter continuare, bisogna che $f(x)$ sia un *input* ammissibile per la funzione g. Quindi in generale il *dominio* di $g \circ f$ è un sottoinsieme del dominio di f. Più precisamente, il sottoinsieme del dominio di f per il quale gli *ouput* $f(x)$ appartengono al dominio di g.

Esempio. Sia $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x + 3$. *Trovare i domini di* $f \circ g$ *e* $g \circ f$.

$$f \circ g(x) = f\,[g(x)] = f(x+5) = \sqrt{x+3}$$
$$g \circ f(x) = g\,[f(x)] = g(\sqrt{x}) = \sqrt{x} + 3$$

Il dominio della funzione $f \circ g$ è $[-3, +\infty)$, mentre il dominio di $g \circ f$ è $[0, +\infty)$.

Osservazione 16 *La composizione di più funzioni gode della proprietà associativa*

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

Teorema 17 *Data $f : X \to Y$, con $X, Y \subseteq \mathbb{R}$, invertibile, sia f^{-1} la sua funzione inversa. Allora*

$$\begin{aligned} \left(f^{-1} \circ f\right)(x) &= f^{-1}[f(x)] = x \quad \forall x \in X \\ \left(f \circ f^{-1}\right)(y) &= f\left[f^{-1}(y)\right] = x \quad \forall y \in Y \end{aligned}$$

Esempio. Data la funzione $f(x) = \sqrt{x-3}$. Il dominio di $f(x)$ è $[3, +\infty)$.

Il dominio di $f(x)$ corrisponde all'immagine della funzione inversa, $Dom(f) = \mathrm{Im}(f^{-1})$.

Il dominio della funzione inversa è l'immagine di f cioe $Dom(f^{-1}) = \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_+$.

L'equazione dell'inversa è:

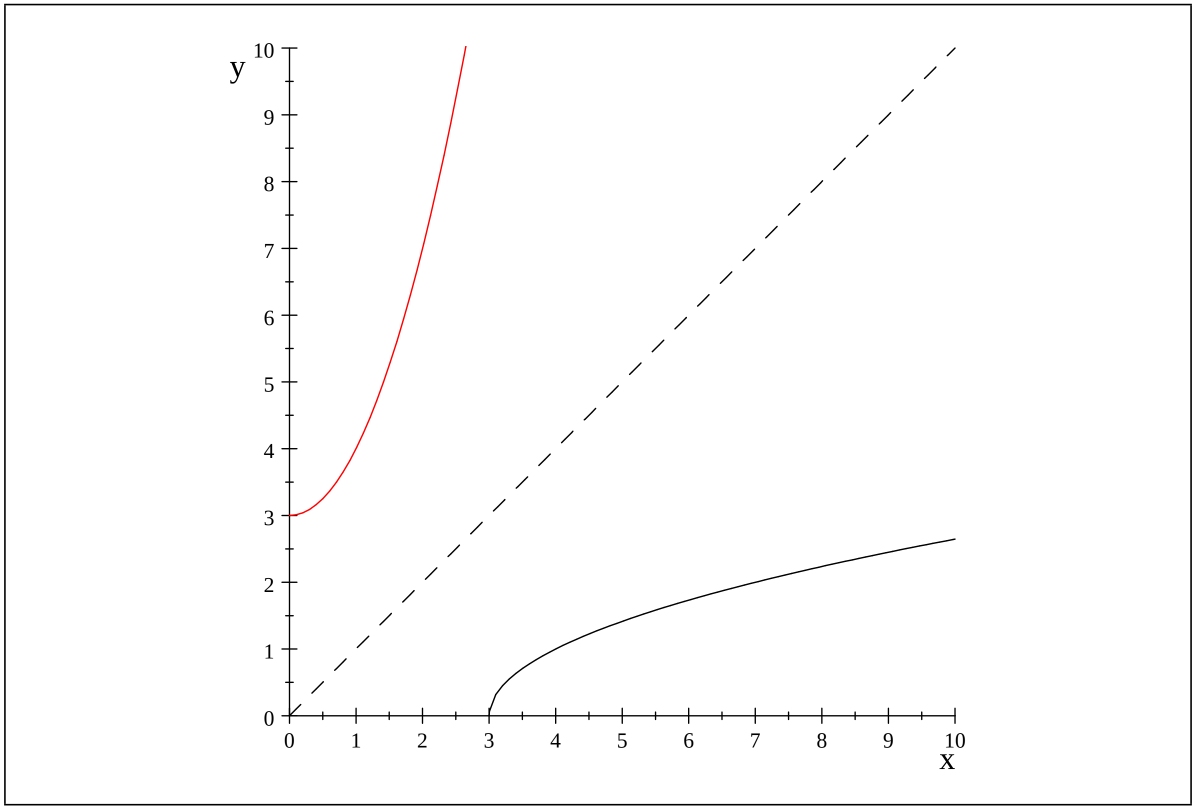
$$y = \sqrt{x-3} \to y^2 = \left(\sqrt{x-3}\right)^2$$

Grazie al teorema precedente $y^2 = \left(\sqrt{x-3}\right)^2 \to y^2 = x - 3$ da cui

$$x = y^2 + 3 \to f^{-1}(x) = x^2 + 3$$

definita solo su $Dom(f^{-1}) = \mathsf{Im}(f) = \mathbb{R}_+$

a differenza della generica funzione $f(x) = x^2 + 3$ definita su tutto $\mathbb{R}$.



Funzioni limitate, monotone, convesse. Funzioni pari e dispari. Funzioni periodiche.

Funzioni limitate.

Sia $f : A \to \mathbb{R}$. Si dice che f è *superiormente limitata* se

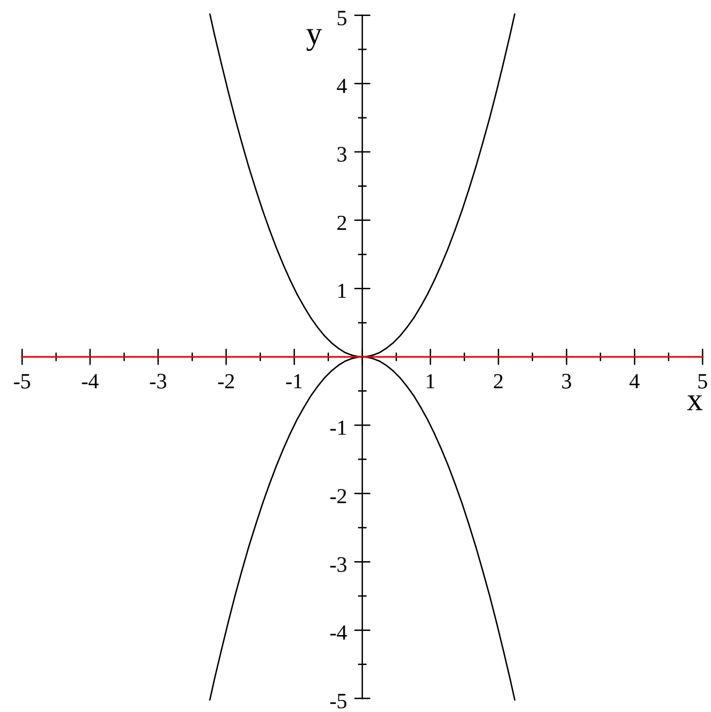
$$\exists K \in \mathbb{R} : f(x) \leq K, \quad \forall x \in A$$

Analogamente si dice che f è *inferiormente limitata* se

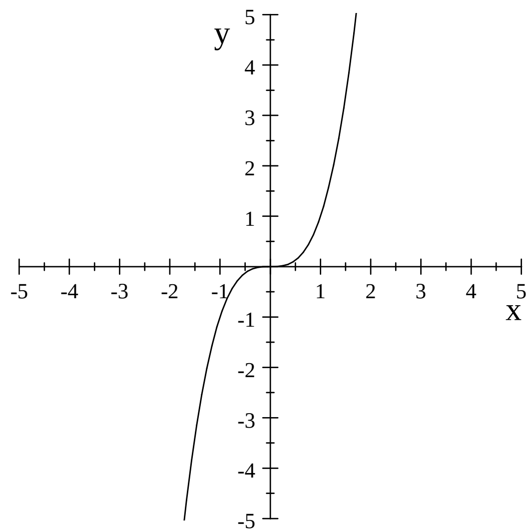
$$\exists N \in \mathbb{R} : f(x) \geq N, \quad \forall x \in A$$

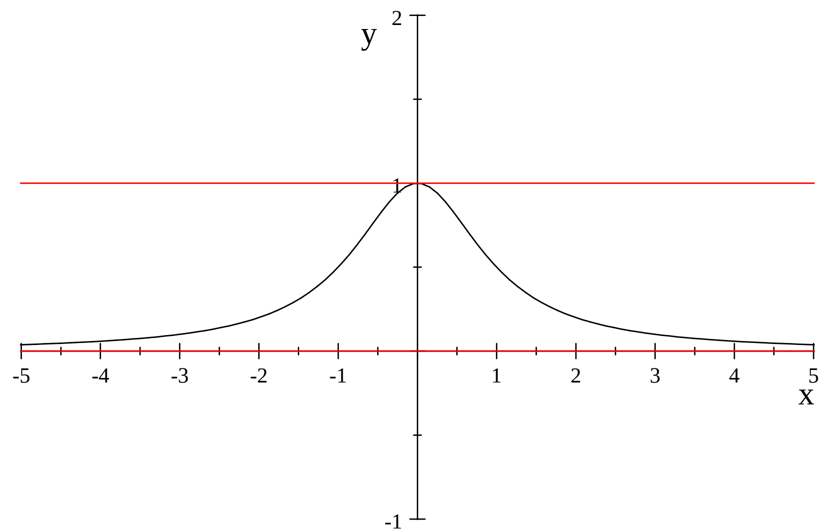
Una funzione limitata sia superiormente che inferiormente si dice *limitata.*

Esempi. $f(x) = x^2$, $g(x) = -x^2$



$$h(x) = x^3,\ p(x) = \frac{1}{1+x^2}$$





Funzioni monotone.

Definizione 18 *Sia $f : A \to \mathbb{R}$. Se per ogni coppia di punti x_1 e x_2 di A,*

$$x_1 < x_2 \textit{ implica } f(x_1) \leq f(x_2)$$

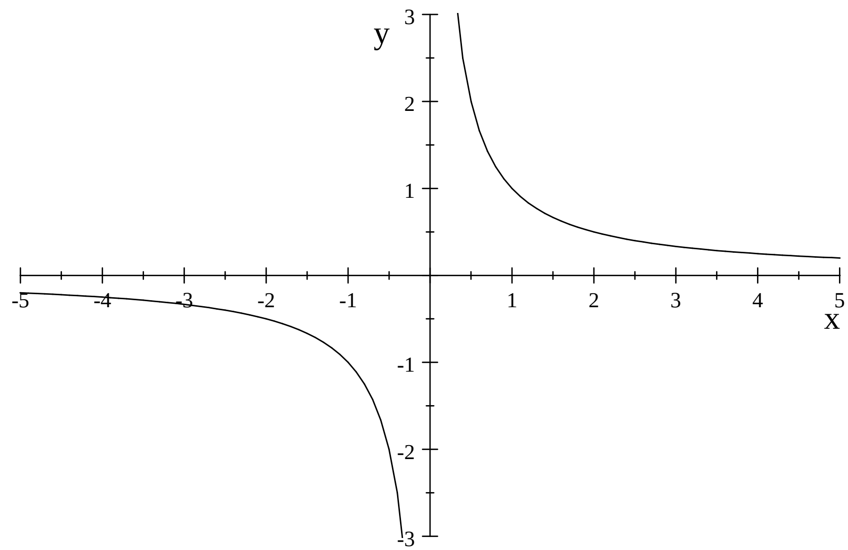
allora f si dice **crescente** *(in senso debole) o non decrescente. Se*

$$x_1 > x_2 \textit{ implica } f(x_1) \geq f(x_2)$$

f si dice **decrescente** *(in senso debole) o non crescente.*

Se le disuguaglianze valgono in senso stretto si dice rispettivamente che f è **strettamente crescente** o **strettamente decrescente.** Le funzioni crescenti o decrescenti (in senso debole o stretto) si dicono *monotone.*

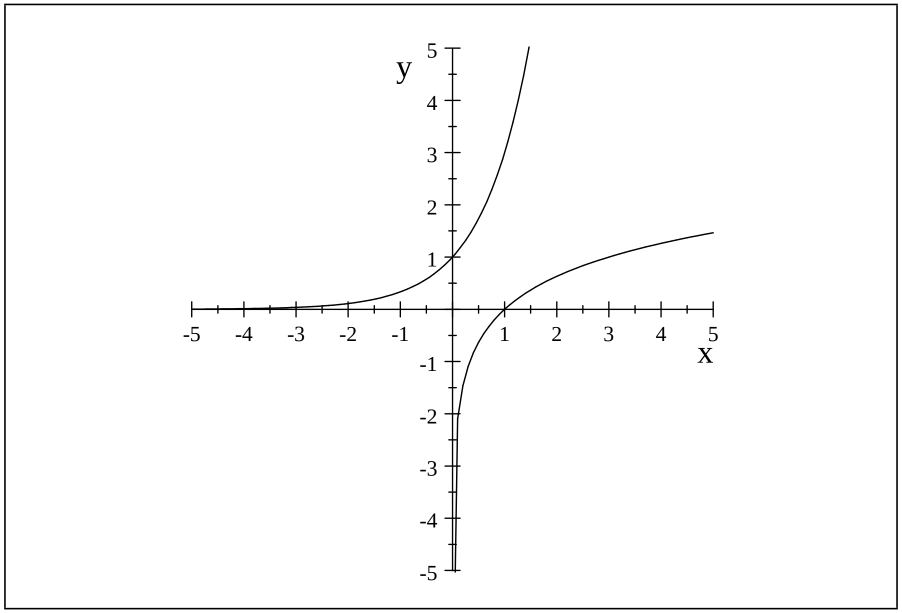
Esempi. La funzione $f(x) = \dfrac{1}{x}$ è definita in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$



- *decrescente in* $(-\infty, 0)$ e in $(0, +\infty)$

- non *monotona* su tutto il dominio

Le funzioni $f(x) = 3^x$ e $f(x) = \log_3 x$ sono definite rispettivamente in tutto $\mathbb{R}$ e in $(0, +\infty)$



sono entrambe *monotone crescenti* nei loro domini.

Massimi e minimi

Indroduciamo il concetto di massimi e minimi di una funzione. Sia $f : A \to \mathbb{R}$.

Definizione 19 *Un numero reale M si chiama* **massimo** *(globale o assoluto) di f in A e $x_0 \in A$ si chiama* **punto di massimo** *(globale) se, $\forall x \in A$*

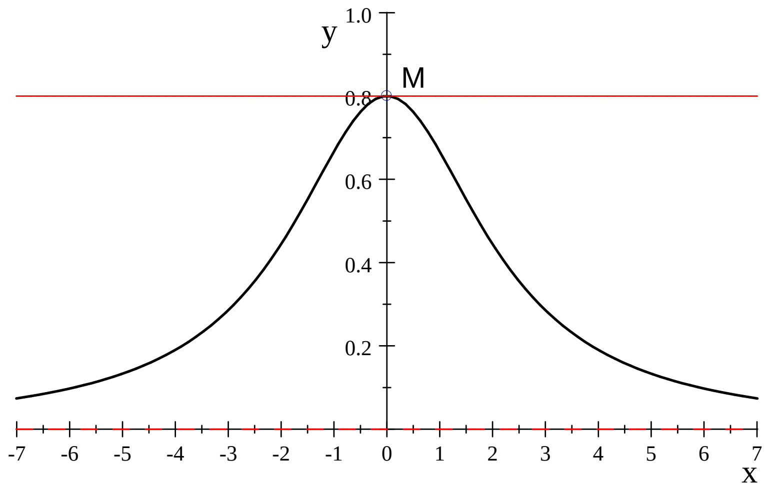
$$M = f(x_0) \geq f(x).$$

Inoltre, un numero reale m si chiama **minimo** *(globale o assoluto) di f in A e $x_0 \in A$ si chiama* **punto di minimo** *(globale) se, $\forall x \in A$*

$$m = f(x_0) \leq f(x).$$

I massimi e minimi di una funzione vengono anche chiamati *estremi*.

Esempio. La funzione $f(x) = \dfrac{4}{5 + x^2}$. Dominio?



La funzione è *limitata* perchè $0 < f(x) \leq \frac{4}{5}$.

Ammette un *massimo assoluto* $\frac{4}{5}$, in $x_0 = 0$. Ma non ammette *minimo assoluto* perche la funzione non assume mai il valore 0, ma ci si avvicina solo asintoticamente.

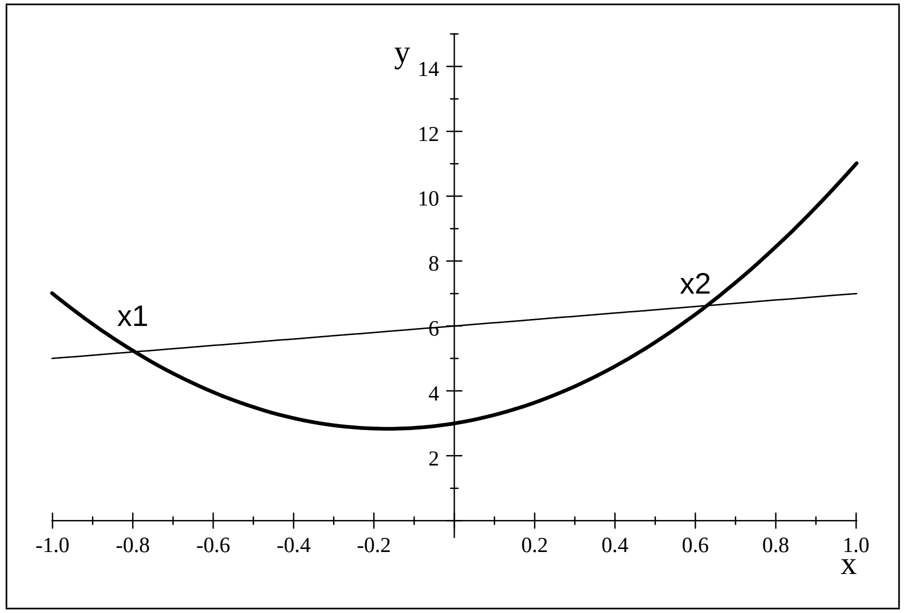
Funzioni convesse e concave.

In generale un insieme di punti nel piano si dice *convesso* se il segmento che unisce due punti dell'insieme è tutto contenuto nell'insieme.

Se pensiamo alle funzioni questo concetto si può estendere se consideriamo il loro *epigrafico.* Si chiama epigrafico di $f : A \to \mathbb{R}$ l'insieme dei punti (x, y) del piano che si trovano sopra il grafico stesso, tali cioè che $x \in A$ e $y \geq f(x)$.

Definizione 20 *f si dice* **convessa** *se il suo epigrafico è convesso.*

Ogni segmento che unisce due punti sul grafico di f deve stare o tutto sopra o almeno non sotto il grafico di f.



Definizione 21 f *è* **concava** *se* $-f$ *è convessa.*

Le funzioni $f(x) = ax^2$ con $a < 0$ sono concave.

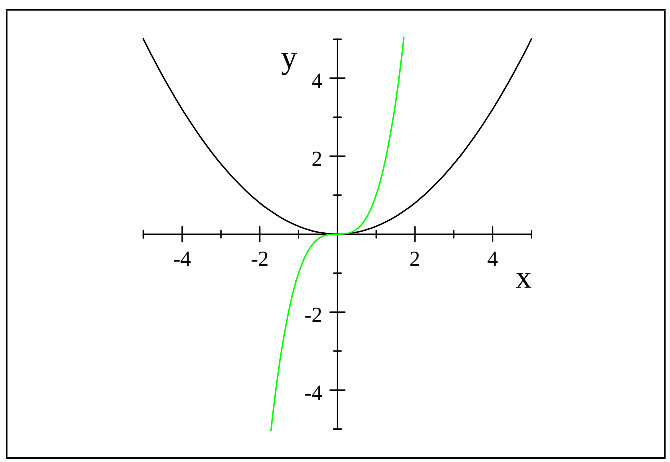
Funzioni pari e dispari.

Una funzione f è **pari** se il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate ovvero se

$$f(-x) = f(x)$$

Una funzione f è **dispari** se il suo grafico è simmetrico ripetto all'origine

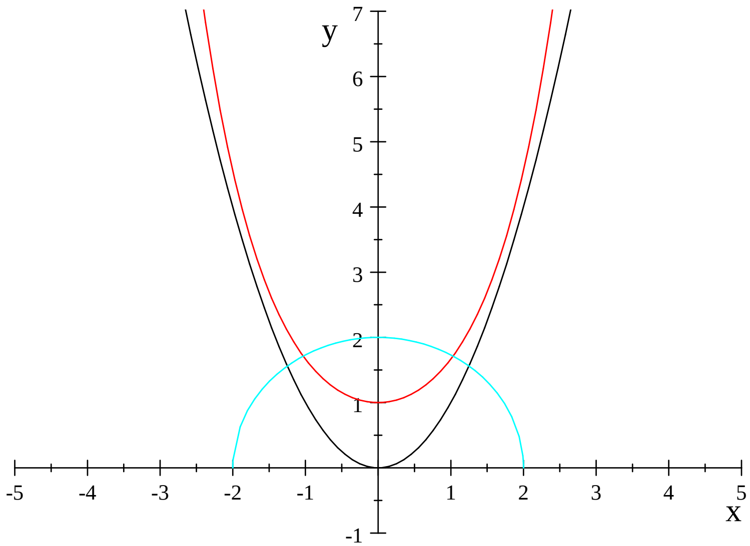
$$f(-x) = -f(x)$$

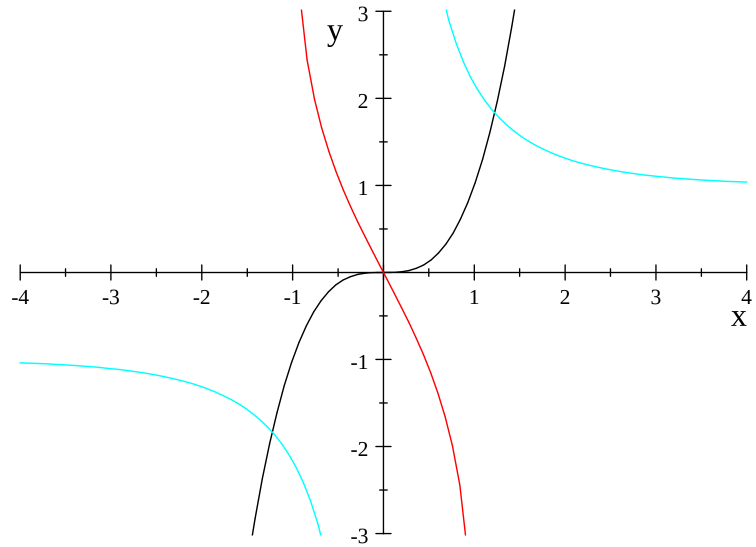


Esempi.

Le funzioni $f(x) = x^2$, $f(x) = \dfrac{3^x + 3^{-x}}{2}$, $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ sono pari.

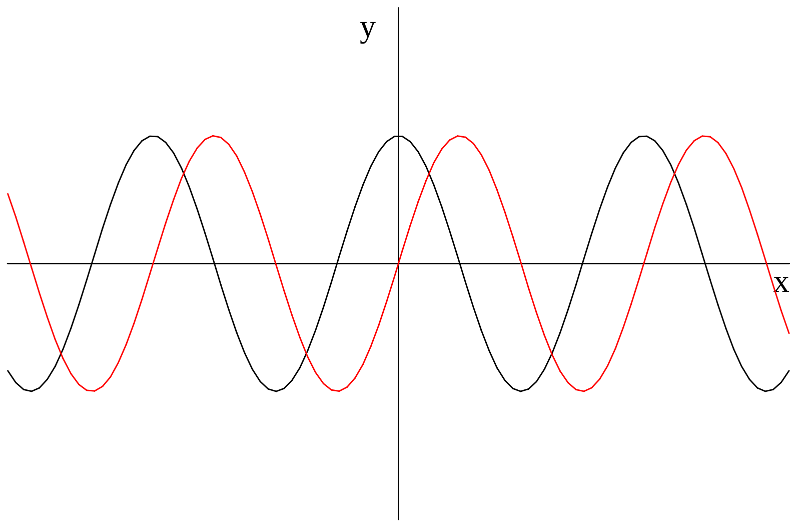
Le funzioni $f(x) = x^3$, $f(x) = \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$, $f(x) = \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}$ sono dispari.





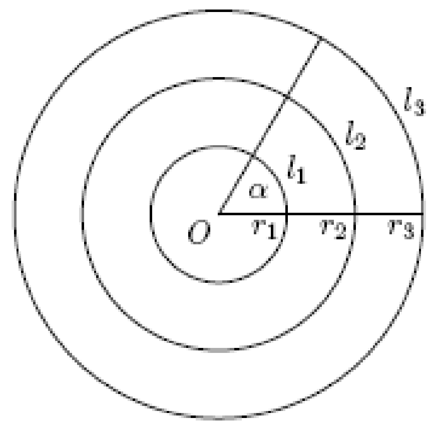
Funzioni trigonometriche.

La più importante proprietà delle funzioni trigonometriche, *seno, coseno, tangente* etc, è il loro comportamento ripetitivo che chiameremo *periodico*.$\sin x$



Il grafico completo delle funzioni seno e coseno ripete la stessa forma infinite volte.

Preliminari. Consideriamo le circonferenze concentriche in O di raggio $r_i > 0$; l'angolo al centro α individua su ciascuna gli archi l_i.



Dalla geometria elementare le due classi di grandezze rispettivamente dei raggi e degli archi sono tra loro in proporzione, e tale rapporto è costante

$$l_1 : r_1 = l_2 : r_2 = l_3 : r_3 = \ldots$$

Diremo **misura in radianti** di un angolo al centro di una circonferenza il rapporto (costante) fra l'arco da esso individuato e il raggio

$$\alpha = \frac{l}{r}$$

Osservazione. La misura in radianti, essendo rapporto di grandezze omogenee, risulta un numero puro.

Dalla geometria elementare sappiamo che la lunghezza della circonferenza di raggio r è $2\pi r$. Quindi l'angolo giro, angolo al centro corrispondente a tale arco, misura in radianti

$$\frac{l}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$$

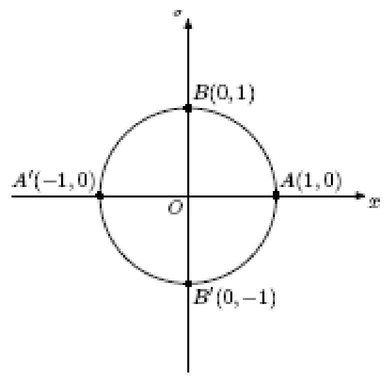
Dalla proporzione

$$\alpha : \pi = \alpha^{\circ} : 180^{\circ}$$

si può ricavare la misura in radianti di un angolo, nota quella in gradi, o viceversa.

α°	α
0°	0
30°	$\pi/6$
45°	$\pi/4$
60°	$\pi/3$
90°	$\pi/2$
120°	$2\pi/3$
135°	$3\pi/4$
150°	$5\pi/6$
180°	π
...	...

Ora continueremo a lavorare con una circonferenza di raggio $r = 1$, chiamata *circonferenza goniometrica.*



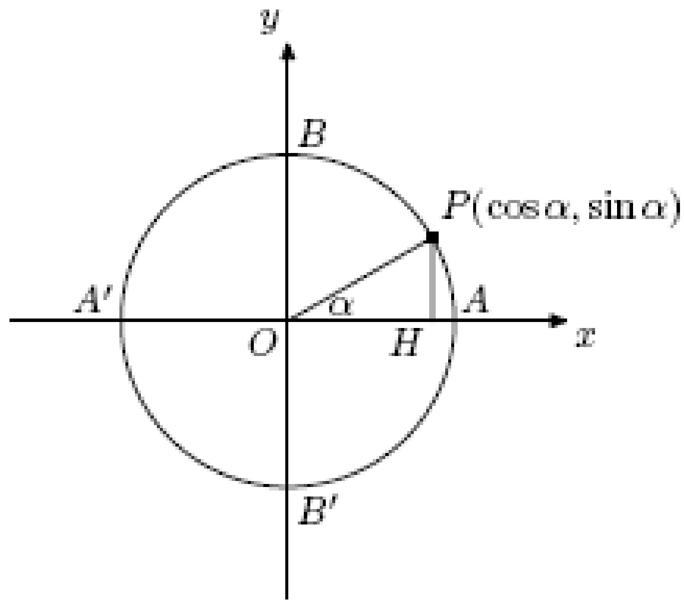
Per posizionare un angolo α, misurato in radianti, al centro della circonferenza goniometrica, abbiamo bisogno di alcune convenzioni:

1. il primo lato dell'angolo coincide con il semiasse positivo delle x;

2. assumiamo come verso di percorrenza positivo degli archi quello antiorario.

Definizione 22 *Il* **seno** *di un angolo (al centro della circonferenza goniometrica), misurato in radianti, è l'ordinata del punto P.*

Definizione 23 *Il* **coseno** *di un angolo (al centro della circonferenza goniometrica), misurato in radianti, è l'ascissa del punto P.*



Indichiamo con x la misura del nostro angolo α. Le coordinate del punto P non cambiano se si aumenta l'angolo x di multipli di 2π: dopo un giro completo $(x+2\pi)$ il punto P si ritrova nella posizione di partenza. Quindi $\forall x$ reale

$$\sin(x+2\pi) = \sin x \quad \text{e} \quad \cos(x+2\pi) = \cos x$$

Le *funzioni seno e coseno sono periodiche di periodo* 2π.

Proprietà fondamentali delle funzioni seno e coseno.

- *Dominio e codominio.* Entrambe le funzioni sono funzioni da $\mathbb{R} \to [-1,1]$

- *Relazione fondamentale.* $\boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}$

- *Simmetria.* La funzione seno è *dispari*, mentre la funzione coseno è *pari*

$$\sin(-x) = -\sin x, \qquad \cos(-x) = \cos x$$

- *Limitatezza.* Le funzioni seno e coseno sono *limitate* tra il valore *massimo* 1 e quello *minimo* -1.I punti di massimo e minimo sono infiniti e sono

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ e } x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad k \in Z, \text{ per il seno}$$
$$x = 2k\pi \text{ e } x = -\pi + 2k\pi \qquad k \in Z, \text{ per il coseno}$$

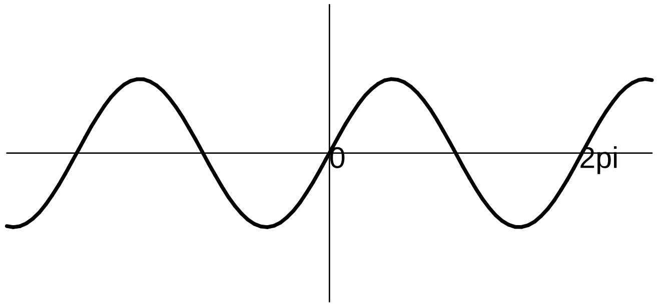


grafico di $\sin x$

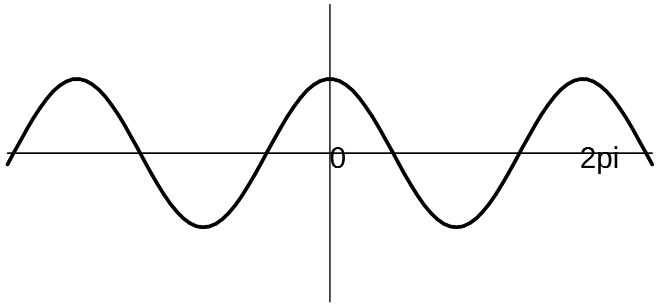


grafico di $\cos x$

Formule di addizione e sottrazione

$$\begin{aligned}\cos(x+y) &= \cos x\cos y - \sin x\sin y; \quad \cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y\\ \sin(x+y) &= \sin x\cos y + \cos x\sin y; \quad \sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y\end{aligned}$$

Per esempio

$$\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}) = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

Formule di duplicazione

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x; \quad \sin(2x) = 2\sin x\cos x$$

Altre funzioni trigonometriche

Altre funzioni trigonometriche sono definite a partire dalle funzioni seno e coseno. Esse sono

$$\boxed{\begin{array}{ll} \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} & \cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x} \\ \sec x = \dfrac{1}{\cos x} & \csc x = \dfrac{1}{\sin x} \end{array}}$$

Come le funzioni seno e coseno esse sono periodiche di periodo 2π,di fatto la tangente e cotangente sono periodiche di periodo π

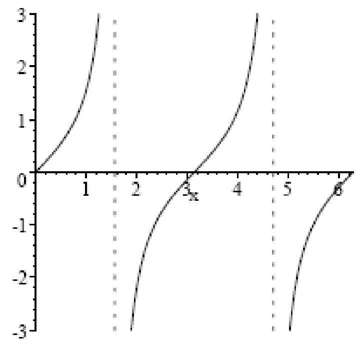


Grafico di $\tan x$

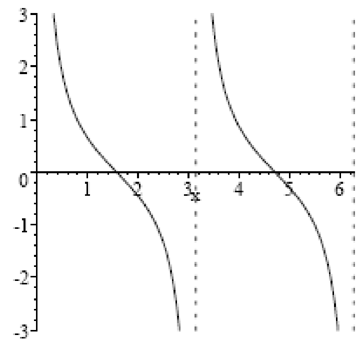


Grafico di $\cot x$

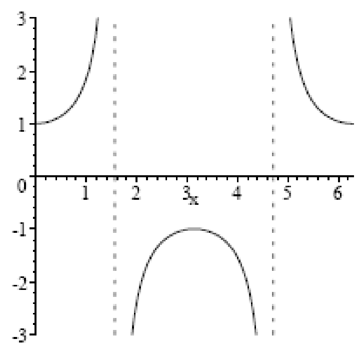


Grafico di $\sec x$

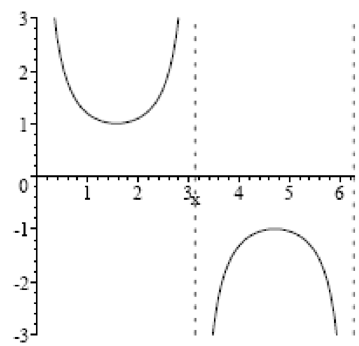


Grafico di $\csc x$

Proprietà di queste Funzioni Trigonometriche

- *Dominio e codominio.* Poiché seno e coseno sono definite per tutti i numeri reali, le altre funzioni trigonometriche sono anch'esse definite per tutti i numeri reali eccetto quelli per i quali si annulla il denominatore. Quindi la *tangente* e la *secante* hanno come dominio $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. Mentre la *cotangente* e la *cosecante* hanno come dominio $x \neq \pi + k\pi$. Il codominio della *tangente* e della *cotangente* è $(-\infty, +\infty)$. Mentre la *secante e la cosecante* hanno codominio $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

- *Simmetria.* Le funzioni tangente, cotagente e cosecante sono funzioni *dispari*

$$\tan(-x) = -\tan x, \quad \cot(-x) = -\cot x, \quad \csc(-x) = \csc x$$

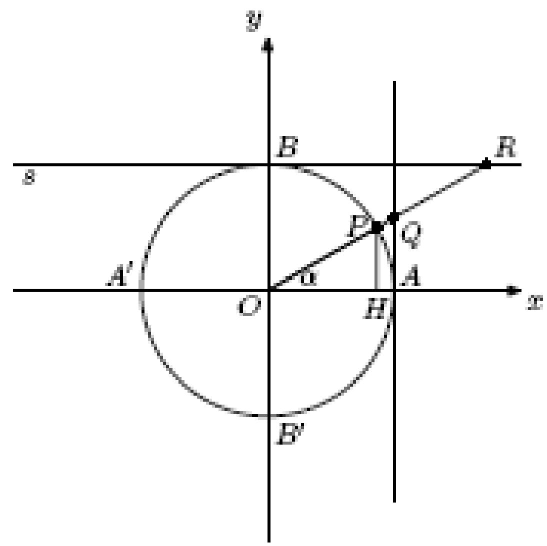
mentre la secante è *pari*

$$\sec(-x) = \sec x$$

- *Interpretazione geometrica della tangente.*

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \text{"pendenza del segmento che unisce l'origine con } P\text{"}$$

Interpretare la tangente come pendenza mostra, per esempio, perché $\tan(\pi/4) = 1$ e perché $\tan x \to \pm\infty$ quando $x \to \pi/2$



Funzioni trigonometriche inverse

E' necessario rendere biunivoche le funzioni trigonometriche finora studiate per poter definire le loro inverse. Consideriamo la restrizione della funzione $f(x) = \sin x$

$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$$

La funzione seno con questa *restrizione sul dominio* risulta biunivoca e perciò *invertibile.* In questo tratto di dominio essa è *monotona crescente.*

Definizione 24 *La funzione inversa della funzione seno,* **funzione arcoseno**, *è definita da*

$$\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

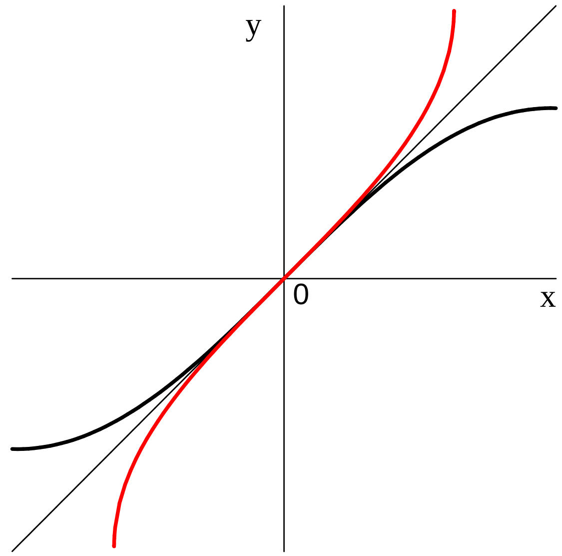


grafico di arcsin x

Consideriamo ora una restrizione del dominio della funzione $f(x) = \cos x$ che la rende invertibile in quanto *monotona decrescente*

$$\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$$

Definizione 25 *La funzione inversa della funzione coseno,* **funzione arcocoseno,** *è definita da*

$$\text{arccos} : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$$

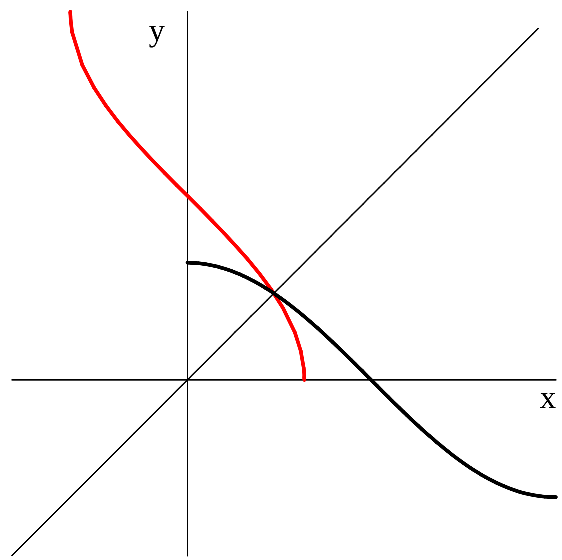


grafico di $\text{arccos}\, x$

Ora scegliamo una restrizione per la funzione tangente, è precisamente il tratto del dominio in cui la funzione è *monotona crescente* e quindi invertibile

$$\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$$

Definizione 26 *La funzione inversa della funzione tangente,* **funzione arctangente,** *è definita da*

$$\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

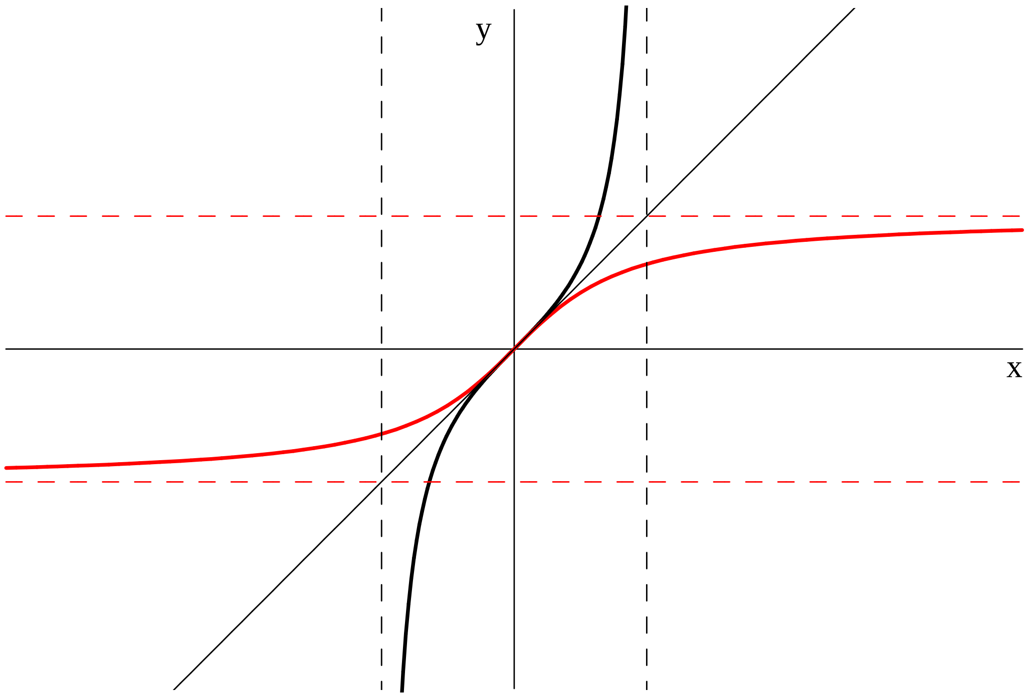


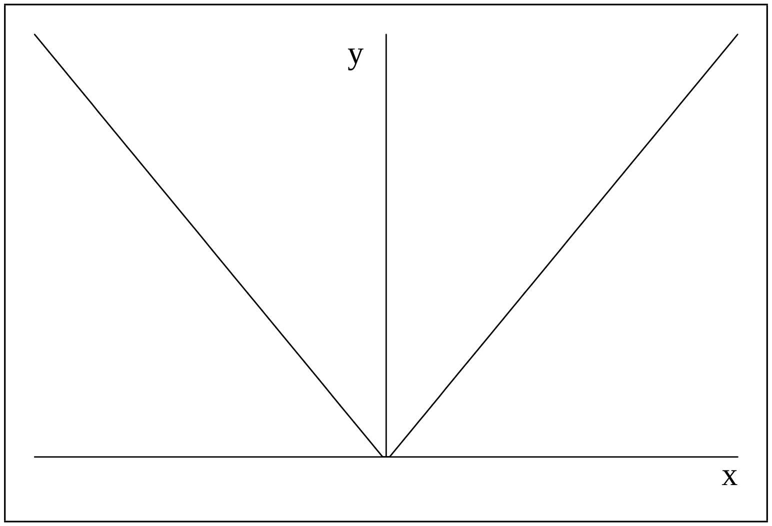
grafico di $\mathsf{arctan}\, x$

La funzione *arcotangente* è una funzione *dispari, crescente e limitata.*

Funzione valore assoluto

Consideriamo la funzione $f(x) = |x|$

$$|x| = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$



Proprietà del valore assoluto

- $|x| \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, e $|x| = 0$ se e solo se $x = 0$

- $|-x| = |x|$

- $|xy| = |x|\,|y|$

- $|x+y| \leq |x| + |y|$ infatti $|x+y| = \sqrt{(x+y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + 2xy} \leq \sqrt{|x|^2 + |y|^2 + 2\,|x|\,|y|} \leq \sqrt{(|x|+|y|)^2} = |x| + |y|$

Componendo una funzione f con la funzione $|x|$ si possono ottenere le funzioni

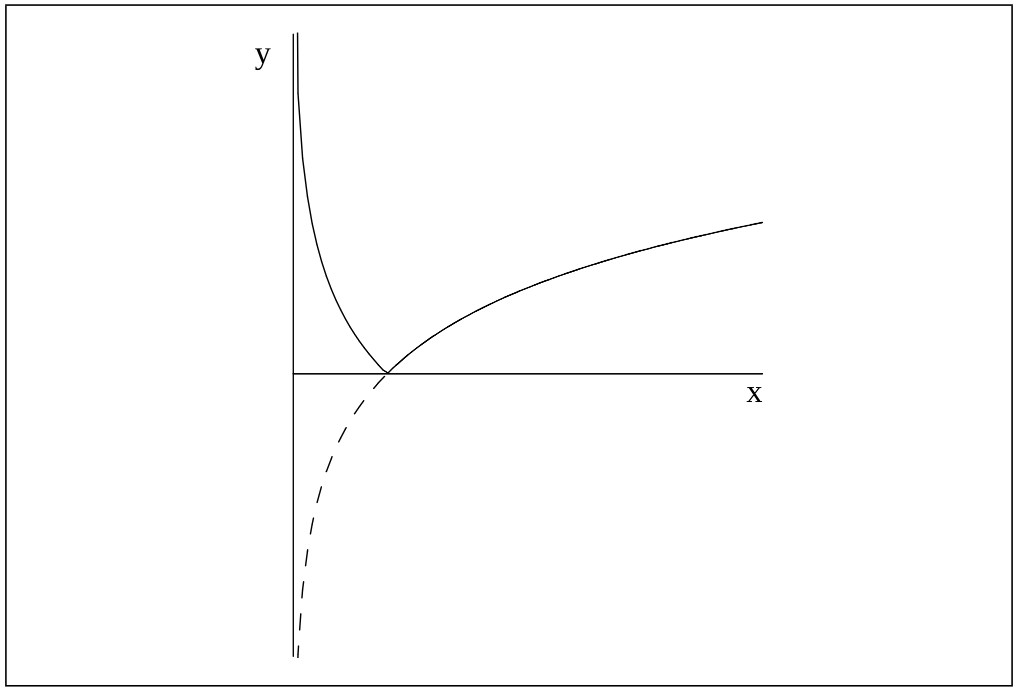
$$|f(x)| \qquad f(|x|)$$

Avremo che

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$$

Il grafico di $|f(x)|$ si ottiene dal grafico di f "ribaltando" al di sopra dell'asse delle ascisse la parte el grafico con $f(x) < 0$.

Esempio. $f(x) = |\ln x|$



Consideriamo ora la funzione

$$f(|x|) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \geq 0 \\ f(-x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

La funzione $f(|x|)$ è una funzione *pari.* Ad esempio $f(x) = \ln|x|$